

Opol

I

S Y M P O Z J U M

na temat

TEORII DRGAŃ
LINIOWYCH I NIELINIOWYCH

Streszczenia referatów

POZNAŃ 1960

Gr. Tempel

S p i s t r e ś c i

		str.
1. W. Bogusz	- Warunki stateczności technicznej	3
2. S. Kaliski	- Rozprzestrzenianie się nieliniowej fali obciążenia i odciążenia w polu magnetycznym dla doskonałego przewodnika . . .	7
3. E. Kamiński	- O badaniach pewnego urządzenia wibroudarowego	8
4. E. Karaśkiewicz	- Teoria nieliniowego rezonatora akustycznego dla niskich częstości	9
5. J. Kowalik	- Stateczność dynamiczna pręta na dwu podporach, obciążonego pulsującym momentem skręcającym	9
6. M. Krzyżański	- Przekształcenie Laplace'a-Picone i jego zastosowanie w teorii równań o pochodnych cząstkowych	11
7. R. Krzywiec	- O drganiach giętych prostego pręta ważkiego trójpodporowo sprężysto utwierdzonego	12
8. Cz. Olech	- Układy strukturalnie stabilne ,	13
9. J. Osiecki	- Zagadnienia odbicia się płaskiej fali obciążenia i odciążenia od sztywnej podpory dla ciała sprężysto-plastycznego, niejednorodnego	13
10. Z. Osiński	- Prosta krytyczna jako kryterium naprężenności ruchu przy tłumieniu nieliniowym	14
11. T. Puchałka	- Zagadnienie analizy i syntezy układów regulacyjnych w świetle ogólnej teorii drgań	15
12. J. Skowroński, S. Ziemia	- Zagadnienie stanu granicznego ruchu, silnie nieliniowych nieautonomicznych układów dyskretnych	16
13. R. Solecki	- Rozwiązanie ogólne płyty o kształcie trójkąta prostokątnego za pomocą transformacji właściwej	17

14. J. Szadkowski - Zagadnienie naprzemienności ruchu pewnego układu autonomicznego 19
15. J. Wilczkowski - O pewnym kryterium zbieżności dwóch dowolnych ruchów, silnie nieliniowych mechanicznych układów dyskretnych 19

16. H. Mikołajczak - Częstości własne ustrojów cienkoszennych

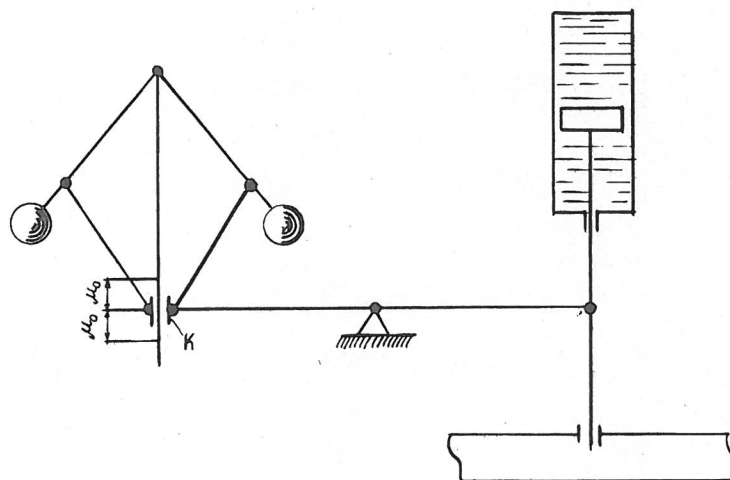
WARUNKI STATECZNOŚCI TECHNICZNEJ

Pojęcie asymptotycznej stateczności /w sensie Lapunowa/ zerowego rozwiązania układu równań różniczkowych w wariacjach oraz kryteria zabezpieczające tę stateczność okazują się niewystarczające do rozwiązania wielu zagadnień technicznych.

Według definicji Lapunowa rozwiązanie zerowe układu jest asymptotycznie stateczne, jeżeli można dobrać takie $\delta > 0$, że przy warunkach początkowych ruchu nie przekraczających co do wartości bezwzględnej wartości δ rozwiązanie odpowiadające tym warunkom początkowym dąży do zera przy t dążącym do nieskończoności.

Wykażemy na przykładach, że takie określenie stateczności jest niewystarczające do rozwiązania pewnych zagadnień w technice.

Rozważmy regulator odśrodkowy prostego działania w układzie liniowym /rys. 1/.



Rys. 1

Przy ruchu ustalonym maszyny tulejka K regulatora znajduje się nie dalej od położenia zerowego jak o μ_0 .

Przypuśćmy, że chwilowe zaburzenie ruchu maszyny spowoduje przesunięcie tulejki o $\mu_1 > \mu_0$. Zadaniem regulatora jest usunięcie chwilowego zaburzenia ruchu maszyny, co może nastąpić jedynie po ustaleniu się położenia tulejki w otoczeniu położenia zerowego nie dalej jak o μ_0 . Czas ustalania się położenia tulejki nie jest obojętny i żąda się, aby czas ten był odpowiednio krótki. Tymczasem w kryteriach asymptotycznej stateczności rozwiązania zerowego układu równań czas ten nie odgrywa żadnej roli. Układ równań ruchu regulatora przy liniowym tłumieniu ma postać:

$$T_a \dot{\varphi} = -\mu$$

$$T_r^2 \ddot{\mu} + T_k \dot{\mu} + \delta \mu = \varphi$$

gdzie T_a - czas rozbiegu maszyny, T_r - okres drgań własnych regulatora, T_k - współczynnik tłumienia wiskotycznego, δ - współczynnik czułości regulatora, μ - przesunięcie tulejki, φ - zmiana prędkości kątowej.

Stosując kryteria Routha-Hurwitza, otrzymamy warunki asymptotycznej stateczności w postaci:

$$T_k > 0, \delta > 0, T_a > 0, T_k s - \frac{T_r^2}{T_a} > 0$$

Warunki powyższe są spełnione na przykład przy danych:

$$T_k = T_r^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}, \delta = T_r^2 \cdot 2,001 \cdot 10^{-1}, T_a T_r^2 = 5 \cdot 10^2$$

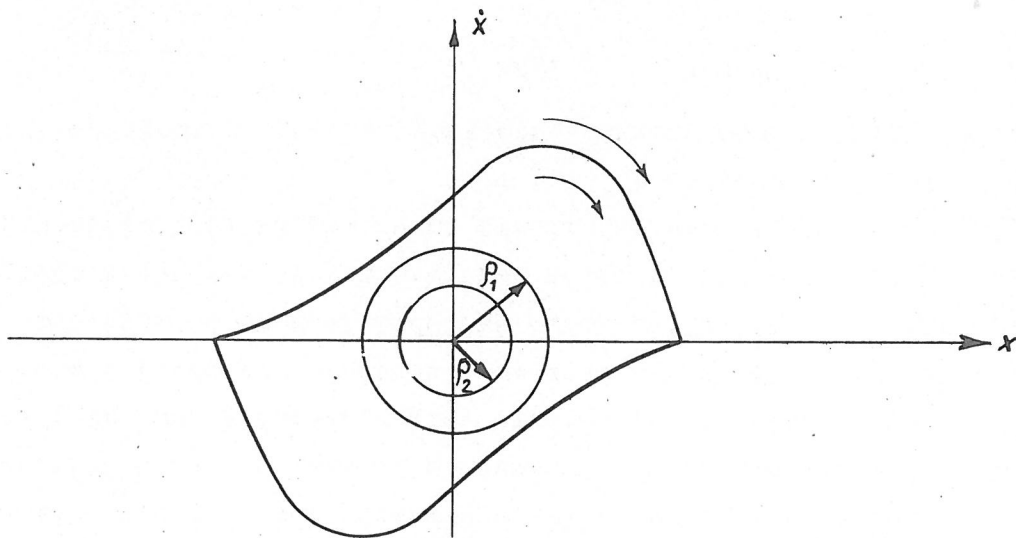
Łatwo sprawdzić, rozwiązując układ równań, że przy przesunięciu się tulejki K w czasie zaburzenia ruchu o $5 \mu_0$ ustalanie się położenia tulejki trwać będzie około 2 min. 43 sek., co jest w wielu przypadkach niedopuszczalne.

Jak widać z powyższego przykładu, asymptotyczna stateczność nie rozwiązuje zagadnienia przejścia rozwiązania układu równań ruchu z jednego obszaru do drugiego w określonym przedziale czasu.

Jako drugi przykład rozważymy układ elektryczny, który da się opisać równaniem Van der Pola:

$$\ddot{x} - \varepsilon / 1 - x^2 / \dot{x} + x = 0$$

Wiadomo, że przy $\varepsilon > 0$ istnieje asymptotycznie stateczny reżim graniczny /rys. 2/.



Rys. 2

Okazuje się, że przy $\xi = \frac{1}{10}$ czas przejścia rozwiązania z otoczenia punktu osobliwego o promieniu ρ_0 poza otoczenie o promieniu $\rho_1 = 2\rho_0$ wynosi około 5 sek. Oczywiście czas wejścia rozwiązania w otoczenie reżimu granicznego będzie jeszcze dłuższy, co w wielu układach elektrycznych jest niedopuszczalne.

Z powyższych przykładów wynika konieczność wprowadzenia pojęcia stateczności technicznej.

Określenie pojęcia stateczności technicznej

Niech układ 1 opisuje ruch wymuszony.

$$1. \dot{y}_i = g_i / t, y_1, \dots, y_n / \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Zerowe rozwiązanie układu 1 nazywa się technicznie stateczne, jeżeli:

1/. istnieją dwa obszary G_{t_0} , G_t w n -wymiarowej przestrzeni

$$/y_1 \dots y_n/ \quad t \in /t_0, t_0 + T/$$

2/. istnieje zbiór Ω w przestrzeni dopuszczalnych parametrów

$/\lambda_1 \dots \lambda_n/$ taki, że krzywe całkowe układu 1 wychodzące w czasie $t = t_0$ z obszaru G_{t_0} wchodzą do obszaru G_t w czasie

$$t \in /t_0, t_0 + T/.$$

W przypadku, gdy zadane są obszar G_t i zbiór Ω , a należy wyznaczyć obszar G_{t_0} , zagadnienie stateczności technicznej sprowadza się do klasycznej stateczności Lapunowa.

W innych przypadkach pojęcie stateczności technicznej nie pokrywa się z pojęciem stateczności w sensie Lapunowa.

W omówionych dwóch przykładach /regulator odśrodkowy i równanie Van der Pola/ zagadnienie można rozwiązać w oparciu o techniczną stateczność przez zadanie obszarów G_{t_0} i G_t i czasu T i określenie zbioru parametrów T_a, T_k, T_r, δ i ξ .

W.I. Zubow /Matematicheskiye metody issledowania sistem awtomaticheskogo regulirovaniya. Moskwa 59 r./ bada zagadnienie stateczności technicznej w oparciu o dwie funkcje $V/t, y_1 \dots y_n/$ i $W/t, y_1 \dots y_n/$ spełniające szczególnie nierówności i podaje przy ich pomocy warunek wystarczający technicznej stateczności zerowego rozwiązania układu 1 przy zadanych G_{t_0} i G_t i T .

Wyznaczenie funkcji V i W jest dla danego układu bardzo skomplikowane i z tego względu warunek Zubowa jest praktycznie nieprzydatny. Warunek wystarczający, który omówimy dalej, może mieć większe zastosowanie w

praktyce, mimo że ogranicza się do układów autonomicznych. Podamy warunek wystarczający stateczności technicznej zerowego rozwiązania układu dwóch równań:

$$2. \dot{X}_1 = f_1 / X_1, X_2 / \quad \dot{X}_2 = f_2 / X_1, X_2 /$$

O funkcjach f_1 i f_2 zakładamy, że są klasy C_2 na płaszczyźnie $/X_1, X_2/$, jacobian tych funkcji jest różny od zera na płaszczyźnie $/X_1, X_2/$ i $f_1/0,0/ = f_2/0,0/ = 0$.

Przy tych założeniach układ 2 przechodzi przez różniczkowanie względem czasu obu stron w układ:

$$3. \dot{y}_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \quad \dot{y}_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2$$

gdzie $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}$ z podstawieniem za X_j funkcji $\varphi_j / y_1, y_2 /$, które są funkcjami odwrotnymi funkcji $f_i / X_1, X_2 /$, czyli:

4.

Przypuśćmy, że dane są obszary G_{t_0} i G_t na płaszczyźnie $/X_1, X_2/$ oraz ustalony czas T .

Obszary G_{t_0} i G_t przechodzą poprzez transformacje 4 w obszary G'_{t_0} i G'_t na płaszczyźnie $/y_1, y_2/$.

Określmy dwie funkcje:

$$\phi = a_{11} y_1^2 + /a_{12} + a_{21}/ y_1 y_2 + a_{22} y_2^2$$

$$5. \psi = a_{21} y_1^2 + /a_{22} - a_{11}/ y_1 y_2 - a_{12} y_2$$

Funkcja ϕ jest pochodną względem czasu z kwadratu odległości od początku układu punktu P na krzywej całkowej układu 3, zaś funkcja ψ jest momentem wektora prędkości punktu P względem początku układu. Przypuśćmy, że obszary G'_{t_0} i G'_t są tak określone, że jeżeli punkty $P \in G'_{t_0}$, $Q \in G'_t$, wówczas $\rho/P/ \leq \rho_0$, $\rho/Q/ \leq \rho_1$, gdzie ρ oznacza odległość punktu od początku układu.

Funkcje ϕ i ψ można wyrazić przez ρ i kąt φ podstawiając:

$$J_1 = \rho \cos \varphi, \quad J_2 = \rho \sin \varphi$$

Warunek wystarczający stateczności technicznej rozwiązania zerowego jest:

$$6. \rho_0 e^{\int_0^\varphi \frac{\phi}{\psi} d\varphi} \leq \rho_1 \quad i \quad \left| \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\psi} \right| \leq T$$

W nierównościach 6 występują parametry układu 3, które można odpowiednio dobrać.

Warunek 6 można uogólnić na układ n równań, rozważając ruch rzutów punktu P na płaszczyzny $/y_i, y_j/$.

Pojęcie stateczności technicznej w połączeniu z pojęciem stateczności w skończonym przedziale czasu odgrywa dużą rolę w badaniach układów automatycznej regulacji.

Sylwester Kaliski
W a r s z a w a

ROZPRZESTRZENIANIE SIĘ NIELINIOWEJ FALI OBCIĄŻENIA I ODCIĄŻENIA W POLU MAGNETYCZNYM DLA DOSKONAŁEGO PRZEWODNIKA

W pracy rozważa się problem rozprzestrzeniania się elasto-plastycznej fali obciążenia i odciążenia dla jednowymiarowego zagadnienia półprzestrzeni w polu magnetycznym. Rozważono przypadek doskonałego przewodnika. Nad półprzestrzenią przyjęto próżnię. Uzyskano ścisłe rozwiązanie dla łamanej charakterystyki $\sigma - \varepsilon$ i przybliżone dla krzywoliniowej.

Wyznaczone zostały wartości pól elektromagnetycznych w próżni i w ośrodku, stan przemieszczeń i napięcia w ośrodku oraz prądy powierzchniowe, w przypadku fali obciążenia.

Wykazano, że gdy $\beta \rightarrow 0$, rozwiązania zbiegają do rozwiązań dla mechanicznej fali obciążenia. Wskazano na możliwość rejestracji silnych nieliniowych zaburzeń mechanicznych na drodze pomiaru wtórnych efektów elektromagnetycznych.

W przypadku fali odciążenia podano rozwiązanie dla sztywnej charakterystyki odciążenia.

O BADANIACH PEWNEGO URZĄDZENIA WIBROUDAROWEGO

Obiektem badań był buczonek sygnalizacyjny, pracujący na zasadzie wibrodarowej. Sprężyste zawieszony bijak wykonuje drgania wymuszone na skutek działania zmiennej siły $P/x, t/$ elektromagnesu i uderza w płytkę, drgania której są źródłem dźwięku.

Ruch bijaka może być opisany równaniem

$$m\ddot{x} + h/\dot{x}/ + kx = P/x/ \left[\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\left[n^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] \pi} \cos 2n \omega t \right] + S/t/$$

gdzie $S/t/$ = impulsy uderzeń. Doświadczalnie stwierdzono, że w procesie zderzenia bijak jest w kontakcie z płytką w ciągu pół okresu drgań własnych płytki obciążonej masą bijaka, zatem cały układ może być traktowany łącznie i opisany równaniem

$$m/x/x + h/x, x/ + k/x/ = P/x/ \left[\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\left[n^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] \pi} \cos 2n \omega t \right]$$

Uproszczoną metodę ilościowego badania układu, łatwą do wykorzystania w zakładzie produkcyjnym i dostatecznie dokładną ustalono w oparciu o wyniki pomiarów zasadniczych parametrów układu. Pomiar przeprowadzono przy użyciu czujników indukcyjnych, mostka i oscylografów pętlicowego i katodowego. Wyznaczono czas styku bijaka z płytką, współczynnik odbicia, częstości i amplitudy drgań, przebieg prądu w elektromagnesie.

Uproszczona metoda, w której zastosowano elementarne równania liniowe, zakłada istnienie stanu granicznego, tzn. $\dot{x}/t/ = \dot{x}/t-T/$, uwzględnia czas styku bijaka z płytką Δt i współczynnik odbicia R oraz przyjmuje, że $P/x, t/ = P/\frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi} \cos 2 \omega t/$. Stwierdzono doświadczalnie dużą zgodność wyników pomiarów i obliczeń dokonanych tą metodą.

TEORIA NIELINIOWEGO REZONATORA AKUSTYCZNEGO
DLA NISKICH CZĘSTOŚCI

Równanie rezonatora drgającego dla niskich częstotliwości ma postać:

$$\frac{\rho_1}{S} u + u \left(\frac{\rho \omega^2}{2\pi c} + \alpha + \beta u + \gamma u^2 \right) + \frac{\rho c^2}{v} \int u dt = P \sin \omega t$$

stąd

$$u + u/A + Bu + Cu^2 + Du = E \cos \omega t$$

Szukamy rozwiązania w postaci:

$$u = f_1/t/ \cos \omega t + f_2/t/ \sin \omega t$$

gdzie $f_1/t/$ i $f_2/t/$ są funkcjami ciągłymi powoli się zmieniającymi.

Rozwiązania periodyczne są na podstawie metody Andronowa i Witta związane z punktami osobliwymi równania:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-G_x - y/1 + r^2/ + F}{G_y - x/1 + r^2/} = \frac{P/x,y/}{Q/x,y/}$$

Okazuje się, że dla wszelkich wartości G i r^2 ruch jest zawsze stateczny.

Janusz Kowalik
W a r s z a w a

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PRĘTA NA DWU PODPORACH,
OBciążONEGO PULSUJĄCYM MOMENTEM SKRĘCAJĄCYM

Rozważam problem drgań parametrycznych pręta o przekroju kołowym, swobodnie podpartego na dwu podporach, wzbudzonego momentem skręcającym o postaci

$$M/t/ = M_0 /1 + \mu \cos \omega t/$$

Przy przyjęciu, że częstota kątowna ω jest dostatecznie odległa od częstotliwości rezonansowej drgań skrętnych, można założyć mały kąt skręcenia $\varphi/x, t/$. Zlinearyzowanie równań drgań giętno-skrętnych doprowadza do następującego układu:

$$/2/ \quad GJ_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - A \rho \int_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$/3/ \quad EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - M/t/ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + A \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$/4/ \quad EJ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + M/t/ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + A \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

Oznaczenia w równaniach:

GJ_x - sztywność skręcania pręta

EJ - sztywność zginania

$A\rho$ - masa jednostkowa

x - zmienna wzdłuż osi pręta

y, z - wychylenie pręta w kierunkach prostop. do osi Ox .

Równania 2 - 3 - 4 można wyprowadzić „statycznie” z równowagi sił działających na element pręta lub z zasady Hamiltona.

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} \int \left[GJ_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + A \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + A \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ \left. - EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - EJ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 - GJ_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + M \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) - M \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) \right] dx$$

Po wstawieniu do potencjału kinetycznego funkcji $y/x, t/$ i $z/x, t/$ spełniającej warunki brzegowe zagadnienia

$$/5/ \quad y/0, t/ = y/l, t/ = z/0, t/ = z/l, t/ = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} /6/ \quad EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M/t/ \frac{\partial z}{\partial x} \\ /7/ \quad EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - M/t/ \frac{\partial y}{\partial x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array}$$

wykonano całkowanie względem zmiennej x , a następnie do otrzymanego funkcjonału zastosowano równanie Eulera. Otrzymano zwyczajne równanie postaci:

$$/8/ \quad /1 + 2\mu a \cos \omega t/ \ddot{q} - 2 b \mu \sin \omega t \dot{q} + /c + 2d\mu \cos \omega t/ q = 0$$

Znaleziono obszary stateczności i niestateczności rozwiązań równania /8/, postulując rozwiązania okresowe w postaci szeregów Fouriera o okresie T i $2T$, gdzie T jest okresem współczynników równania.

M. Krzyżański

PRZEKSZTAŁCENIE LAPLACE'A-PICONE I JEGO ZASTOSOWANIA
W TEORII RÓWNAŃ O POCHODNYCH CZĄSTKOWYCH

Jeżeli $f/t/$ jest funkcją sumowalną w przedziale $[0, T]$ ($T > 0$) a λ parametrem rzeczywistym i dla dostatecznie wielkich wartości tego parametru zachodzi nierówność

$$\left| e^{\lambda T} \int_0^T e^{-\lambda t} f/t/ dt \right| < k\lambda^p$$

gdzie k i p są stałymi rzeczywistymi ($k \geq 0$), to funkcja $f/t/$ znika prawie wszędzie w przedziale $[0, T]$. Funkcję

$$/1/ h(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda t} f/t/ dt$$

Mauro Picone nazwał transformatą Laplace'a funkcji $f/t/$ w skończonym przedziale całkowania [transformata di Laplace della funzione $f/t/$ a intervalli d'integrazione finito, por. M. Picone, Nuovi metodi d'indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 13 /1939/]

Dzięki przytoczonemu wyżej twierdzeniu przekształcenie /1/ znajduje liczne zastosowania w dowodach jednoznaczności rozwiązań równań o pochodnych cząstkowych.

O DRGANIACH GIĘTNYCH PROSTEGO PRĘTA WAŻKIEGO
TRÓJPODPOROWO SPRĘŻYŚCIE UTWIERDZONEGO

W pracy tej poczyniono próbę uwzględnienia sprężystości więzi prostego dwupodporowego pręta ważkiego. Jest to możliwe przez jednoczesne wprowadzenie dwóch stałych sprężystych charakteryzujących poszczególną więź pod względem sprężystości jej ugięcia i obrotu w granicach prawa Hooke'a. Wykorzystuje się przy tym równanie różniczkowe drgań giętnych prostego pręta ważkiego.

Dla pręta dwupodporowego można to uczynić przy pomocy pewnej interpretacji warunków brzegowych.

Ponieważ wprowadzone stałe sprężyste mogą przyjmować wartości z półotwartego nieskończonego przedziału dodatniego, więc otrzymane równania charakterystyczne częstości zawierają także w szczególnym przypadku znane przykłady drgań swobodnych ważkich prętów prostych na dwóch podporach sztywnych.

W związku z tym rozpatrzono kolejne obciążenie pręta siłą /normalną/ skupioną, momentem /zginającym/, masą skupioną i nieskupioną. W każdym przypadku otrzymano odpowiadające równania charakterystyczne częstości drgań.

Uwzględniając powyższe - dzięki pewnemu uogólnieniu tak stałych sprężystych więzi, jak i warunków brzegowych - można podać równanie charakterystyczne częstości pręta trójpodporowo sprężyscie utwierdzonego. Zawarte są w nim wszystkie poprzednie przypadki pręta dwupodporowego. Wynika stąd natychmiast duża ilość zadań uzależniona od liczby kombinacji tak podpór pręta, jak też i rodzajów jego obciążeń. Daje to szerokie możliwości w zastosowaniach technicznych. W związku z tym podano pewne przykłady.

Wszystkie dotychczasowe rozważania mogą być przeniesione na obliczenie krytycznej ilości obrotów prostych sprężystych wałów ważkich trójpodporowo sprężyscie utwierdzonych.

Można przy tym uwzględnić również efekt żyroskopowy.

Dojdą nowe możliwości zastosowań.

UKŁADY STRUKTURALNIE STABILNE

Mówiąc niedokładnie /ściska definicja zostanie podana w referacie/, układ równań

$$/1/ \quad \dot{x}_i = F_i /x_1, \dots, x_n/ \quad /i = 1, \dots, n/$$

nazywamy strukturalnie stabilnym, jeżeli małe perturbacje /małe są również pochodne perturbacji/ prawych stron, nie zmieniają jakościowego przebiegu rozwiązań. Np. oscylator harmoniczny

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -k^2 x - by \quad /k > 0/$$

w przypadku tłumienia / $b > 0$ / jest strukturalnie stabilnym, a nie jest - gdy $b = 0$, ponieważ w tym ostatnim przypadku dowolnie mała perturbacja może centrum przeprowadzić w ognisko.

Na płaszczyźnie / $n = 2$ / układy strukturalnie stabilne zostały dosyć dokładnie scharakteryzowane. Mało natomiast wiadomo o układach strukturalnie stabilnych w przestrzeni trój- i więcej wymiarowej. Ostatnio uzyskano pewne rezultaty dotyczące tych zagadnień.

W referacie tym zamierzam omówić znane mi dotychczas wyniki dotyczące tego, wydaje się ważnego, pojęcia: układu strukturalnie stabilnego.

Jan Osiecki

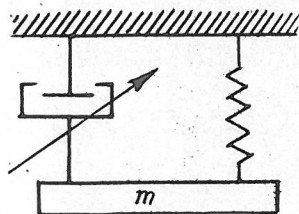
ZAGADNIENIE ODBICIA SIĘ PŁASKIEJ FALI OBCIĄŻENIA I ODCIĄŻENIA OD SZTYWNEJ PODPORY DLA CIAŁA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO, NIEJEDNORODNEGO.

W pracy rozważa się problem rozprzestrzeniania się płaskiej fali obciążenia i odciążenia w ośrodku sprężysto-plastycznym, niejednorodnym, a następnie zagadnienie odbicia tych fal od doskonale sztywnej podpory.

Pokazano wpływ niejednorodności ośrodka na prędkość fali plastycznej i fali odciążenia oraz na rozkład naprężenia wzdłuż fali odciążenia. Wyznaczono reakcję na podporze jako funkcję czasu oraz rozwiązanie w obszarze leżącym ponad falą odbitą.

PROSTA KRYTYCZNA JAKO KRYTERIUM NAPRZEMIENNOŚCI
RUCHU PRZY TŁUMIENIU NIELINIOWYM

Praca poświęcona jest zbadaniu ruchu układu nieliniowego o jednym stopniu swobody pod działaniem siły sprężystej liniowej oraz nieliniowego tłumienia zależnego od prędkości /rys. 1/.



Rys. 1

Ruch takiego układu opisany jest równaniem różniczkowym

$$\ddot{x} + R/\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad /1/$$

Ruch takiego układu badany był przez G. Sansone i S. Ziembę. W pracy poniżej został zbadany przy założeniach bardziej ogólnych. Wprowadzono przy tym pewne geometryczne kryterium naprzemienności takiego ruchu. Zakładając, że spełnione jest założenie istnienia jednoczesności rozwiązania oraz że charakterystyka tłumienia spełnia w przedziale $[-V_1, +V_2/$ warunek

$$R/\dot{x} / \dot{x} > 0$$

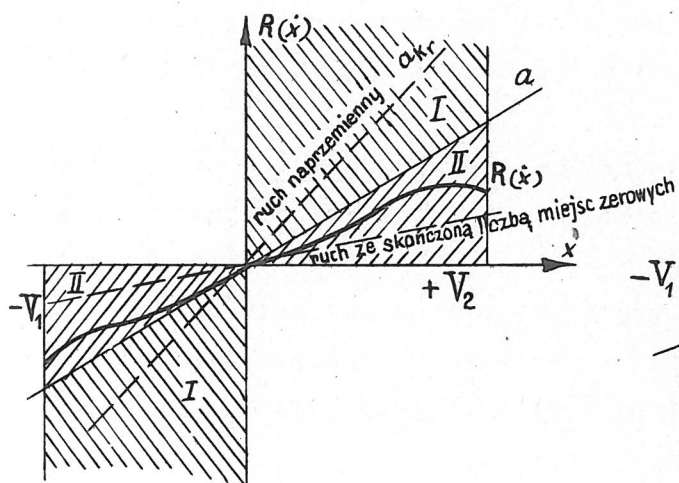
dowodzi się, że rozwiązanie równania /1/ ma następujące cechy: Istnieje w przedziale $/0, +\infty/$, jest ograniczone, jeżeli energia początkowa jest ograniczona, jest gasnąca oraz że miejsca zerowe wychylenia i prędkości przegradzają się wzajemnie.

Rozkładamy funkcję $R/\dot{x}/$ następująco

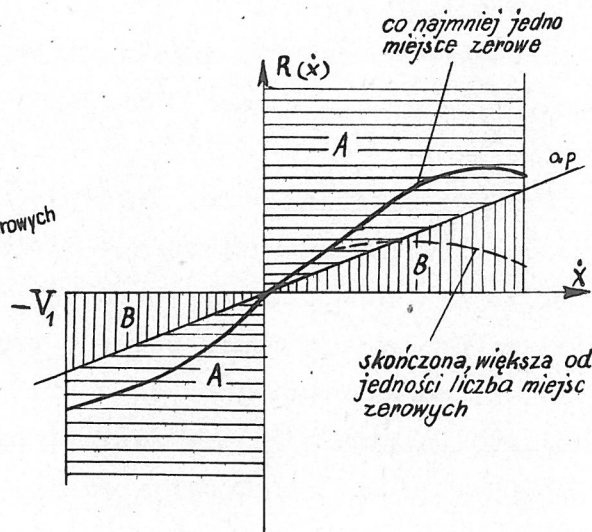
$$R/\dot{x}/ = \alpha \dot{x} + \varphi/\dot{x}/$$

przy czym funkcja $\varphi/\dot{x}/$ nie zawiera pierwszej potęgi \dot{x} . Dowodzi się, że ruch układu jest naprzemienny, to znaczy ma nieskończoną liczbę miejsc zerowych, jeżeli $\alpha < 2\omega$ oraz ma skończoną liczbę miejsc zerowych, jeżeli $\alpha \geq 2\omega$. Ustalono także kryterium pozwalające ocenić, czy liczba miejsc zerowych jest skończona i większa od jedności, czy też wynosi co najwyżej jedność. Uzyskane wyniki posłużyły do ustalenia kryteriów geometrycznych pozwalających na podstawie wykresu charakterystyki tłumienia ocenić, czy ruch będzie naprzemienny oraz czy liczba miejsc zerowych będzie co najwyżej równa jedności, czy większa od jedności. W tym celu na wykresie charakterystyki /rys. 2/ rysujemy prostą $y = \alpha \dot{x}/$, która wyznacza obszary I i II. Następnie rysujemy tzw. prostą krytyczną $a_{kr} /y = 2\omega \dot{x}/$. Jeżeli prosta krytyczna leży w obszarze I, to ruch jest naprzemienny, jeżeli w obszarze II, to ruch ma skończoną liczbę

miejsce zerowych. W tym drugim przypadku wrysowujemy na wykresie /rys.3/ prostą pomocniczą a_p ($y = (\alpha - \omega) \dot{x}$), która wyznacza obszary A i B. Jeżeli charakterystyka leży całkowicie w obszarze A, to ruch ma co najwyżej jedno miejsce zerowe, jeżeli przechodzi do obszaru B, to ruch ma więcej niż jedno miejsce zerowe. W pracy podano przykłady zastosowania tych kryteriów.



Rys. 2



Rys. 3

Tadeusz Puchałka

ZAGADNIENIA ANALIZY I SYNTEZY UKŁADÓW REGULACYJNYCH W ŚWIETLE OGÓLNEJ TEORII DRGAŃ

Podstawą analizy i syntezy liniowych układów regulacyjnych jest znajomość analitycznej postaci przepustowości operatorowej /funkcji przejścia/ danego układu regulacyjnego. W przypadku nieliniowych układów regulacyjnych stosujemy najczęściej aproksymacyjne metody analityczne jak np. metodę funkcji zastępczej, metodę równań całkowych /w szczególności równań typu Lalesco/, metodę pierwszej harmonicznej /bilansu harmonicznego/, metodę perturbacyjną /małego parametru/, metodę iteracyjną, metody linearyzacyjne oraz metody graficzne i grafoanalityczne. Teoria jakości regulacji /w szczególności synteza optymalnych układów

regulacyjnych/ ma ścisłe powiązanie z ogólną teorią drgań. W referacie autor analizuje na gruncie analizy funkcjonalnej /rachunku wariacyjnego/ zagadnienie minimum błędu w układzie samoczynnej regulacji. Wielkość dynamicznego błędu w układzie samoczynnej regulacji związana jest z charakterem procesu przejściowego sygnału wyjściowego układu regulacyjnego, a więc tym samym z charakterem drgań wymuszonych parametru wyjściowego tego układu.

Współczesne badania naukowe układów automatycznej regulacji /przede wszystkim nieliniowych/ w znacznej mierze oparte są na topologii algebraicznej.

W końcu referatu autor dokonuje analizy drgań /procesów przejściowych/ dwóch elektrycznych elementów nieliniowych: 1 - silnika synchronicznego trójfazowego zasilanego ze sztywnej sieci, 2 - obcowzbudnego, nieobciążonego generatora prądu stałego pracującego w całym zakresie charakterystyki magnesowania. W pierwszym przykładzie rozważania oparto na metodzie linearyzacyjnej, w drugim, na metodzie iteracyjnej.

Janisław Skowroński
Stefan Ziemia

ZAGADNIENIE STANU GRANICZNEGO RUCHU SILNIE NIELINIOWYCH NIE-AUTONOMICZNYCH UKŁADÓW DYSKRETNÝCH

W pracy rozważono układ mechaniczny przyjęty za dyskretny, którego ruch zapisano w postaci ogólnej równaniami:

$$\ddot{q}_i = F_i / q_s, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t/ \quad i = 1, \dots, n$$

przy odpowiednich warunkach początkowych w przestrzeni konfiguracji albo odpowiednimi równaniami normalnymi w przestrzeni fazowej układu.

Założono przy tym całkowicie dodatnią dysypację energii w układzie oraz ograniczoność mocy źródła wymuszeń. W oparciu o udowodnioną poprzednio przez autorów ograniczoność ruchu w przestrzeni fazowej dla tego typu układów w pracy uzasadnia się - przy wymienionych założe-

niach zbieżności dla $t \rightarrow \infty$ dwóch dowolnych krzywych całkowych równań normalnych w przestrzeni $\mathbb{E}^{2n+1} \{x_1, \dots, x_{2n}, t\}$ przy pomocy kryteriów dostatecznych T. Yoshiawy oraz wykazuje się dążenie rozwiązań /wszystkich/ do pewnego domkniętego zbioru w tej przestrzeni, który został zdefiniowany jako stan graniczny ruchu układu w sensie technicznym w odróżnieniu od pojęcia stanu granicznego w sensie ścisłym.

Roman Solecki
W a r s z a w a

ROZWIĄZANIE OGÓLNE PŁYTY O KSZTAŁCIE TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO ZA POMOCĄ TRANSFORMACJI WŁAŚCIWEJ

Tematem pracy jest rozwiązanie płyty o kształcie trójkąta prostokątnego spoczywającej na winklerowskim podłożu sprężystym, poddanej działaniu sił równomiernie rozłożonych wzdłuż obwodu i leżących w jej płaszczyźnie i wykonującej ponadto drgania harmoniczne. Zakładamy, że warunki brzegowe są liniowe i ciągłe.

Obieramy schemat podstawowy, którym jest płyta o kształcie trójkąta prostokątnego swobodnie podparta wzdłuż obwodu i wykonująca drgania własne nietłumione. Zakładamy, że rozwiązanie tak sformułowanego problemu jednorodnego /czyli funkcja właściwa/ jest znane. Określamy transformację właściwą jako przypadek transformacji ogólnej Fouriera /1/ /2/, której jądrem jest wspomniana funkcja właściwa.

Równanie różniczkowe opisujące amplitudy drgań układu rzeczywistego poddajemy transformacji. By uzależnić transformatę amplitudy ugięcia płyty od wielkości brzegowych równych zeru w schemacie podstawowym /tzn. od ugięć i momentów zginających występujących wzdłuż obwodu/, wprowadzamy pomocniczy układ współrzędnych prostokątnych taki, że jedna z osi leży na kierunku przeciwprostokątnej.

Otrzymane po retransformacji równanie powierzchni odkształconej nie zawiera - prócz warunku ciągłości i liniowości - żadnych ograniczeń dotyczących warunków brzegowych, jest przeto rozwiązaniem ogólnym.

By nadać mu znaczenie praktyczne, należy ograniczyć się do takich płyt, dla których znane są równania funkcji właściwych.

Są to:

a/ płyta trójkątna $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ /3/ oraz

b/ płyta trójkątna $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ /4/ /5/.

W obu przypadkach udaje się przekształcić szeregi wyrażające rozwiązania ogólne do prostej postaci podwójnych szeregów Fouriera według sinusów. Dla przykładu podaje się następujące rozwiązanie dotyczące drgań swobodnych i stateczności:

ad a/ płyta wzdłuż obwodu całkowicie utwierdzona

ad b/ płyta utwierdzona wzdłuż dłuższej przyprostokątnej, na pozostałych krawędziach swobodnie podparta. Obydwa rozwiązania wyrażają się w postaci nieskończonego układu liniowych jednorodnych równań algebraicznych o nieskończonej liczbie nieznanymi współczynnikami.

Zastosowana w pracy metoda transformacji właściwej będąca uogólnieniem metody podanej przez P. W i l d e g o /6/ jest prostym środkiem uzyskiwania rozwiązań ogólnych obszernej klasy problemów brzegowych teorii sprężystości.

P i ś m i e n n i c t w o

1. I.N. Sneddon, „Fourier Transforms” McGraw-Hill 1951
2. R.V. Churchill, „Operational Mathematics” McGraw-Hill 1958
3. Z. Kączkowski, „Drgania swobodne i wyboczenie płyty trójkątnej” AMS VIII, 2, 1956, s. 13
4. H. Schaefer, A. Havers, „Die Eigenschwingung der in ihrer Ebene gleichmässig belasteten gleichseitigen Dreiecksplatte” ING. - ARCH. 7, 1936, s. 83
5. R. Solecki, „Drgania swobodne i wymuszone płyty trójkątnej”, ROZPR. INŻ. 1 /1960/
6. P. Wilde, „The General Solution for a Rectangular Orthotropic Plate Expressed by Double Trigonometric Series” AMS X, 5, 1958 s. 747

ZAGADNIENIE NAPRZEMIENNOŚCI RUCHU PEWNEGO UKŁADU AUTONOMICZNEGO

W pracy rozważono ruch mechanicznego układu autonomicznego

$$\ddot{x}_i = f_i / x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n /, \quad i = 1, \dots, n,$$

którego charakterystyki zewnętrzne sprężyste i tłumieniowe mogą być zarówno liniowe, jak i nieliniowe, zaś charakterystyki sprzężeniowe wyłącznie nieliniowe i nie zawierające wyrazów liniowych

$$f_i / x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n / = a_{ii} x_i + a_{i,i+n} \dot{x}_i + F_i / x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n /$$

Funkcje F_i są wielomianami zaczynającymi się od wyrazów co najmniej trzeciego stopnia.

Przy założeniu dodatniej dysypacji takiego układu oraz przy pewnych założeniach odnośnie współczynników wyrazów liniowych funkcji f_i podano w pracy warunki dostateczne naprzemienności wszystkich rozwiązań $x_i / t / / i = 1, \dots, n /$ w przedziale czasu $/ t_0, + \infty /$.

Jerzy Wilczkowski

O PEWNYM KRYTERIUM ZBIĘŻNOŚCI DWÓCH DOWOLNYCH RUCHÓW
SILNIE NIELINIOWYCH MECHANICZNYCH UKŁADÓW DYSKRETNÝCH

Artykuł dotyczy układów równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu typu

$$\ddot{x}_i + \phi_i / x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n / + \psi_i / x_1, \dots, x_n / = G_i / x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t /$$

$$i = 1, \dots, n$$

opisujących ruch silnie nieliniowych, nieautonomicznych mechanicznych układów dyskretnych o n stopniach swobody. Przekształcając ten układ równań na

$$\ddot{x}_i + \alpha \dot{x}_i + \omega^2 x_i = - \varphi_i / x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n / - \psi_i / x_1, \dots, x_n / + G_i / x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t /, \quad i = 1, \dots, n,$$

czyli

$$\ddot{x}_i + \alpha \dot{x}_i + \omega^2 x_i = f_i/x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t/, \quad i = 1, \dots, n,$$

autor dowodzi, że dowolne dwa rozwiązania x_i, \bar{x}_i , tj. startujące z dowolnych różnych warunków początkowych

$$\begin{cases} x_i/t_0/ = x_i/0/ \\ \dot{x}_i/t_0/ = \dot{x}_i/0/ \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} \bar{x}_i/t_0/ = \bar{x}_i/0/ \\ \dot{\bar{x}}_i/t_0/ = \dot{\bar{x}}_i/0/ \end{cases}$$

są asymptotycznie zbieżne, o ile one istnieją, są ograniczone, oraz jeśli

$$\alpha - R_1 \leq \frac{\delta F_i}{\delta x_i} \leq \alpha - r_1$$

gdzie

$$\begin{cases} \delta F_i/t/ = \int_{t_0}^b f_i/x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t/ dt - \int_{t_0}^t f_i/\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dot{\bar{x}}_1, \dots, \dot{\bar{x}}_n, t/dt, \\ \delta x_i = x_i - \bar{x}_i \\ R_1, r_1 - \text{dowolne stałe dodatnie.} \end{cases}$$