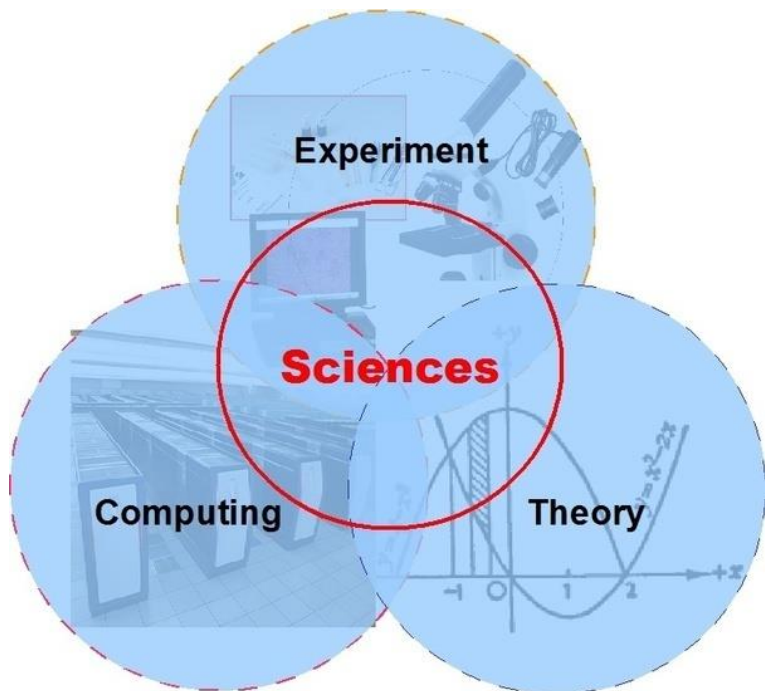


# **WPROWADZENIE DO METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH (MES)**

**Tomasz Stręk**  
Institute of Applied Mechanics,  
Poznan University of Technology  
ul. Jana Pawła II 24, 60-965 Poznan, Poland  
Room 438  
[www.strek.h2g.pl](http://www.strek.h2g.pl)



## METODA - TERMIN

Angielski termin **the finite element method** jest w polskiej literaturze tłumaczony dwojako:

- w analizie numerycznej używa się formy „**metoda elementu skończonego**” (wiernie oddającej treść angielską),
- w naukach inżynierskich przyjęło się stosować nazwę „**metoda elementów skończonych**”.

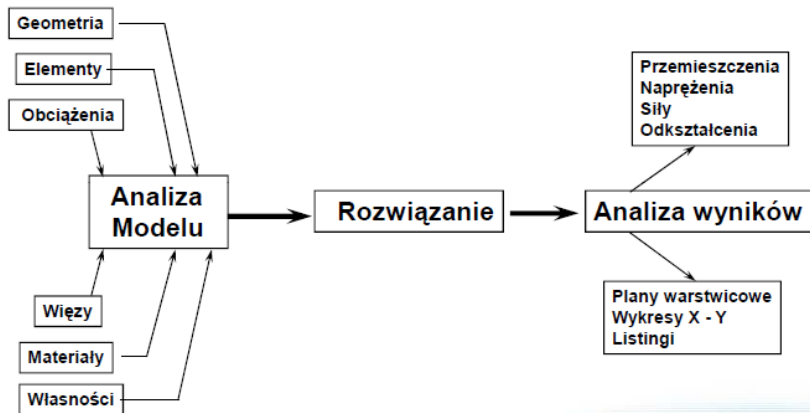
Ta druga forma nawiązuje do tytułu polskiego tłumaczenia klasycznego podręcznika prof. Olgierda Zienkiewicza.

O. C. Zienkiewicz, Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.

O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, P. Nithiarasu, The Finite Element Method for Fluid Dynamics, Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2014 (ISBN: 978-1-85617-635-4)

**MES (Metoda Elementów Skończonych)** jest jednym z podstawowych narzędzi komputerowego wspomagania badań naukowych i analiz inżynierskich, o bardzo szerokim zakresie zastosowań i dużej popularności.

**Znajomość MES obejmuje** wiedzę z różnych dziedzin zastosowań (działy fizyki, mechanika konstrukcji, itp.), wiedzę matematyczną dotyczącą podstaw oraz wiedzę informatyczną o realizacji na sprzęcie komputerowym.



## MES W FORMIE PROSTEJ I ŚCISLEJ

Metoda Elementów Skończonych jest metodą aproksymacji (czyli otrzymywania rozwiązań przybliżonych) równań różniczkowych cząstkowych (RRC).

Równania różniczkowe stanowią model matematyczny, najczęściej jakiegoś procesu lub stanu układu fizycznego.

Proces lub stan opisywane są za pomocą parametrów będących funkcjami położenia w przestrzeni i ewentualnie czasu. RRC opisują zależności między tymi funkcjami oraz ich pochodnymi.

Znalezienie rozwiązania RRC to znalezienie tych funkcji, stanowiących funkcje niewiadome dla konkretnego zagadnienia.

## **PROCESY ZASTOSOWNIA MES**

Zastosowanie MES do rozwiązania konkretnego zadania naukowego lub inżynierskiego składa się z dwóch odrębnych procesów:

- a) stworzenia modelu obliczeniowego
- b) rozwiązania konkretnego zadania za pomocą uzyskanego modelu.

## **STWORZENIE MODELU OBLICZENIOWEGO MES**

Stworzenie modelu dokonywane jest najczęściej przez fizyków, inżynierów, matematyków. Polega na wyborze lub stworzeniu modelu matematycznego w postaci RRC i przekształceniu do tzw. sformułowania MES.

Sformułowanie MES dla pewnego typu problemów składa się z dwóch elementów:

- równania całkowego związanego z RRC;
- definicji z jakich funkcji konstruowane będzie rozwiązanie przybliżone.



## OBSZAR I WARUNKI

Każde zadanie MES określane jest dla pewnego fizycznego obiektu lub grupy obiektów zajmujących miejsce w przestrzeni. To zajmowane miejsce, czyli obszar w którym zdefiniowane są RRC nazywane jest **obszarem obliczeniowym**.

Każdy taki obszar jest skończony, a więc posiada **brzeg**.

Elementem modelu matematycznego zjawiska, oprócz RRC, które określają zachowanie funkcji niewiadomych wewnątrz obszaru obliczeniowego, są także dodatkowe równania określające zachowanie funkcji niewiadomych na brzegu (**warunki brzegowe**).

Także te równania ujmowane są w sformułowaniu MES.

## **ISTOTA MES**

Istotą MES jest sposób aproksymacji RRC polegający na podziale obszaru obliczeniowego na małe podobszary o prostych kształtach, zwane elementami skończonymi oraz specjalny sposób konstruowania funkcji aproksymujących opierający się na funkcjach zdefiniowanych w elementach skończonych.

MES jako jedna z niewielu metod potrafi modelować zjawiska w skomplikowanych obszarach obliczeniowych, co stanowi jedną z jej podstawowych zalet w zastosowaniach praktycznych.

W elementach skończonych definiuje się proste funkcje, najczęściej funkcje liniowe lub wielomiany niskiego stopnia, zwane funkcjami kształtu. Elementem sformułowania MES jest określenie w jaki sposób z funkcji kształtu konstruuje się funkcje aproksymujące rozwiązanie.

## KONSTRUKCJA FUNKCJI APROKSYMUJĄCYCH

rozwiązanie przebiega w dwóch etapach

**Pierwszy etap:** z funkcji kształtu określonych w pojedynczych elementach konstruuje się funkcje określone w całym obszarze obliczeniowym (będącym sumą elementów).

Proces ten można określić jako sklejanie wielu funkcji w małych podobzarach w jedną funkcję w całym podoobszarze – te funkcje określane w całym obszarze nazywane są funkcjami bazowymi

**Drugi etap:** definiuje się w jaki sposób ostateczne rozwiązanie ma być otrzymywane z funkcji bazowych.

Zasada jest tutaj prosta, rozwiązanie przybliżone MES jest kombinacją liniową funkcji bazowych (czyli sumą ze współczynnikami różnymi dla każdej funkcji).

**Zbiór wszystkich możliwych kombinacji liniowych funkcji bazowych stanowi zbiór wszystkich możliwych rozwiązań przybliżonych danego problemu, czyli stanowi przestrzeń funkcji, w której poszukiwane jest rozwiązanie konkretnego zadania.**

Współczynniki występujące w kombinacji liniowej dla aproksymowanej funkcji stanowią zbiór liczb.

Znając ten zbiór liczb oraz definicje funkcji bazowych można uzyskać rozwiązanie przybliżone danego problemu w dowolnym punkcie obszaru obliczeniowego.

Mówi się, że **MES jest metodą dyskretyzacji**, czyli uzyskiwania rozwiązania w postaci dyskretnej (a więc w postaci skończonego zbioru liczb), na podstawie którego można uzyskać rozwiązanie w dowolnym miejscu obszaru.

## DYSKRETNY ZBIÓR WARTOŚCI W WĘZŁACH

Często, dzięki odpowiednim definicjom funkcji kształtu i funkcji bazowych, **dyskretny zbiór liczb określających rozwiązanie MES to zbiór wartości w wybranych punktach obszaru obliczeniowego, zwanych węzłami.**

Wtedy można powiedzieć, że MES jest metodą uzyskiwania rozwiązania w wybranych punktach obszaru obliczeniowego, a następnie **interpolowania rozwiązania w pozostałych punktach obszaru za pomocą funkcji bazowych** (lub patrząc z punktu widzenia pojedynczego elementu funkcji kształtu).

## TRANSFORMACJA RÓWNANIA CAŁKOWEGO DO POSTACI UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH

**Co dzieje się z całkami z równania?** Teraz każdy współczynnik macierzy układu równań liniowych, nazywanej w MES tradycyjnie macierzą sztywności, jest sumą odpowiednich całek.

Całki odpowiadają początkowemu układowi RRC, są zdefiniowane dla całego obszaru obliczeniowego, ale oblicza się je jako sumę całek po elementach. Odpowiednie definicje funkcji bazowych powodują, że w otrzymanym układzie równań liniowych zdecydowana większość wartości to zera (niekiedy udział zer może przekraczać 99,99%).

To czy dany element macierzy układu jest zerem czy nie, wiadomo na podstawie definicji elementów i funkcji kształtu, dlatego znając te definicje, z góry wiadomo, które wyrazy macierzy są zerami, a które nie. Wyrazów zerowych nie oblicza się.

**Rozwiązanie zadania za pomocą MES sprowadza się więc do rozwiązania najczęściej wielkiego, rzadkiego układu równań liniowych.**

To właśnie ten fakt, że macierz układu równań liniowych w MES jest tak rzadka powoduje, że MES jest atrakcyjna z obliczeniowego punktu widzenia.



## **Rozwiązanie konkretnego zadania MES**

Stworzenie modelu obliczeniowego MES jest zadaniem realizowanym, jak to było już powiedziane, przez matematyków, inżynierów, fizyków dla konkretnych grup zadań.

Model w postaci równania całkowego i definicji przestrzeni funkcji aproksymujących jest równoważny modelowi w postaci sposobu konstrukcji układu równań liniowych MES.

Ta druga postać lepiej nadaje się do tworzenia algorytmów numerycznych i jest podstawową postacią wykorzystywaną przy tworzeniu programów MES.

Często definicje elementów i funkcji kształtu są tak proste, że udaje się wyliczyć całki tworzące wyrazy macierzy sztywności, w zależności od pewnych parametrów elementów, i podać gotowe wzory na wyrazy macierzy sztywności.

Przyjmować będziemy, że końcowym etapem tworzenia modelu MES jest podanie algorytmicznego przepisu na tworzenie układu równań liniowych odpowiadających sformułowaniu MES.

Otrzymany model MES zazwyczaj ma zastosowanie do pewnej grupy problemów. Na jego podstawie tworzone są programy komputerowe, które realizują model w konkretnych obliczeniach.

## **Etapy realizacji:**

- wybór modelu (*każdy program MES oferuje zazwyczaj kilka modeli MES, odpowiadających konkretnym RRC i warunkom brzegowym*);
- definicja obszaru obliczeniowego i podział obszaru na elementy (*w programach MES mogą pojawiać się rozmaite elementy jedno, dwu i trójwymiarowe*);
- definicja przestrzeni, w której poszukiwane są funkcje niewiadome czyli wybór aproksymacji (*programy MES mogą oferować rozmaite zestawy funkcji kształtu dla elementów i funkcji bazowych w całym obszarze obliczeniowym*);
- określenie parametrów modelowanego procesu (*najczęściej parametry te związane są ze współczynnikami RRC i warunków brzegowych, w praktyce odpowiadają np. parametrom materiałów w modelowanych obiektach, zasadom interakcji obiektów ze światem zewnętrznym, itp.*).

## PRE-PROCESSING

Bardzo istotnym elementem w praktyce jest zdefiniowanie obszaru obliczeniowego oraz jego podziału na elementy.

Etap ten, zwany **pre-processingiem**, w przypadku skomplikowanych obszarów obliczeniowych może zająć wiele czasu i wysiłku, może wymagać współpracy z urządzeniami pomiarowymi, oprogramowaniem CAD, odrębnymi programami generowania siatek MES.

Raz zdefiniowana siatka MES może być używana przy rozwiązaniu szeregu zadań dla tego samego obiektu.

## PROCESSING

Po pełnym zdefiniowaniu rozwiązywanego zadania uruchamiane są procedury obliczeniowe.

Ten etap nosi nazwę **processingu** i składa się z dwóch podstawowych faz:

- utworzenie układu równań liniowych
- rozwiązanie układu równań liniowych

Tworzenie układu równań liniowych odbywa się na podstawie przepisu stanowiącego model obliczeniowy MES.

Rozwiązanie układu równań liniowych następuje poprzez zastosowanie odpowiedniego algorytmu, czasem są to algorytmy ogólnego przeznaczenia, czasem metody specjalnie opracowane dla MES.

## WYNIK OBLICZEŃ

Efektem rozwiązania układu równań liniowych jest zbiór liczb, tworzących wektor niewiadomych (często, jak to było już wspomniane, jest to zbiór wartości w konkretnych punktach obszaru, np. wierzchołkach elementów).

Znając ten zbiór wartości oraz definicje funkcji kształtu w elementach można odtworzyć rozwiązanie przybliżone w całym obszarze obliczeniowym.

## POST-PROCESSING

Na podstawie rozwiązania przybliżonego można także obliczać inne parametry zjawiska. Takie obliczenia, a także wizualizacja rozwiązań i obliczonych na ich podstawie wielkości, są realizowane w etapie zwanym **post-processingiem**.

Także tutaj istnieją odrębne programy realizujące te funkcje.

Otrzymanie rozwiązania za pomocą programu MES nie powinno nigdy być końcem procedury rozwiązywania problemu.

Trzeba mieć świadomość, że uzyskany wynik prawie zawsze obarczony jest błędem.

Istnieje wiele możliwych źródeł błędu rozwiązania.

Najważniejsze to:

- błąd modelowania (*zastosowany model matematyczny nie odzwierciedla dokładnie rzeczywistości*);
- błąd wartości współczynników (*przyjęte wartości współczynników RRC i warunków brzegowych, czyli np. dane materiałowe, dane o interakcji obiektu ze światem zewnętrznym obarczone są błędem*);
- błąd odwzorowania obszaru (*obszar obliczeniowy nie odpowiada dokładnie rzeczywistemu obszarowi zajmowanemu przez analizowany obiekt*);
- błąd numeryczny (*błąd dyskretyzacji, zastosowana metoda aproksymacji wprowadza błąd w stosunku do rozwiązania dokładnego problemu wyjściowego w postaci RRC*);
- błąd zaokrąglenia (*ze względu na zastosowanie ograniczonej dokładności reprezentacji liczb w komputerze, rozwiązanie uzyskane programem komputerowym nie odpowiada rozwiązaniu przybliżonemu, które zostałyby otrzymane przy dokładnej reprezentacji liczb*).



## WERYFIKACJA WYNIKÓW

Po uzyskaniu rozwiązania wyniki należy poddać weryfikacji.

W przypadku **błędu modelowania mówimy o walidacji modelu.**

Model matematyczny jest opracowywany przez inżynierów, fizyków, matematyków.

Użytkownik programów MES powinien sprawdzić jak dobrze zastosowany przez niego model matematyczny odwzorowuje rzeczywistość, np. jak wiele osób dotychczas stosowało ten model, jakie uzyskały wyniki itp.

Z kolei błędy wartości współczynników i błąd odwzorowania obszaru należą do fazy przygotowania danych do rozwiązywanego problemu.

Matematyczna analiza sformułowania problemu może przynieść odpowiedź na pytanie

jak wrażliwy jest model na zmiany powyższych parametrów,  
w jaki sposób zmiany parametrów wpływają na zmianę rozwiązania,  
czy wiedząc, że informacje o danych i obszarze obciążone są pewnym  
błędem nadal możemy zakładać, że rozwiązanie MES wystarczająco  
dokładnie opisuje badane zjawisko.

Błąd odwzorowania obszaru może wynikać nie tylko z błędu danych wejściowych przy definicji problemu, może zostać wprowadzony w fazie dyskretyzacji obszaru, czyli generowania siatki MES.

Tutaj także analiza matematyczna zagadnienia może prowadzić do prób oszacowania jak duży jest błąd i w jaki sposób można go zmniejszyć.

Kolejnym typem błędu jest błąd numeryczny. MES jako metoda aproksymacji, w zdecydowanej większości zastosowań (poza niezwykle prostymi zadaniami) prowadzi do błędu dyskretyzacji.

Błąd dyskretyzacji możemy określić jako różnicę rozwiązania dokładnego RRC i przybliżonego rozwiązania MES. W teorii MES bada się jaka jest zależność błędu numerycznego od sformułowania MES i parametrów rozwiązania, takich jak np. maksymalna wielkość elementów w siatce MES lub stopień wielomianów przyjętych jako funkcje kształtu.

Błąd dyskretyzacji związany jest z zamianą rozwiązania dokładnego z przestrzeni nieskończenie wymiarowej, na rozwiązanie z przestrzeni skończenie wymiarowej, czyli rozwiązanie, które daje się przedstawić w postaci skończonej liczby wartości, np. wartości rozwiązania w węzłach siatki MES.

## ADAPTACJA ZADANIA

Teoria dostarcza także informacji jak dla konkretnego zadania poprawić rozwiązanie.

Mówimy wtedy o **adaptacji zadania**, polegającej najczęściej na modyfikacji siatki lub doboru funkcji kształtu.

Ich zastosowanie polega najczęściej na wstępnym rozwiązaniu zadania, oszacowaniu popełnionego błędu numerycznego, a następnie modyfikacji zadania i ponownym rozwiązaniu.

Informacje o procedurach szacowania błędu oraz procedurach modyfikacji zadania (siatki i aproksymacji) powinny znajdować się w dokumentacji programu MES.

Ich znajomość jest często warunkiem koniecznym uzyskiwania wiarygodnych i dokładnych wyników za pomocą MES.

Ostatni typ błędu, błąd zaokrągleń jest specyficzny dla komputerowej realizacji algorytmów MES.

Użytkownik powinien mieć świadomość, w których momentach obliczeń mogą pojawić się błędy zaokrągleń, jak bardzo są one istotne dla dokładności wyników i czy istnieją alternatywne algorytmy unikające tych błędów. Informacje takie powinny także znaleźć się w podręczniku użytkownika programu komputerowego MES.

## MES W MECHANICE CIAŁA STAŁEGO

Zastosowanie MES w mechanice oparte jest na poniższym **równaniu macierzowym**:

$$[\mathbf{M}][\mathbf{u}'' ] + [\mathbf{C}][\mathbf{u}' ] + [\mathbf{K}][\mathbf{u}] = [\mathbf{F}]$$

gdzie:

$[\mathbf{M}] = \text{suma}([\mathbf{m}])$  - macierz bezwładności układu elementów skończonych równa sumie macierzy bezwładności poszczególnych elementów;

$[\mathbf{C}] = \text{suma}([\mathbf{c}])$  - macierz tłumienia układu elementów skończonych równa sumie macierzy tłumienia poszczególnych elementów;

$[\mathbf{K}] = \text{suma}([\mathbf{k}])$  - macierz sztywności układu elementów skończonych równa sumie macierzy sztywności poszczególnych elementów;

**[u'']** - macierz kolumna przyspieszeń poszczególnych węzłów układu;

**[u']** - macierz kolumna prędkości poszczególnych węzłów układu;

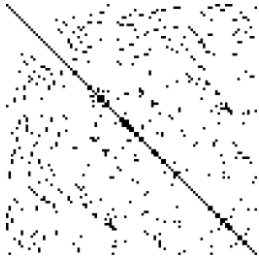
**[u]** - macierz kolumna przemieszczeń poszczególnych węzłów układu;

**[F]** - macierz kolumna sił przyłożonych do ciała w węzłach układu elementów skończonych.



## MACIERZ RZADKA

Każdy element sąsiaduje tylko z kilkoma innymi elementami, dlatego też macierz wynikowa (a więc i układ równań do rozwiązania) jest bardzo rzadka. Z jednej strony powoduje to ułatwienie w postaci szybszego rozwiązania problemu, ale z drugiej wymaga specjalnych procedur zapewniających zbieżność rozwiązania.



Przykład rzadkiej macierzy MES.

**Na podstawie:**

Krzysztof Banaś, Wprowadzenie do MES, 24 października 2012

Źródło:

[http://www.metal.agh.edu.pl/~banas/wprowadzenie do MES.pdf](http://www.metal.agh.edu.pl/~banas/wprowadzenie_do_MES.pdf)

<https://docplayer.pl/8791640-Wprowadzenie-do-mes-krzysztof-banas-24-pazdziernika-2012.html>