

Metoda Elementów Skończonych

Tomasz Stręk
Institute of Applied Mechanics,
Poznan University of Technology
ul. Jana Pawła II 24, 60-965 Poznan, Poland
Room 438
www.strek.h2g.pl

DATE: 2020.05

Uogólniona koncepcja elementów skończonych

Symulacje komputerowe wymagają stosowania metod numerycznych do rozwiązywania układów cząstkowych równań różniczkowych określonych na obszarach o skomplikowanych geometriach. Na brzegach tych obszarów zdefiniowane są odpowiednie warunki brzegowe, a w przypadku zagadnień zależnych od czasu w rozważanym obszarze również warunki początkowe.

Co prawda rośnie wydajność obliczeniowa stosowanych komputerów, ale jednocześnie modeluje się i rozwiązuje coraz bardziej skomplikowane zagadnienia. Wymaga to rozwoju nie tylko sprzętu, ale również oprogramowania, co wiąże się między innymi z opracowywaniem efektywniejszych metod i algorytmów.

Z matematycznego punktu widzenia metody objętości skończonej [Hym1992], różnic skończonych [Hil1968], elementów brzegowych [Kan1994, Bur1995, Ban1994], czy też metoda elementów skończonych [Zie2000] są ze sobą blisko powiązane i trudno jest zdecydować, która z nich ma zdecydowaną przewagę nad pozostałymi. Podstawową zaletą tych metod jest możliwość uzyskania rozwiązań dla skomplikowanych kształtów, dla których niemożliwe jest przeprowadzenie obliczeń analitycznych.

Każda z metod oparta na dyskretyzacji przestrzennej ma swoje zalety, jak i wady.

Podobnie jest z doskonalonymi w ostatnim czasie metodami bezsiatkowymi [Liu2003, Fas2007]. Wymieniając metody rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, wspomnieć należy również o metodzie kolokacji brzegowej, należącej do grupy metod brzegowych. Metoda ta może być rozpatrywana jako jeden z wariantów metody Trefftza, w której równanie różniczkowe rządzące zjawiskiem jest spełnione ściśle (przez przyjętą postać funkcji próbnych), a warunki brzegowe są spełnione w sposób przybliżony [Tre1926]. Jednym ze sposobów uzyskania przybliżonego spełnienia jest metoda kolokacji brzegowej. W pracy [Kol2001] zaprezentowano przegląd prac

dotyczących zastosowania metody kollokacji brzegowej do rozwiązywania problemów mechaniki stosowanej.

Obecnie metoda elementów skończonych (MES) jest szeroko stosowana w rozwiązywaniu zadań wynikających z praktycznych problemów przemysłowych. W tym rozdziale zawarte jest krótkie wprowadzenie do metody elementów skończonych. Przedstawione są również sposoby badania oraz kontroli stabilności rozwiązań numerycznych z wykorzystaniem MES. Sposoby te można wykorzystać również w innych metodach siatkowych.

W latach pięćdziesiątych XX wieku zaczęto do rozwiązywania praktycznych zagadnień technicznych wykorzystywać metodę różnic skończonych. W późniejszych latach równie skutecznie stosowano metodę elementów skończonych. Szczegółowa teoria metody elementów skończonych została opisana w licznej literaturze, np. [Hue1975, Zienkiewicz2000, Zienkiewicz2013-2014]. Trzytomowa pozycja literaturowa Zienkiewicza i współautorów jest uznana za jedną z najważniejszych książek w tematyce metody elementów skończonych [Zienkiewicz].

Jedną z cech decydujących o przewadze metody elementów skończonych nad metodą różnic skończonych jest względna łatwość uwzględniania w obliczeniach warunków brzegowych rozwiązywanych zagadnień [Bur1985]. Wiele rzeczywistych problemów charakteryzuje się warunkami brzegowymi wyrażonymi za pomocą wyznaczanych wielkości oraz nieregularnymi i skomplikowanymi kształtami brzegów obszaru. Powoduje to, że aplikacja warunków brzegowych w metodzie różnic skończonych jest dosyć kłopotliwa. Wymaga bowiem aproksymacji tych warunków na węzłach siatki. Algorytmy oparte na metodzie elementów skończonych są uniezależnione od postaci szczegółowych warunków brzegowych.

Sposoby formułowania metody elementów skończonych

Problemy fizyki stosowanej występujące w technice można badać jednym z dwu sposobów. W pierwszym zadane są równania różniczkowe opisujące zachowanie się typowego nieskończenie małego obszaru. W drugim postuluje się ważność w całym badanym obszarze wariacyjnej zasady ekstremalnej. Poprawnym rozwiązaniem problemu jest takie rozwiązanie, które minimalizuje pewna wielkość \mathcal{F} , zdefiniowaną przez odpowiednie całkowanie poszukiwanych wielkości po całym obszarze. Taka wielkość całkowita \mathcal{F} , będąca funkcją nieznanych funkcji, nosi nazwę funkcjonału. Oba te sposoby są matematycznie równoważne, a dokładne rozwiązanie jednego zagadnienia jest rozwiązaniem drugiego.

Ogólny problem wariacyjny

Założmy, że matematyczne sformułowanie zadania wymaga minimalizacji funkcjonału \mathcal{F} w pewnym obszarze \mathcal{F} jest zdefiniowana jako pewna całka w obszarze V i na części jego brzegu S , w którym istnieje nieznana funkcja $\{\phi\}$ oraz jej pochodne:

$$\mathcal{F} = \int_V f \left(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x} \{\phi\}, \dots \right) dV + \int_S g \left(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x} \{\phi\}, \dots \right) dS. \quad (\text{X.1})$$

Dzielimy obszar na mniejsze części (podobszary), które nazywamy elementami, i niech funkcja, którą chcemy znaleźć, będzie w każdym elemencie opisana przez

$$\{\phi\} = [N]\{\Phi\}^e. \quad (\text{X.2})$$

W równaniu tym $\{\Phi\}^e$ może być zbiorem wartości w węzłach funkcji związanej z elementem lub zbiorem pewnych jego charakterystycznych parametrów. Funkcja $\{\phi\}$ może być wektorem, a $[N]$ jest zestawieniem funkcji kształtu, będących funkcjami współrzędnych.

W celu zminimalizowania funkcjonału \mathcal{F} względem wszystkich parametrów $\{\Phi\}$ występujących w całym obszarze, należy napisać układ równań

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \{\Phi\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi_1} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi_2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (\text{X.3})$$

Jeżeli całkowity funkcjonal jest sumą składników pochodzących od poszczególnych elementów, tj. $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}^e$, wówczas typowe równanie przybiera postać

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi_n} = \sum \frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial \Phi_n}, \quad (\text{X.4})$$

gdzie sumowanie należy wykonać po wszystkich elementach. W ten sposób otrzymujemy regułę budowania całego minimalizującego układu równań.

W szczególnym przypadku, gdy \mathcal{F} jest funkcjonałem formy kwadratowej od $\{\phi\}$ i jej pochodnych, możemy zawsze zapisać pochodne dla określonego elementu e jako

$$\frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial \{\Phi\}^e} = [\mathbf{k}]^e \{\Phi\}^e + \{\mathbf{F}\}^e, \quad (\text{X.5})$$

gdzie $[\mathbf{k}]^e$ i $\{\mathbf{F}\}^e$ są macierzami stałych.

Minimalizujący układ równań możemy zapisać jako

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \{\Phi\}} = [\mathbf{K}] \{\Phi\} + \{\mathbf{F}\} , \quad (\text{X.6})$$

gdzie

$$[\mathbf{K}_{ij}] = \sum [\mathbf{k}_{ij}]^e \quad (\text{X.7})$$

$$\{\mathbf{F}_i\} = \sum \{\mathbf{F}_i\}^e. \quad (\text{X.8})$$

W powyższych sumach sumowanie obejmuje wszystkie elementy. Aby uzyskać zbieżność wyników do dokładnych przy zwiększaniu gęstości podziału na elementy, aproksymacja funkcyjna wg. równania (X.1) musi spełniać pewne warunki kompletności. Po pierwsze, gdy maleją wymiary elementu, funkcje f i g z równania (X.1) muszą pozostawać jednoznaczne i ciągłe. Dlatego niezbędne jest spełnienie następujących kryteriów.

Kryterium 1. Funkcje kształtu $[N]$ powinny być takie, aby przy odpowiednim doborze $\{\Phi\}^e$ można było uzyskać każdą stałą wartość $\{\phi\}$ lub jej pochodnej, występującą w funkcjonale \mathcal{F} , jeżeli wymiary elementu dążą do zera.

Po drugie należy zachować ważność definicji sumowania. Na granicach między elementami wyrażenia takie jak f i g muszą pozostać na tych granicach skończone. Prowadzi to do następującego kryterium.

Kryterium 2. Funkcje kształtu $[N]$ powinny być dobrane tak, aby na powierzchniach styku elementów zarówno $\{\phi\}$ jak i jej pochodne o rząd niższe od występujących w funkcjach f i g , określających funkcjonał, były ciągłe.

Metoda residuów ważonych

Jedną z metod pozwalających rozwiązać cząstkowe równanie różniczkowe z określonymi warunkami brzegowymi i początkowymi jest metoda residuów ważonych (MRW). Jest to metoda numeryczna, która może być użyta do rozwiązania pojedynczego równania lub układu równań różniczkowych cząstkowych określonego na obszarze Ω z brzegiem $\delta\Omega = \Gamma$, a dokładne rozwiązanie reprezentuje jedną zmienną lub wektor kolumnowy zmiennych.

Zastosowanie tej metody składa się z dwóch kroków. W pierwszym zakłada się, że pewna funkcja w przybliżeniu (aproksymacyjnie) spełnia dane równanie różniczkowe oraz warunki brzegowe. Po podstawieniu tej funkcji aproksymującej do równania różniczkowego i warunków brzegowych można określić błąd spełnienia (dokładność aproksymacji) nazywany residuum. Wymagane jest, by residuum „znikała” (aby jego wartość była równa zero lub bliska zero) na rozważanym obszarze. Innymi słowy im mniejsza jest wartość residuum tym lepsza jest funkcja aproksymująca rozwiązanie. W drugim kroku rozwiązuje się dane równanie (lub równania) z warunkami brzegowymi wynikające z pierwszego kroku i tym samym można uzyskać rozwiązanie.

Rozważmy stacjonarne (niezależne od czasu) cząstkowe równanie różniczkowe

$$L(u) = f, \tag{5.1}$$

zdefiniowane w obszarze Ω wraz z warunkami brzegowymi określonymi na brzegu Γ . $L(u)$ określa operator różniczkowy, w którym znajdują się pochodne funkcji u do drugiego rzędu włącznie.

W metodzie residuów ważonych rozwiązanie u jest aproksymowane przez wyrażenie \bar{u} postaci

$$\bar{u} = S_0 + \sum_{j=1}^N u_j S_j \quad (5.2)$$

gdzie S_j są funkcjami próbnymi, a S_0 musi spełniać wszystkie określone warunki brzegowe zagadnienia ($S_0 = 0$, jeżeli wszystkie warunki są jednorodne) i S_j musi spełniać następujące warunki:

- S_j powinna być taka, aby $L(S_j)$ była dobrze zdefiniowana i niezerowa, to znaczy, aby istniały wymagane jej pochodne;

- S_j musi spełniać przynajmniej warunek brzegowy Dirichleta rozważanego zagadnienia;
- dla dowolnego N zbiór funkcji próbnych $\{S_j, j = 1, 2, \dots, N\}$ musi być liniowo niezależny.

Wprowadźmy pojęcie błędu lub residuum, R_Ω , aproksymacji (przez zastąpienie w równaniu szukanej funkcji jej przybliżeniem \bar{u}), które definiujemy jako

$$R_\Omega = L(\bar{u}) - f, \quad (5.3)$$

gdzie \bar{u} zawiera funkcje próbne oraz spełnia warunek brzegowy Dirichleta postaci $\bar{u} = u_0$ na fragmencie brzegu $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Im wartość residuum jest mniejsza tym aproksymacja rozwiązania jest lepsza. Zauważmy, że residua R_Ω jest funkcją współrzędnych punktu w obszarze Ω . Zminimalizujmy w miarę możliwości wartość residuum do zera.

Jeżeli wartość całki

$$\int_{\Omega} T_i R_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (5.4)$$

gdzie T_i , $i = 1, 2, \dots, M$ jest zbiorem dowolnych funkcji oraz $M \rightarrow \infty$, to można powiedzieć, że residuum R_{Ω} zanika (równa się zero). W tym wypadku T_i są nazywane funkcjami wagowymi.

W ogólnym przypadku nie muszą one być takie same jak funkcje próbne S_i . Po rozwinięciu powyższego równania otrzymujemy

$$\int_{\Omega} T_i(L(\bar{u}) - f) d\Omega = 0. \quad (5.5)$$

Funkcja \bar{u} , spełniająca powyższe równanie dla każdej funkcji T_i w obszarze Ω , jest rozwiązaniem słabym (ang. *weak solution*) równania różniczkowego. Mocne rozwiązanie (ang. *strong solution*) \bar{u} spełnia równanie różniczkowe w każdym punkcie obszaru Ω .

Kiedy operator L jest liniowy, równanie (5.5) można zapisać w postaci:

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} T_i L(S_j) d\Omega \right) u_j = \int_{\Omega} T_i (f - L(S_0)) d\Omega \quad (5.6)$$

lub w postaci macierzowej

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} u_j = f_i \quad (5.7)$$

gdzie

$$A_{ij} = \int_{\Omega} T_i L(S_j) d\Omega \quad (5.8)$$

oraz

$$f_i = \int_{\Omega} T_i (f - L(S_0)) d\Omega. \quad (5.9)$$

Zauważmy, że w ogólnym przypadku macierz \mathbf{A} nie jest symetryczna, czyli $A_{ij} \neq A_{ji}$.

MRW (dla przypadku, kiedy $T_i \neq S_i$) jest czasami nazywana również metodą **Petrova-Galerkina**. Metoda ta funkcjonuje pod różnymi nazwami w zależności od zastosowanych funkcji wagowych T_i . Poniżej przedstawiono w zarysie wybrane z nich.

Dla $T_i = S_i$ MRW znana jest jako **metoda Galerkina**. Kiedy operator L jest liniowy parzystego rzędu, metoda Galerkina redukuje się do metody Ritza. W tym przypadku macierz A jest symetryczna.

Metoda najmniejszych kwadratów polega na poszukiwaniu rozwiązania, gdzie współczynniki u_j otrzymuje się minimalizując całkę z kwadratu residuum:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \int_{\Omega} R_{\Omega}^2 d\Omega = 0 \quad (5.10)$$

lub

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R_{\Omega}}{\partial u_i} R_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (5.11)$$

Porównanie równań (5.11) i (5.4) pozwala stwierdzić, że $T_i = \frac{\partial R_\Omega}{\partial u_i}$.

Jeżeli operator L jest liniowy, równanie (5.5) przybiera postać:

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} L(S_i)L(S_j)d\Omega \right) u_j = \int_{\Omega} L(S_i)(f - L(S_0))d\Omega \quad (5.12)$$

co oznacza symetryczny układ równań (macierz \mathbf{A} jest symetryczna), a równanie wymaga tego samego rzędu różniczkowania co operator.

Metodą kollokacji poszukuje się przybliżonego rozwiązania \bar{u} przez przyrównanie residuum $R_\Omega = R_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ do zera w N wybranych punktach (kollokacyjnych) $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \dots, N$ w obszarze Ω :

$$R_\Omega(\mathbf{x}_i, u_j) = 0 \quad (5.13)$$

Wybór punktów \mathbf{x}_i ma kluczowe znaczenie w uzyskaniu dobrze uwarunkowanego układu równań liniowych oraz dokładnego rozwiązania zagadnienia.

Metoda kolokacyjna może być traktowana jako specjalny przypadek równania $\int_{\Omega} T_i R_{\Omega} d\Omega = 0$ dla $T_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, gdzie $\delta(\mathbf{x})$ jest funkcją delta Diraca:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \chi) d\Omega = f(\chi) \quad (5.14)$$

Metoda Couranta jest połączeniem metody Ritza oraz metody najmniejszych kwadratów (dla operatora liniowego). Z jej użyciem poszukuje się przybliżenia rozwiązania \bar{u} przez minimalizowanie funkcjonału kwadratowego:

$$I_p(\bar{u}) = I(\bar{u}) + \frac{\alpha}{2} \|L(\bar{u}) - f\|^2 \quad (5.15)$$

gdzie $I(\bar{u})$ jest funkcjonałem kwadratowym związanym z $L(u) = f$, gdy operator L jest liniowy, a α jest predefiniowanym parametrem. Stosowanie tej metody jest ograniczone dla operatorów, które dopuszczają sformułowanie funkcyjne.

PRZYKŁADY

Równanie Poissona

Rozważmy matematyczny problem rozwiązania równania różniczkowego Poissona

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + C = 0 \quad (\text{Y.1})$$

w pewnym obszarze V przy zadanych wartościach $\phi = \phi_0$ na granicy obszaru (jego brzegu).

Można wykazać, że matematycznie jest to równoważne znalezieniu funkcji ϕ spełniającej warunki brzegowe i minimalizującej całkę

$$\mathcal{F} = \iint_V \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - C\phi \right] dx dy. \quad (\text{Y.2})$$

Dla rozwiązania przybliżonego dzielimy nasz obszar na skończone elementy. W każdym z nich

$$\phi = [N]\{\Phi\}^e = [N_i, N_j, \dots] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (\text{Y.3})$$

gdzie $\{\Phi\}^e$ przedstawia zbiór parametrów, będących w tym przypadku po prostu wartościami ϕ w węzłach elementów.

W przypadku minimalizacji funkcjonału oraz zakładając, że $[N]$ jest zdefiniowane w taki sposób, iż zapewnia się ciągłość na stykach pomiędzy elementami, równanie definiujące sumowanie będzie wówczas spełnione.

Możemy rozpatrzyć typowy element. Podstawiając wzór na przybliżone rozwiązanie (Y.2) do funkcjonału \mathcal{F} określonego wzorem (Y.2) i całkując po powierzchni elementu, otrzymujemy:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial \phi_i} = \iint_{V^e} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - C \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} \right] dx dy = \quad (\text{Y.4})$$

$$= \iint_{V^e} \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j + \dots \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j + \dots \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} - c N_i \right] dx dy$$

lub

$$\frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial \{\boldsymbol{\Phi}\}^e} = [\mathbf{k}]^e \{\boldsymbol{\Phi}\}^e + \{\mathbf{F}\}^e, \quad (\text{Y.5})$$

gdzie

$$k_{ij} = \iint_{V^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Y.6})$$

$$F_i = - \iint_{V^e} C N_i dx dy. \quad (\text{Y.7})$$

Przy zadanym kształcie elementu i funkcjach kształtu można obliczyć powyższe współczynniki oraz określić zebrany układ równań. Następnie po podstawieniu warunków brzegowych rozwiązuje się liniowy układ równań otrzymując wynik czyli wartości w węzłach elementów.

Korzystając z teorii ważonych procesów residualnych równanie Poissona możemy zapisać jako:

$$\iint_V W_i \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + C \right] dx dy = 0. \quad (\text{Y.8})$$

gdzie $\phi = [\mathbf{N}]\{\mathbf{\Phi}\}^e$. W podanej powyżej postaci całka wymaga ciągłości pochodnych we wszystkich obszarach między elementami, aby uniknąć

nieskończonych wartości drugich pochodnych. Jeżeli chcemy ominąć to ograniczenie, możemy dokonać przekształcenia poprzez całkowanie przez części. Wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \iint_V W_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy \\
 &= \int_S \left| W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{SA}^{SB} dy - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy \\
 &=
 \end{aligned}
 \tag{Y.9}$$

$$= \oint_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x dS - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy.$$

gdzie l_x jest kosinusem kierunkowym normalnej zewnętrznej względem osi x, zaś całka S brana jest po całym brzegu obszaru. Stosując taki sam sposób całkowania drugiego wyrazu możemy napisać

$$\iint_V W_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dx dy = \oint_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y dS - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy \quad (\text{Y.10})$$

Ostatecznie residuum zapisujemy w postaci

$$\oint_S W_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y \right) dS$$
$$- \iint_V \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - W_i C \right) dx dy = 0 \quad (\text{Y.11})$$

przy czym musimy założyć ograniczenie na funkcje wagi W_i . Funkcja ta musi być zawsze ciągła.

Trzeba zauważyć, że w wyrażeniu na residuum całka powierzchniowa ma pewien sens fizyczny. Przedstawia ona w rzeczywistości ważoną całkę po brzegu z przepływem $\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}$, ponieważ

$$\oint_S W_i \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} l_y \right) dS = \int_S W_i \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} dS. \quad (\text{Y.12})$$

Prowadzi to do

$$\int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dS - \iint_V \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - W_i C \right) dx dy \quad (\text{Y.13})$$

$$= 0.$$

gdzie $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$ możemy zapisać jako $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi$.

Podstawiając za rozwiązanie przybliżone rozwiązanie postaci $\phi = [N]\{\phi\} = \sum_{j=1}^n N_j \phi_j$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \iint_V \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \phi_j dx dy - \iint_V W_i C dx dy \\
& = \int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dS.
\end{aligned}
\tag{Y.14}$$

Kontynuując rozwiązywanie problemu zastosujemy proces Galerkina, zgodnie z którym przyjmuje się funkcje wagi równe funkcjom kształtu, tj. $W_i = N_i$, co prowadzi do

$$\sum_{j=1}^n \iint_V \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \phi_j dx dy - \iint_V N_i C dx dy$$

(Y.15)

$$= \int_S N_i \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

Powyższe równanie stanowi układ równań z niewiadomymi ϕ_j , który zapisać możemy w postaci

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \phi_j = F_i + G_i \quad (\text{Y.16})$$

gdzie

$$k_{ij} = \iint_V \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad (\text{Y.17})$$

$$F_i = \iint_V c N_i dx dy, \quad (\text{Y.18})$$

$$G_i = \int_S N_i \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \quad (\text{Y.19})$$

W powyższym całka G_i wyznaczana jest tylko po zewnętrznych brzegach obszaru, gdzie znana jest wartość $\frac{\partial \phi}{\partial n}$. Całka ta nie wnosi nic do równań dla punktów leżących wewnątrz obszaru. Gdy punkt "i" znajduje się na jego brzegu,

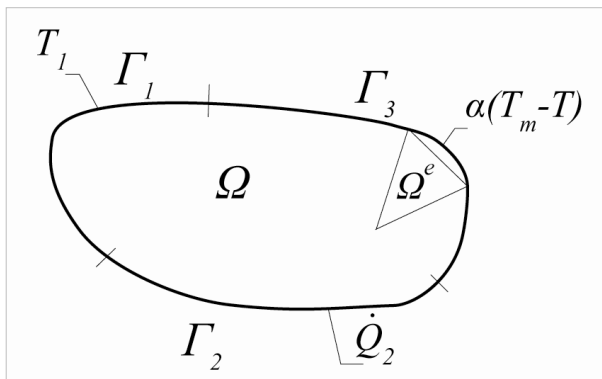
na którym zadano wartość ϕ_b , całka ta nie jest znana, natomiast zadane warunki brzegowe pozwalają uzyskać rozwiązanie dla wszystkich węzłowych wartości.

PRZYKŁAD

Rozwiązanie dwuwymiarowego ustalonego zagadnienia przewodzenia ciepła metodą elementów skończonych

Zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła przedstawionego na rysunku opisane jest następującym równaniem:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{Q} = 0 \quad \text{w obszarze } \Omega.$$



Rysunek 4.2 Schemat geometrii i warunków brzegowych

Warunki brzegowe I, II i III rodzaju dla powyższego zagadnienia sformułowane są następująco:

$$T(x, y) = T_1 \quad \text{na brzegu } \Gamma_1,$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) = \dot{Q}_2 \quad \text{na brzegu } \Gamma_2,$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) = \alpha(T_m - T) \quad \text{na brzegu } \Gamma_3,$$

gdzie T_m oznacza temperaturę otoczenia, \dot{Q}_2 to gęstość strumienia ciepła,

α – współczynnik wnikania, λ - współczynnik przewodzenia ciepła, n_x i n_y – składowe wektora kierunkowego normalnej do brzegu.

Rozpatrując pojedynczy element należący do obszaru Ω możemy aproksymować rozkład temperatury za pomocą następującej funkcji:

$$T^e(x, y) = \sum_{j=1}^M T_j^e \cdot N_j^e(x, y),$$

gdzie M odpowiada liczbie węzłów przyjętego elementu e , T_j^e oznacza temperaturę w węźle j elementu e , N_j^e to funkcja kształtu elementu e .

Stosując przedstawioną wcześniej metodę Galerkina, możemy zapisać:

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) + \dot{Q} \right) N_i^e(x, y) dx dy = 0.$$

Korzystając z twierdzenia Greena, otrzymujemy następującą zależność:

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} N_i^e \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} N_i^e \right) \right) dx dy =$$
$$= \int_{\Gamma^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} dy - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} dx \right) N_i^e.$$

Przekształcając lewą stronę równania otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) \right) N_i^e dx dy =$$

$$= - \int_{\Omega^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} dy - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} dx \right) N_i^e ,$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\dot{Q} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right),$$

i podstawiając do równania Galerkina otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right) dx dy =$$

$$= \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e dx dy + \int_{\Gamma^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} dy - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} dx \right) N_i^e.$$

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right) dx dy =$$

$$= \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e dx dy + \int_{\Gamma_2^e} \dot{Q}_2 N_i^e ds + \int_{\Gamma_3^e} \alpha (T_m - T_1) N_i^e ds,$$

gdzie

$$\dot{Q} ds = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x ds \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y ds \right).$$

Wprowadzając do powyższego równania (4.17) zależność (4.11) otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \sum_{j=1}^M \left(T_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) \right) + \left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \sum_{j=1}^M \left(T_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \right) \right) dx dy =$$

$$= \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e dx dy + \int_{\Gamma_2^e} \dot{Q}_2 N_i^e ds - \int_{\Gamma_3^e} \alpha \sum_{j=1}^M (T_j^e N_j^e) N_i^e ds + \int_{\Gamma_3^e} \alpha T_m N_i^e ds.$$

Powyższe równanie można sprowadzić do algebraicznego układu równań postaci:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}.$$

W klasycznej metodzie elementów skończonych macierz \mathbf{K} zwykle nazywa się macierzą sztywności, zaś w przypadku zagadnień przewodnictwa ciepła spotyka się również określenie: macierz przewodności. Wektor \mathbf{a} reprezentuje rozwiązanie, zaś \mathbf{f} - wektor obciążeń.

Poszczególne elementy równania macierzowego (4.19) przedstawiają się następująco:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c^e + \mathbf{K}_{\Gamma_3}^e,$$
$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_q^e + \mathbf{f}_{\Gamma_2}^e + \mathbf{f}_{\Gamma_3}^e,$$

gdzie:

$$K_{c,ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \right) dx dy,$$

$$K_{\Gamma_3,ij}^e = \int_{\Gamma_3^e} \alpha N_i^e N_j^e ds,$$

$$f_{q,i}^e = \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e dx dy,$$

$$f_{\Gamma_2,i}^e = \int_{\Gamma_2^e} \dot{Q}_2 N_i^e ds,$$

$$f_{\Gamma_3,i}^e = \int_{\Gamma_3^e} \alpha T_m N_i^e ds.$$

MES w modelowaniu pól przestrzennych

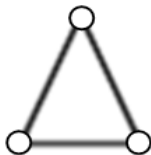
Rozwiązanie zadania z mechaniki polega na wypisaniu układu równań wynikających z podstawowych praw mechaniki oraz pewnych założeń teoretycznych. Następnie przekształca się taki układ równań w taki sposób aby otrzymać rozwiązania.

Dotyczy to układów równań statycznie wyznaczalnych czyli takich gdzie liczba niewiadomych równa się liczbie równań.

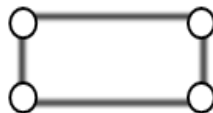
W przypadkach układów statycznie niewyznaczalnych czyli gdy liczba niewiadomych przekracza liczbę równań istnieją dwie metody rozwiązywania: metoda sił gdzie niewiadomymi w równaniach są siły oraz metoda przemieszczeń, gdzie niewiadomymi w równaniach są przemieszczenia. Ponieważ istnieje określona zależność pomiędzy siłami a przemieszczenia w konstrukcji która ulega odkształceniom możliwe jest sprowadzenia takiego zadania do układu równań algebraicznych w większości przypadków układów liniowych.

Ponieważ metoda sił dopuszcza wiele możliwych układów podstawowych najłatwiejsza to „skomputeryzowania” jest metoda przemieszczeń, gdzie układ podstawowy jest zazwyczaj ściśle określony a algorytm komputerowy prosty co dzisiaj stawiają tą metodę na pierwszej pozycji.

W odmianie przemieszczeniowej metody elementów skończonych analizowana konstrukcja jest dzielona na małe obszary zwane elementami skończonymi. Element skończony jest to obszar zdyskretyzowanego ośrodka ciągłego działający na prawach teorii sprężystości, którego kształt stanowią proste figury lub bryły geometrycznych takie jak na przykład trójkąt, prostokąt, czworościan, sześciąt. Na rysunkach 1.1 i 1.2 przedstawiono przykładowe typy elementów skończonych używanych do tworzenia siatki obiektów powierzchniowych oraz bryłowych.

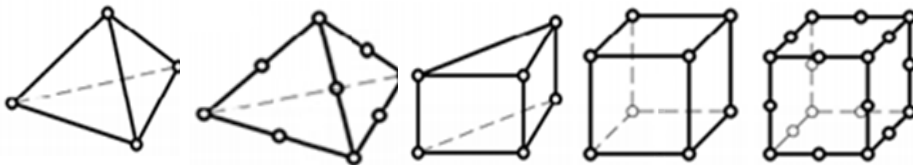


a. tri



b. quad

RYS. 1.1 ELEMENTY SKOŃCZONE POWIERZCHNIOWE



a. Tetra 4

b. Tetra 10

c. Penta

d. Hexa 8

e. Hexa 20

RYS.1.2 ELEMENTY SKOŃCZONE BRYŁOWE

Pełna definicja elementu skończonego zawiera informacje o jego geometrii czyli wielkości i kształcie, przypisanych do niego numerów węzłów oraz parametrach węzłowych określające niewiadome w węźle.

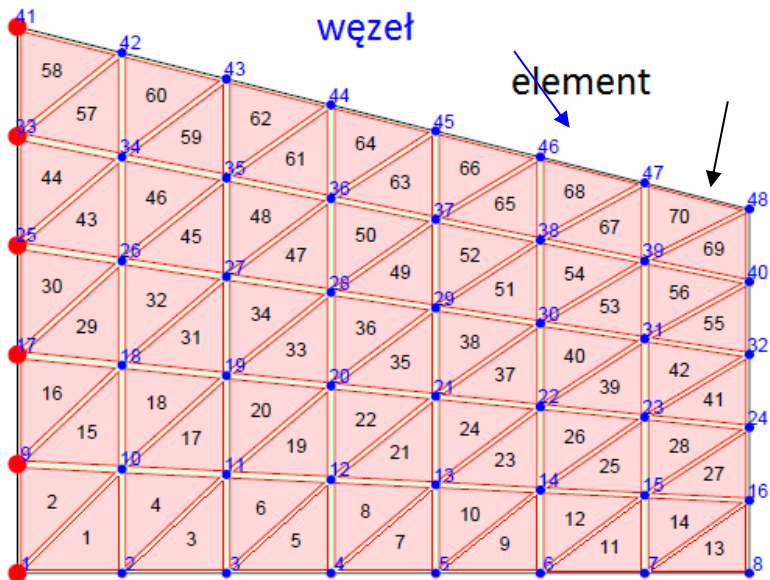
Doświadczenie obliczeniowe pokazuje uzyskiwanie lepszych rezultatów analizy przy użyciu mniejszej liczby elementów o większej liczbie węzłów niż dla większej liczbie prostych elementów. Ponadto w przypadku elementów powierzchniowych siatka konstrukcji powinna

składać się z elementów zbliżonych do trójkątów równobocznych a w przypadku elementów czworokątnych do kwadratu.

Typ elementu powinien być dobrany odpowiednio do zadanego problemu na co składa się zarówno wiedza teoretyczna jak i praktyczna. Profesjonalne programy oferują użytkownikowi szereg typów elementów skończonych. Wybór elementu do rozwiązania danego zagadnienia wiąże się z akceptacją modelu matematycznego na podstawie którego został stworzony co ma bezpośredni wpływ na uzyskany rozwiązanie.

Elementy skończone łączą się ze sobą w punktach zwanych węzłami. Na rysunku 1.3 przedstawiono przykład płaskownika składającej się z 70 elementów trójkątnych i 48 węzłów.

Węzeł przypisany do elementu skończonego nie jest punktem geometrycznym i może on się nie tylko przemieszczać w przestrzeni, ale również i obracać. Zawiera on informacje o zachowaniu elementu skończonego i jego właściwościach.



RYS.1.3 ELEMENTY SKOŃCZONE I WĘZŁY

Wyróżnia się następujące umiejscowienie węzła w elemencie:

- wierzchołkowe – zawsze
- krawędziowe
- ścienne
- wewnętrzne

Liczba niewiadomych w węźle określana jest liczbą stopnia swobody i powiązana jest z modelem fizycznym i matematycznym analizowanego problemu.

Ważnym aspektem podczas pisania programów komputerowych jest numeracja węzłów i elementów, gdyż ma ona ogromny wpływ na strukturę globalnej macierzy sztywności układu. Numeracja numerów węzłów może przebiegać dowolnie i dla danego obszaru każda dowolna numeracja węzłów doprowadzi to do układu równań o tych samych wymiarach i liczbie członów zerowych.

Jednakże, można zauważyć następującą zależność, że w przypadku gdy numeracja węzłów przebiega względem krótszego wymiaru dyskretyzowanego obszaru skutkuje to zmniejszeniem szerokości pasma macierzy globalnej wpływając korzystnie na ilość zajmowanej pamięci w komputerze i redukcje czasu obliczeń.

Z liczbą węzłów w elemencie związany jest również stopień wielomianu użytego do aproksymacji poszukiwanej wielkości w obszarze elementu. Im większa liczba węzłów tym wyższy stopień wielomianu ale i tym dokładniejsza aproksymacja. Większa liczba węzłów zwiększa także wymiar otrzymanego układu równań.

Proces podziału obszaru konstrukcji na elementy skończone nazywany jest dyskretyzacją. Dzięki dyskretyzacji czyli podziałowi klasycznego kontinuum na elementy skończone możliwe jest otrzymanie wartości przemieszczeń dla każdego węzła. Sposób podziału obszaru na elementy zależy od geometrii obszaru oraz zachowania poszukiwanej funkcji w danym obszarze na przykład w obszarach o możliwości

wystąpienia lokalnych spiętrzeń naprężeń czy też krawędziach należy zagęścić podział siatki ze względu na możliwość nagłej zmiany wartości poszukiwanej funkcji. Podejście takie nazywane jest tzw. wersją h metody i jest najczęściej stosowane. Metoda p, polegające na nieco bardziej nowszym sposobie rozwiązywania takich przypadków polega na podwyższeniu rzędu wielomiany aproksymującego element. Inna z kolei metodą jest metoda r, która polega na zmianie umiejscowienia węzłów w elemencie. Istnieją również kombinacje tych metod to jest metody hp, hr, hpr w rejonach nagłych zmian poszukiwanej funkcji MES. Dyskretyzacja jest szczególnie ważnym etapem każdej symulacji komputerowej,

gdyż niepoprawnie wygenerowana siatka jest powodem błędnych wyników.

W elementach skończonych definiowane są funkcje kształtu, które są tak naprawdę niczym innym jak prostymi funkcjami liniowymi lub wielomianami niskiego stopnia. Funkcja kształtu opisuje kształt rozwiązania w obszarze elementu a każdy węzeł posiada swoją własną funkcje kształtu.

Na podstawie interpolacji wartości przemieszczeń pomiędzy węzłami za pomocą funkcji kształtu jest budowana ciągłość przemieszczeń dla całego ośrodka. Węzeł dyskretyzuje funkcje które powinny być ciągłe w obszarze elementu skończonego. W węzłach dane są punktowo pewne wielkości na przykład temperatura lub ciśnienie a zadaniem funkcji kształtu jest dystrybucja w obszarze elementu skończonego tych wielkości czyli obliczenie wartości funkcji pomiędzy węzłami.

Przykładowe funkcje kształtu N_1, N_2, N_3 dla węzłów 1, 2, 3 dla elementu tarczowego z rysunku 1.4 wyglądają następująco:

$$N_1 = [x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]/(2\Delta)$$

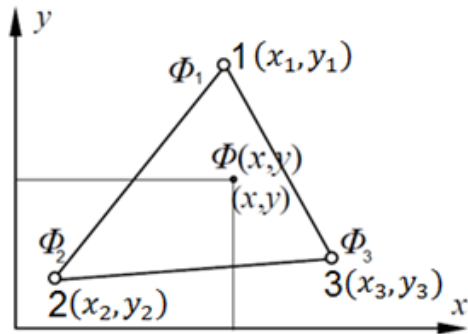
$$N_2 = [x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]/(2\Delta)$$

$$N_3 = [x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]/(2\Delta)$$

$$2\Delta = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Δ – jest powiechanią trójkąta o wierzchołkach 1, 2, 3

$$2\Delta = x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1$$



$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= a_1 + a_2x \\ &+ a_3y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 &= a_1 + a_2x_1 \\ &+ a_3y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 &= a_1 + a_2x_2 \\ &+ a_3y_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_3 &= a_1 + a_2x_3 \\ &+ a_3y_3\end{aligned}$$

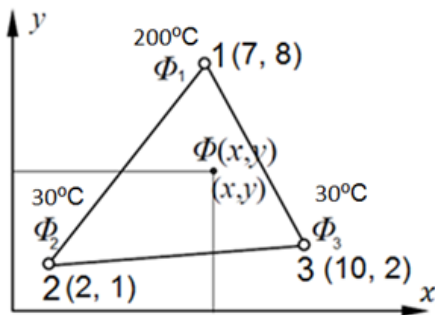
RYS.1.4 ELEMENT TARCZOWY TRZY WĘZŁOWY W
PRZESTRZENI 2D

Zadaniem funkcji N_1, N_2, N_3 jest rozprowadzanie wartości funkcji $\phi(x, y)$ pomiędzy węzłami elementu skończonego dla znanych stałych wartości wielkości fizycznych ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 .

$$\phi(x, y) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3$$

Funkcje kształtu zatem skalują funkcje ϕ w zależności od położenia x, y tak aby w i -tym węźle funkcja ta osiągnęła wartość ϕ_i . Przyjmując

konkretne współrzędne punktowe trzech węzłów takiego elementu tarczowego, dla funkcji ϕ będącej na przykład funkcją temperatury można obliczyć wartości temperatury dla różnych punktów wewnątrz takiego trójkąta (Ryc. 2.1-5).



Węzeł/współrzędna	x	y
Węzeł 1	7	8
Węzeł 2	2	1
Węzeł 3	10	2

$$N_1 = \frac{[x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]}{2\Delta} = \frac{[2 \cdot 2 - 10 \cdot 1 + (1 - 2)x + (10 - 2)y]}{51} = \frac{-6 - x + 8y}{51}$$

$$N_2 = \frac{[x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]}{2\Delta} = \frac{[10 \cdot 8 - 7 \cdot 2 + (2 - 8)x + (7 - 10)y]}{51} = \frac{66 - 6x - 3y}{51}$$

$$N_3 = \frac{[x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]}{2\Delta} = \frac{[7 \cdot 1 - 2 \cdot 8 + (8 - 1)x + (2 - 7)y]}{51} = \frac{-9 + 7x - 5y}{51}$$

$$2\Delta = x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1 = 2 \cdot 2 + 10 \cdot 8 + 7 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 1 \cdot 10 - 2 \cdot 7 =$$

$$= 4 + 80 + 7 - 16 - 10 - 14 = 91 - 40 = 51$$

$$\phi(x, y) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3$$

$$\phi(x, y) = \frac{-6 - x + 8y}{51}\phi_1 + \frac{66 - 6x - 3y}{51}\phi_2 + \frac{-9 + 7x - 5y}{51}\phi_3$$

dla $x=7$ i $y=8$

$$\phi(x, y) = \frac{-6 - x + 8y}{51}\phi_1 + \frac{66 - 6x - 3y}{51}\phi_2 + \frac{-9 + 7x - 5y}{51}\phi_3$$

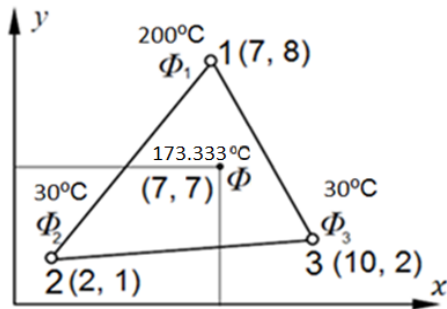
dla $x=7$ i $y=8$

$$\begin{aligned} \phi(7,8) &= \frac{-6 - 7 + 8 \cdot 8}{51}\phi_1 + \frac{66 - 6 \cdot 7 - 3 \cdot 8}{51}\phi_2 + \frac{-9 + 7 \cdot 7 - 5 \cdot 8}{51}\phi_3 = \\ &= \frac{-6 - 7 + 64}{51}\phi_1 + \frac{66 - 42 - 24}{51}\phi_2 + \frac{-9 + 49 - 40}{51}\phi_3 = \\ &= \frac{-13 + 64}{51}\phi_1 + \frac{0}{51}\phi_2 + \frac{0}{51}\phi_3 = \frac{-13 + 64}{51}\phi_1 = \frac{51}{51}\phi_1 = \phi_1 \end{aligned}$$

Funkcja $\phi(x, y)$ dla $x=7$ i $y=8$ czyli węzła numer 1 przyjmie wartość ϕ_1 czyli w tym przypadku 200^0 C. W każdym innym punkcie w obszarze trójkąta pomiędzy węzłami, suma funkcji N_1, N_2, N_3 równa jest jedności. Funkcja $\phi(x, y)$ dla punktu $x=7$ i $y=7$ znajdującego się w obszarze pomiędzy węzłami przyjmie wartość temperatury 173.333^0 C (Rys. 1.6)

INPUT					
x1=	7	y1=	8		
x2=	2	y2=	1		
x3=	10	y3=	2		
x	7				
y	7				
Φ1	Φ2	Φ3			
200	30	30			

OUTPUT					
2Δ	N1	N2	N3	N1+N2+N3	Φ(x,y)
51	0,84314	0,05882	0,09804	1	173,333



RYS.1.6 FUNKCJA KSZTAŁTU DLA TEMPERATURY

Z funkcji kształtu każdego elementu konstruuje się funkcje całego obszaru obliczeniowego zwane funkcjami bazowymi, skleja się więc funkcje z małych podobszarów w funkcje reprezentujące cały obszar. Rozwiązaniem przybliżonym MES jest zatem kombinacją liniową funkcji bazowych.

Znając współczynniki które występują w kombinacji liniowej aproksymowanej funkcji, stanowiące zbiór liczb oraz definicje funkcji bazowych uzyskuje się rozwiązanie przybliżone w każdym punkcie obszaru obliczeniowego. MES uzyskuje zatem rozwiązanie w wybranym węźle a następnie interpoluje rozwiązanie w pozostałych węzłach za pomocą funkcji bazowych. Pozwala to zatem na zastąpienie problemu opisanego za pomocą równań różniczkowych równaniami algebraicznymi co czyni tą metodę bardzo atrakcyjną z obliczeniowego punktu widzenia.

Warunki brzegowe w metodzie elementów skończonych to sposób umocowanie konstrukcji w przestrzeni jako warunek kinematyczny oraz jej obciążenie jako warunek kinetyczny. Jeżeli weźmiemy pod uwagę siły skupione, które jako obciążenie przykładane są w węzłach to wprowadzenie tak określonych warunków brzegowych kinetycznych polega na ulokowaniu poszczególnych współrzędnych sił skupionych na odpowiednich pozycjach wektora obciążeń $\{Q\}$. Jeżeli w układzie wektor $\{Q\}$ będzie wektorem zerowym wówczas wektor przemieszczeń węzłowych $\{q\}$ także będzie wtedy wektorem zerowym, ponieważ brak obciążeń to także brak

przemieszczeń

a więc brak deformacji konstrukcji:

$$[K] \cdot \{q\} = \{Q\}$$

Jednak samo obciążenie konstrukcji nie prowadzi do rozwiązania układu. Wynika to z faktu, że macierz sztywności $[K]$ bezpośrednio po jej utworzeniu jest osobliwa. Oznacza to że jej wyznacznik główny jest równy zeru, a więc taki układ jest sprzeczny bądź też ma nieskończenie wiele rozwiązań. Gdy wyznacznik główny macierzy jest różny od zera wówczas układ ma już jedno niezerowe rozwiązanie co świadczy o deformacji konstrukcji. Osobliwość macierzy sztywności dowodzi

niestabilności konstrukcji, oznacza to że albo fragmenty konstrukcji mogą względnie się przemieszczać albo konstrukcja jako całość może przemieszczać się względem globalnego układu współrzędnych. Dlatego aby układ równań mógłby być rozwiązany każda konstrukcja musi zostać poprawnie zamocowana i obciążona w przestrzeni. Na podstawie znanych wartości przemieszczeń obliczane są ze związków geometrycznych odkształcenia ϵ z równań konstytutywnych naprężenia w obszarze każdego elementu konstrukcji. Wektor przemieszczeń $\{q\}_e$ jest związany liniowo z wektorem sił i momentów $\{Q\}_e$ w elemencie skończonym. Macierz sztywności elementu $[k]_e$ zawiera współczynniki proporcjonalności k_{ij} występujące pomiędzy każdym z

przemieszczeniem i każdą z sił. Dla rozpatrywanego przykładu zginanej belki w przestrzeni trójwymiarowej (Rys. 1.7), składającej się jednego dwuwęzłowego elementu, każdy o 6 stopniach swobody - macierz sztywności $[k]_e$ będzie miała wymiar dwanaście na dwanaście i składać się będzie z stu czterdziestu czterech współczynników sztywności.

W algorytmach programów komputerowych opierających swoje działanie na metodzie elementów skończonych można wyróżnić następujące etapy:

- a. Podział analizowanej konstrukcji na elementy skończone oraz wyznaczenie macierzy sztywności $[k]_e$ dla każdego z elementów
- b. Agregacja elementów skończonych $[k]_e$ w jedną całość czyli utworzenie globalnej macierzy sztywności konstrukcji $[K]$
- c. Wprowadzenie warunków brzegowych:
 - Kinetycznych w formie sił czynnych. W tej fazie tworzony jest wektor prawych stron czyli wektor obciążeń $\{Q\}$

- Kinematycznych: przez określenie przemieszczeń wskazanych obszarów konstrukcji.

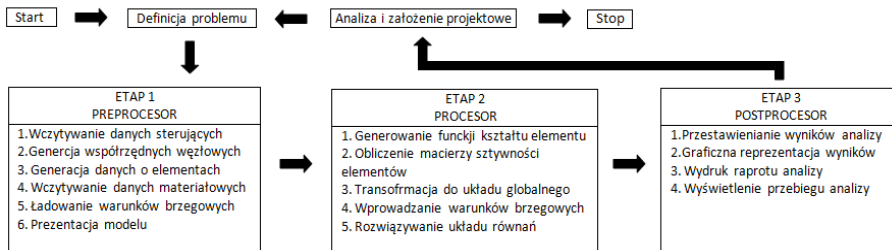
W tym miejscu układ równań $[K] \cdot \{q\} = \{Q\}$ jest ustanowiony i gotowy do rozwiązania.

Rezultatem rozwiązania jest wektor parametrów węzłowych $\{q\}$. Znane są zatem przemieszczenia konstrukcji w węzłach czyli kształt konstrukcji po obciążeniu oraz reakcje w węzłach które nie zostały utwierdzone

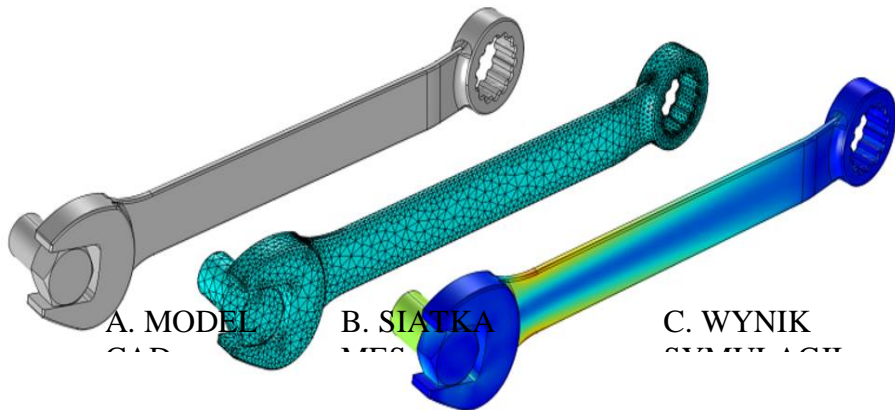
- d. Obliczenie odkształceń i naprężeń. Na podstawie znanych wartości przemieszczeń w obszarze każdego z elementów, obliczane są odkształcenia ε w każdym z elementów (ze związków

geometrycznych) i na następnie naprężenia σ (z równań konstytutywnych).

Program komputerowy rozwiązujący powyższy algorytm składa się z trzech modułów: preprocesora, procesora i postprocesora. Moduły te odpowiadają odpowiednio za przygotowanie danych do obliczeń, budowanie i rozwiązywanie danego układu równań oraz prezentację otrzymanych wyników analizy. Na rysunku 1.12 przedstawiono idee komputerowej implementacji metody elementów skończonych.



RYS. 1.12 KOMPUTEROWA IMPLIEMETACJA MES



RYS.1.13 PRZEBIEG ANALIZY MES [www.comsol.com]