MODELOWANIE I OBLICZENIA W BADANIACH NAUKOWYCH

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej

Plan wykładu

- Pojęcie modelu
- Opis zewnętrzny i wewnętrzny systemu
- Klasyfikacja modeli matematycznych stosowanych w opisie systemu
- Przykłady modeli matematycznych
- Chaos deterministyczny
- Modelowanie rozmyte systemów
- Modele sieci neuronowych

Czym jest model ?

- ***Model** jest uproszczoną realizacją rzeczywistego świata, który wychwytuje cechy sytuacji związanej z analizowanym problemem. W modelu niektóre procesy uwzględniamy, niektóre pomijamy. Uproszczenia wprowadza się w postaci zbioru założeń, które wyrażają nasze rozumienie systemu i jego zachowania.*
- ***Symulacja** – odtwarzanie właściwości danego procesu, zjawiska, obiektu (systemu) za pomocą jego modelu (kompresja, wydłużenie jednostki czasu obserwacji, ekstrapolacja w przyszłość poza obszar dostępnych danych)*

Opis matematyczny systemu

Opis matematyczny systemu (w postaci modelu matematycznego)

****zewnętrzny***

****wewnętrzny***

zewnętrzny – funkcjonalny, cybernetyczny, w postaci czarnej skrzynki i odpowiednich funkcji przenoszenia (przejść, transmitancji). Funkcja przenoszenia charakteryzuje powiązanie pomiędzy określonym wyjściem, a wejściem.

Opis zewnętrzny systemu

W układach mechanicznych, elektrycznych:
– operatorowa funkcja przejścia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

– funkcja przejścia w dziedzinie częstości

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Pomiędzy wejściem a wyjściem występuje związek przyczynowo skutkowy. Układ odpowiada określonym wyjściem na zadane wejście. Znając wyjście nie zawsze można jednoznacznie określić co było zadane na wejściu.

Opis wewnętrzny systemu

wewnętrzny – strukturalny, np. dla systemów dynamicznych postaci modelu matematycznego jako układ równań różniczkowych

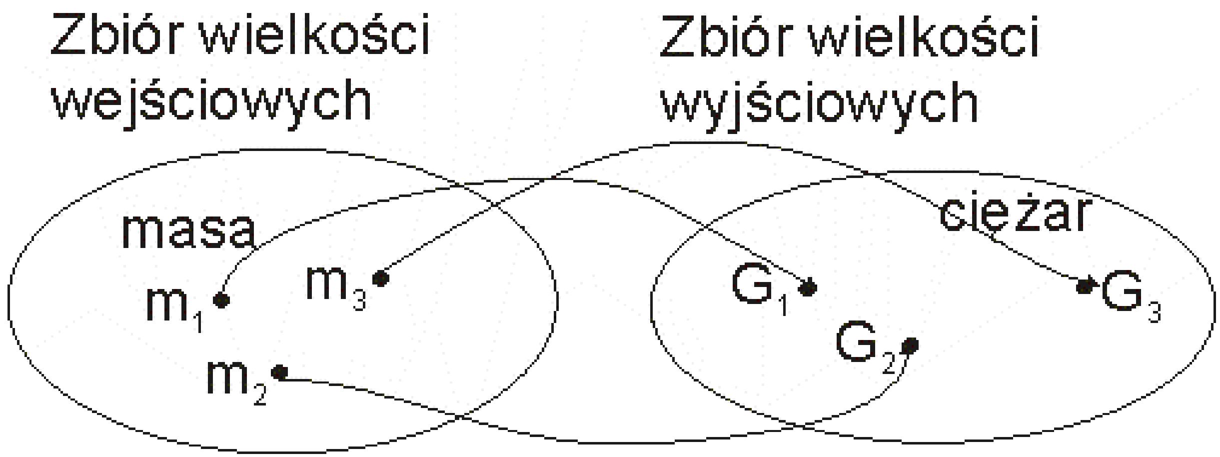
$$\begin{cases} \dfrac{dQ_1}{dt} = f_1(Q_1, Q_2, \ldots Q_n) \\ \dfrac{dQ_2}{dt} = f_2(Q_1, Q_2, \ldots Q_n) \\ \ldots \\ \dfrac{dQ_n}{dt} = f_n(Q_1, Q_2, \ldots Q_n) \end{cases}$$

Q_i – atrybut elementu systemu, elementy systemu np. modele systemu gospodarki: Keynesa, Hicksa, Domara, Kaleckiego itp...

$$\frac{\partial x(t, \boldsymbol{l})}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{F}\left[\mathbf{x}(t, \boldsymbol{l}), \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{l})\right]$$

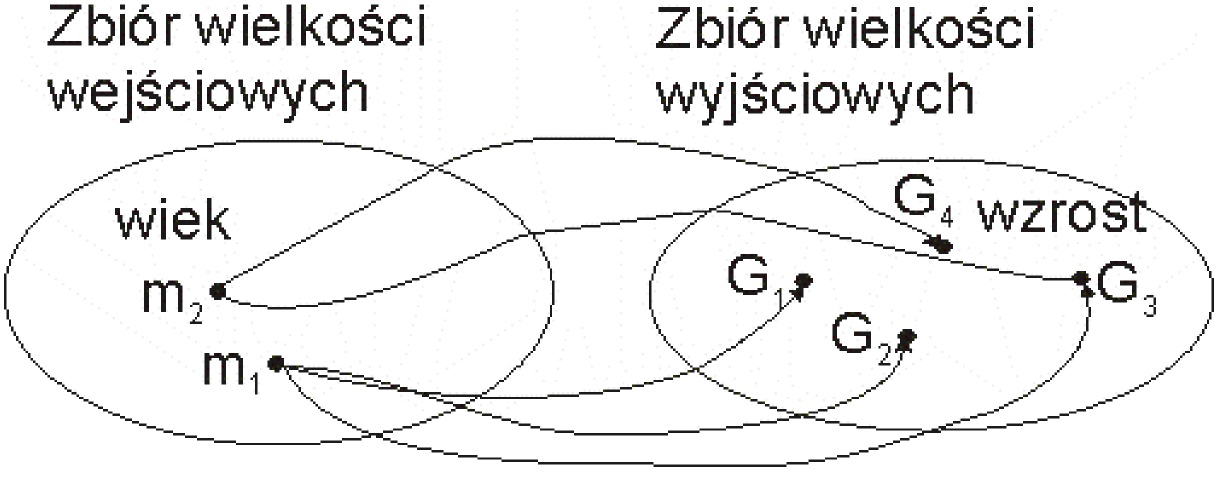
Modele matematyczne - deterministyczne

- w postaci zależności funkcyjnych, w których każdemu elementowi zbioru wielkości wejściowych przyporządkowany jest jednoznacznie określony element zbioru wielkości wyjściowych np. modele w mechanice, astronomii (zdeterminowane zachowanie systemu, model przyczynowo-skutkowy)



Modele matematyczne - probabilistyczne

- każdemu elementowi wielkości wejściowych może odpowiadać wiele elementów zbioru wielkości wyjściowych (przypisanych losowo wejściom) – prognozowalność tylko w kategoriach prawdopodobieństwa.



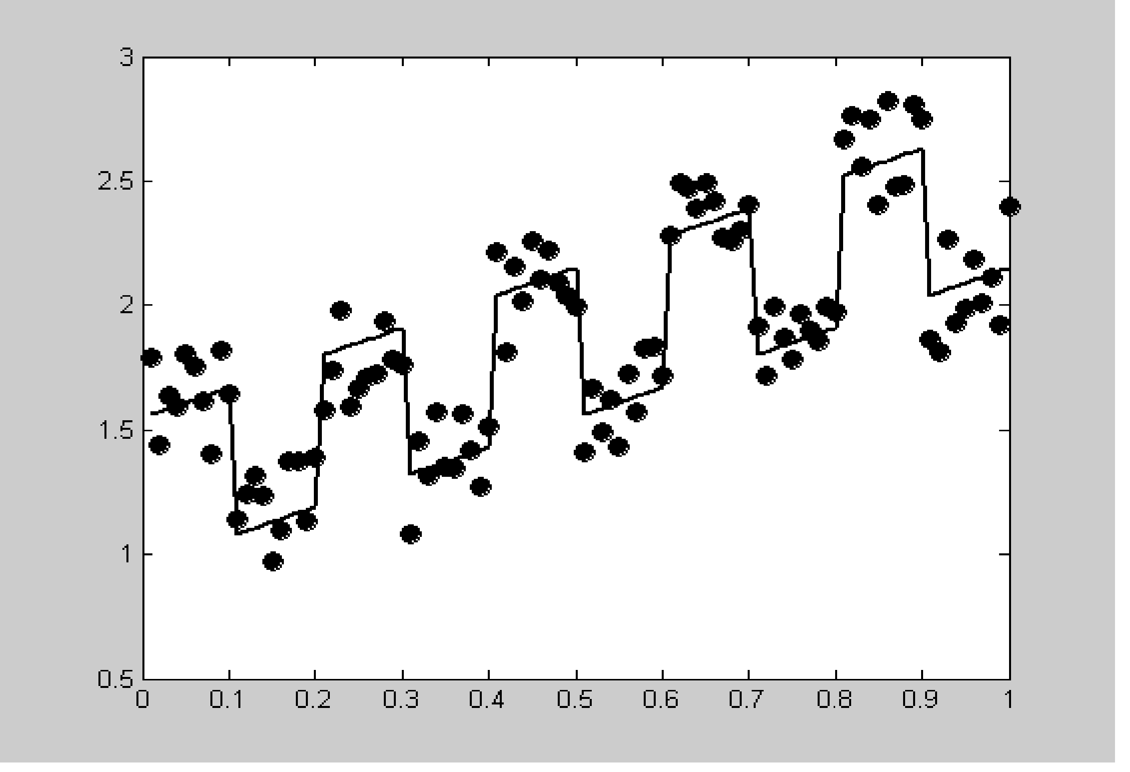
Modele matematyczne – probabilistyczne / zależność korelacyjna

Szczególnym przypadkiem zależności stochastycznej jest zależność pomiędzy średnimi m i G (np. zależność wagi od wzrostu, stopy życiowej od dochodu narodowego, wydajności pracy od wykształcenia zawodowego itp...).

Modele korelacyjne

$$y = am + bz$$

Modele korelacyjne cd.



Można ustalić, że między dwoma zjawiskami istnieje zależność korelacyjna ale nie można stwierdzić istnienia związku przyczynowo– skutkowego (co najwyżej można obalić hipotezę o takim związku) .

Modele przyczynowe a korelacyjne

- Nie każdy model korelacyjny można nazwać przyczynowym
- „jeżeli moje działanie będzie „m” to skutek będzie „y”. Model powinien opisywać rzeczywiście istniejący związek przyczynowo-skutkowy
- Należy znać prawa rządzące opisywanym zjawiskiem (a nie tylko bierne obserwacje), lub dokonać eksperymentu czynnego (w przykładzie – sztucznie w sposób kontrolowany nawadniać działkę i mierzyć plony)

Modele statyczne

- Nie występuje parametr czasu

Przykładowo model zależności pomiędzy wartościami uśrednionymi - w skali roku – opadami „z” a uśrednionym odpływem wody ze zbiornika „y”

$$y=kz$$

Model opisu chwilowego y musi być dynamiczny.

- Rozważamy systemy o wejściach wolnozmiennych (wszystkie zależności tworzące model odnoszą się do tej samej chwili czasowej)

Modele dynamiczne

- Konieczny parametr czasu

- model zmiany stężeń zanieczyszczeń jeziora w warstwie nad i pod termokliną

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = -\alpha\left(C - C_x\right) - \beta\left(C - \delta\right) \\ \dfrac{dC_x}{dt} = \gamma\left(C - C_x\right) \end{cases}$$

- Opisywane z reguły w kategoriach równań różniczkowych (modele ciągłe) lub różnicowych (modele dyskretne) – zwyczajnych i cząstkowych

Modele ciągłe i dyskretne

Modele ciągłe i dyskretne

– ciągłe – zmienne określone w sposób ciągły np. w każdej chwili czasu

– dyskretne – z dyskretną reprezentacją zmiennych, np. planowanie inwestycji i operowanie miesiącami jako jednostką czasu, opis możliwości systemu energetycznego za pomocą dyskretnych stopni zasilania, liczba pojazdów oczekujących w kolejce itp.

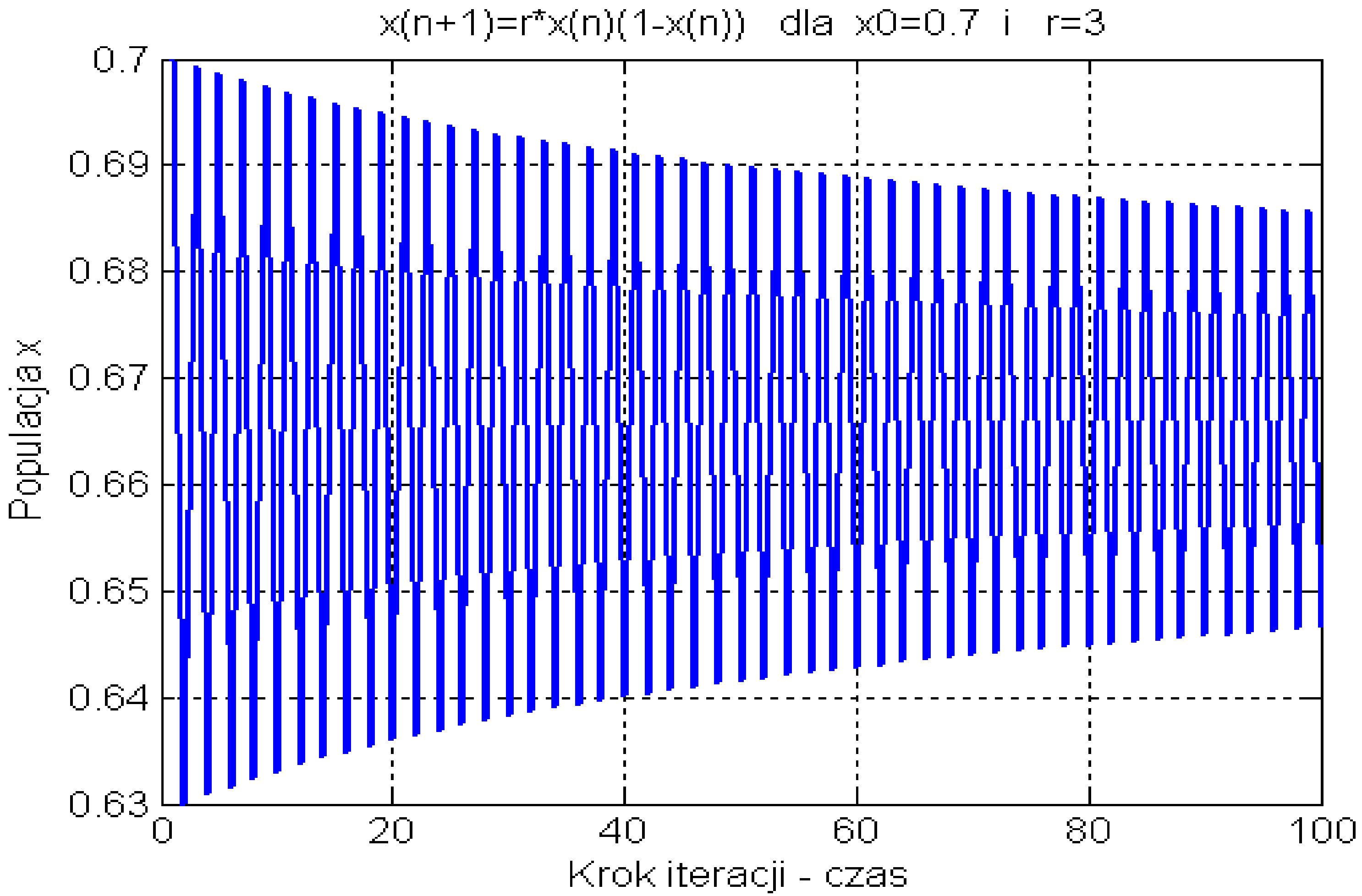
Chaos deterministyczny

- Model dynamiczny, różnicowy opisujący populację w warunkach występowania ograniczonych zasobów – graniczna wartość populacji równa 1

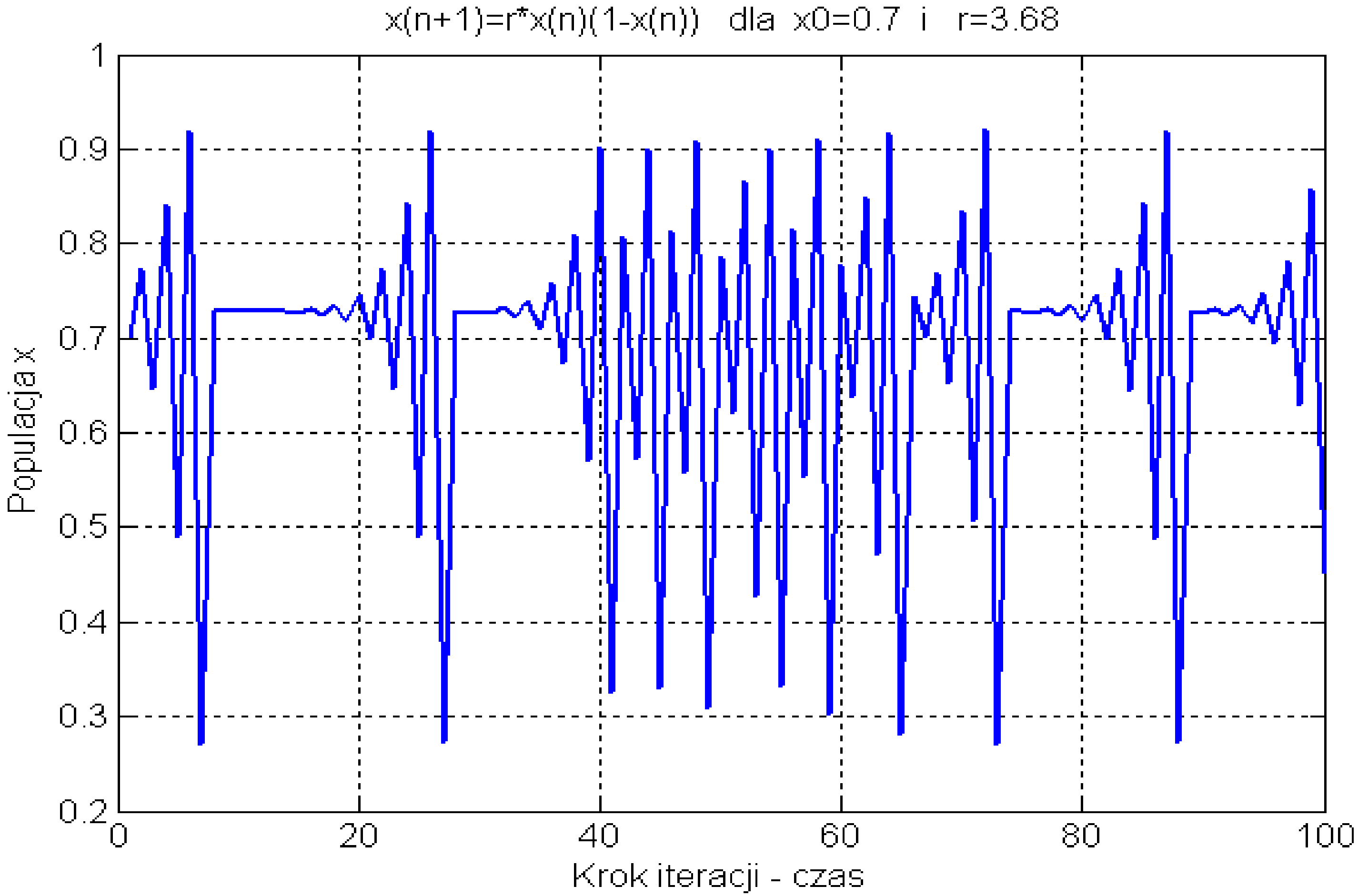
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

r – szybkość wzrostu populacji (potencjał biotyczny)
x – populacja
n – krok iteracji (odpowiednik czasu)

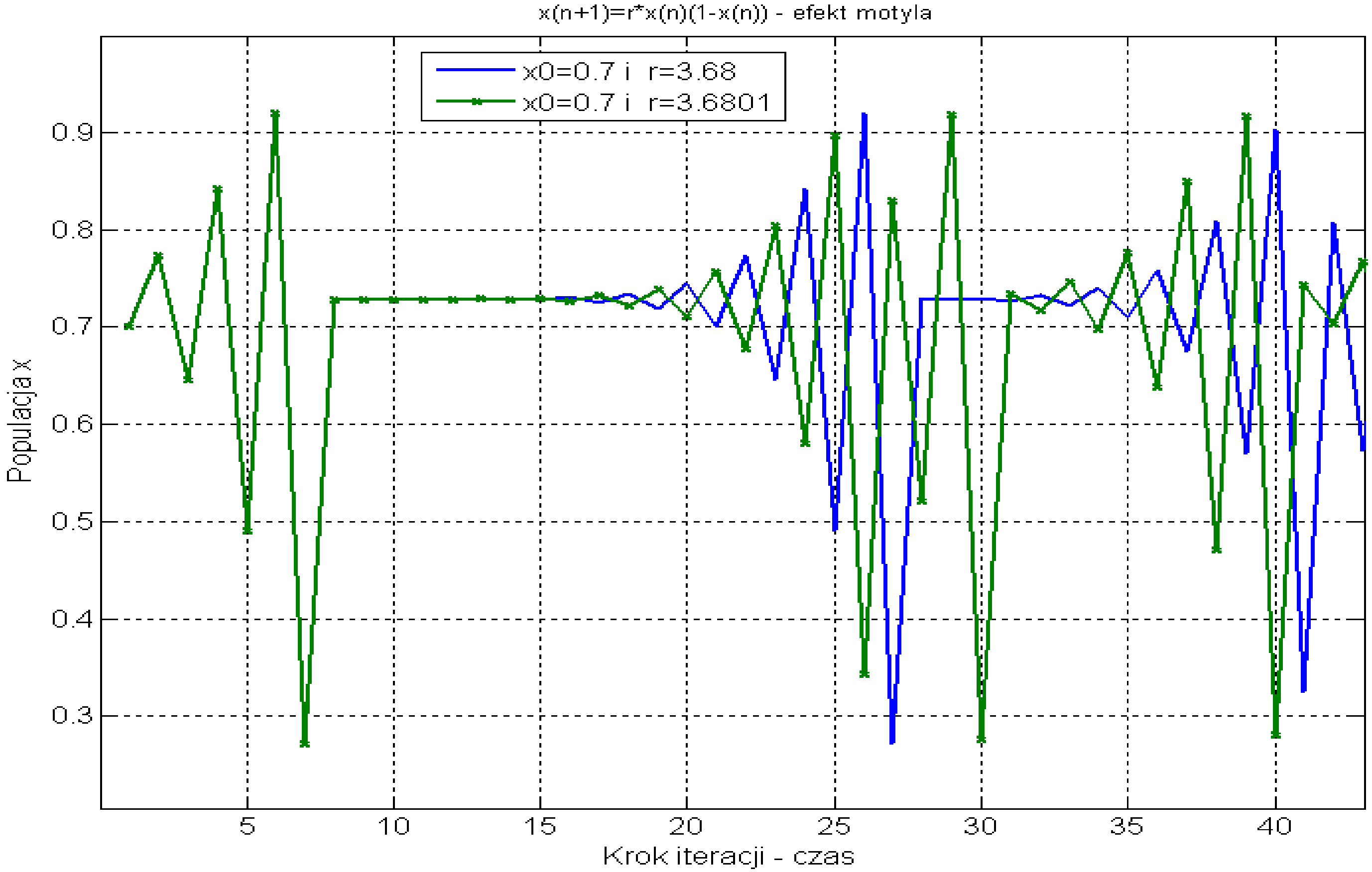
Chaos deterministyczny - przykład



Chaos deterministyczny - cd



Chaos deterministyczny – efekt motyla

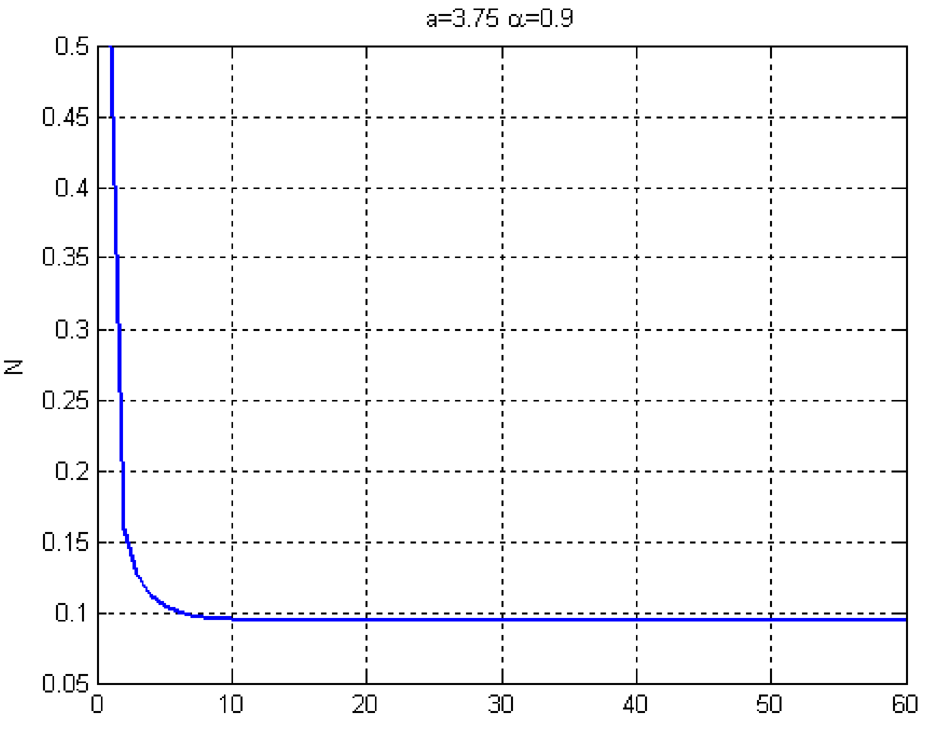


Chaos deterministyczny – model wzrostu gospodarczego

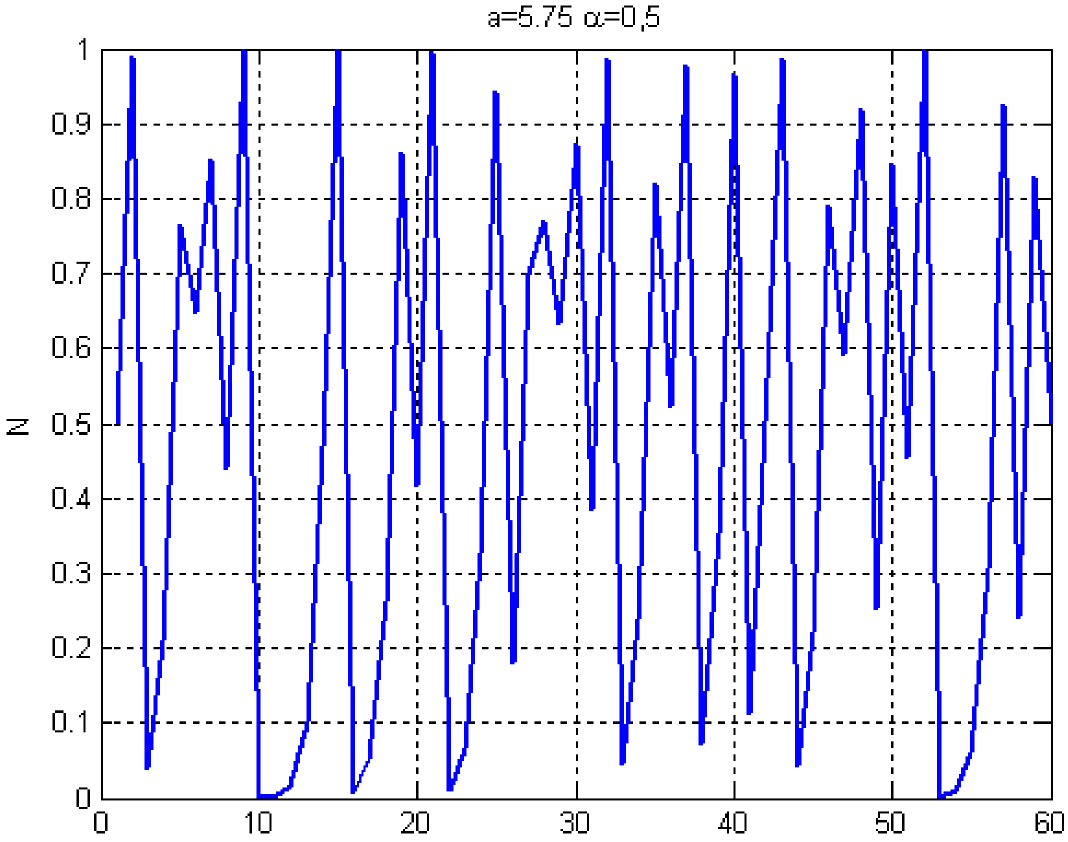
Model wzrostu gospodarczego

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N\left(a - \dfrac{\beta N}{Y}\right) \\ Y = AN^{\alpha} \end{cases}$$

gdzie:
N – wielkość populacji,
Y – dochód narodowy,
α, *A*, a, b – stałe parametry modelu



Chaos deterministyczny – model wzrostu gospodarczego



Inne przykłady modeli systemów

Model **popytu** na większość towarów i usług, model populacji danego gatunku w obliczu **ograniczoności zasobów** (*np. na wyspie*).

$$\frac{dq}{dt} = g\,\frac{q}{L}\left(1 - \frac{q}{L}\right)$$

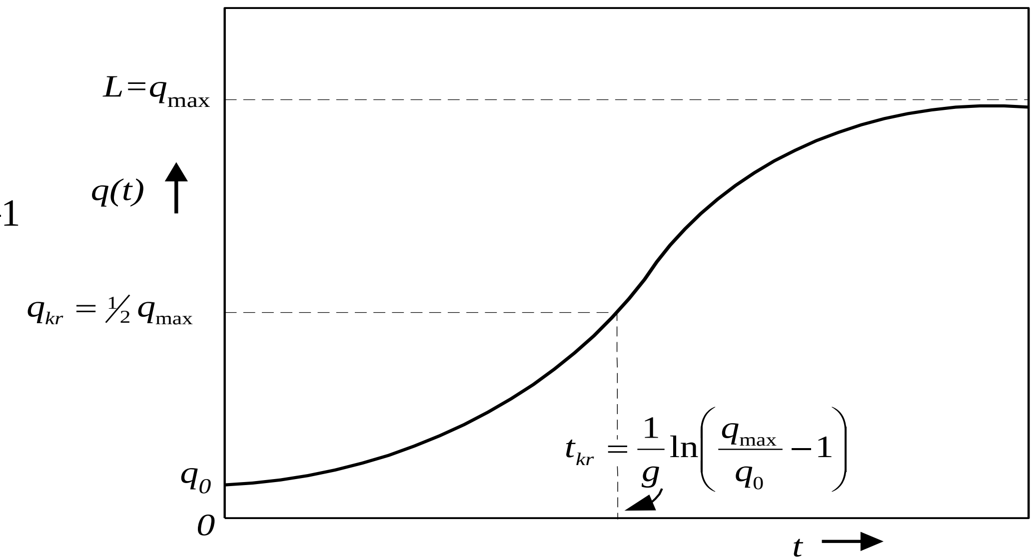
q – popyt*, L* = *qmax* , t -czas

Rozwiązanie:

$$q(t) = L\left(1 + \left(\frac{L}{q_0} - 1\right)e^{(-gt)}\right)^{-1}$$

Czas przełomu wzrostu popytu

$$t_{kr} = \frac{1}{g}\ln\left(\frac{L}{q_0} - 1\right)$$



Optymalizacja strategii produkcji

Inne metody modelowania systemów- modele rozmyte

Im system bardziej złożony tym trudniej opisać go za pomocą modelu matematycznego.
W przypadku systemów obejmujących działania i postawy człowieka musimy rezygnować z dokładności.
Jak zachować precyzję formalizmu matematycznego a jednocześnie opisywać pojęcia tak nieprecyzyjne jak:

ciepły, zimny, letni;
dobry, zły, gorszy;
klika drzew, kępa, las?

Modelowanie rozmyte

Naśladowanie ludzi w radzeniu sobie z bardzo złożonymi problemami w prosty sposób (dzięki rezygnacji z precyzji rozumowania).

Stosujemy:

- uproszczone modele rzeczywistości,
- niezbyt precyzyjne dane w ograniczonej ilości,
- niezbyt precyzyjne zasady wnioskowania.

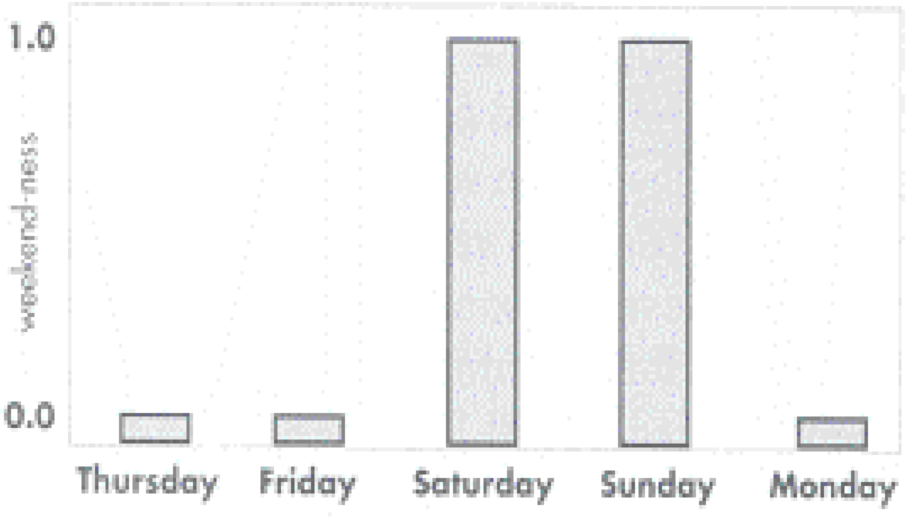
Liczy się prostota rozwiązania i szybkość działania

Modelowanie rozmyte

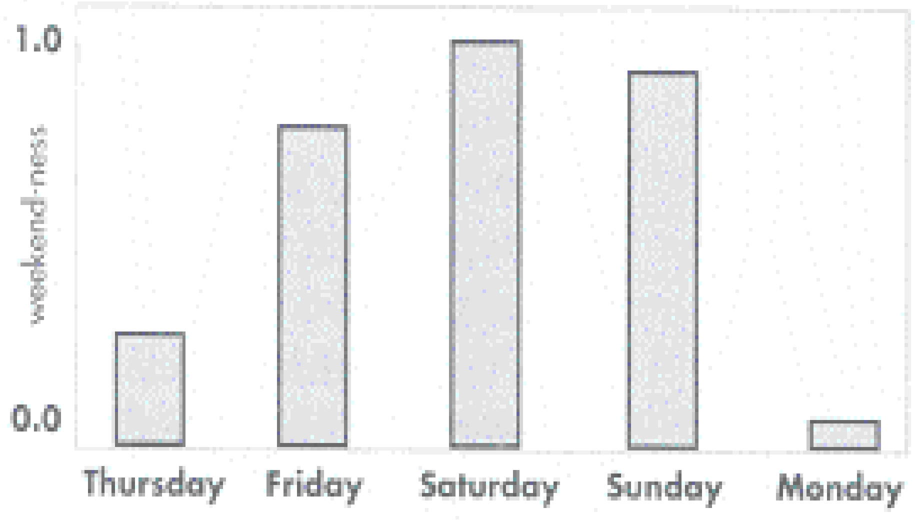
Modelowanie rozmyte nierozerwalnie wiąże się z pojęciem zbioru rozmytego lub liczby rozmytej

Tradycyjne pojęcie zbioru– reguła wyłączonego środka - coś należy do zbioru lub nie

Zbiór rozmyty - coś może należeć do zbioru w pewnym stopniu (opis za pomocą funkcji przynależności).

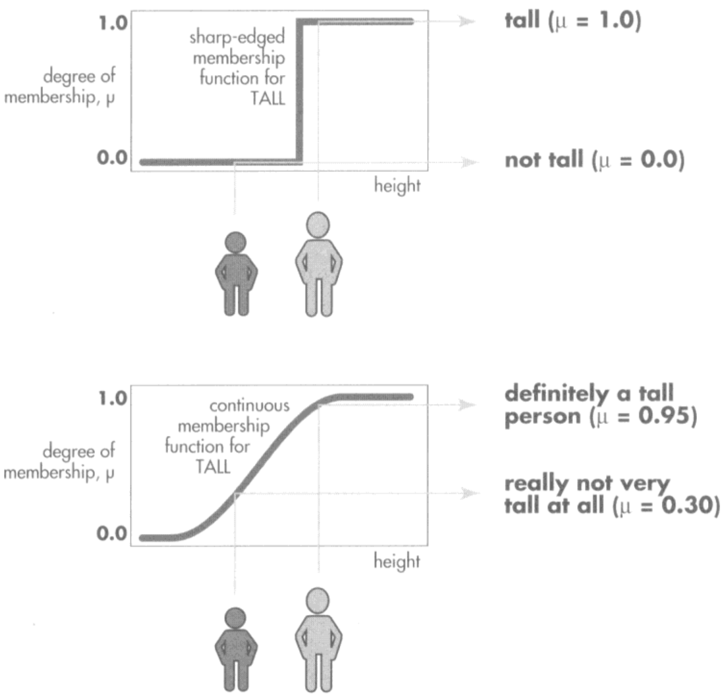


Days of the weekend two-valued membership



Days of the weekend multivalued membership

Modelowanie rozmyte



Aby zdefiniować zbiór rozmyty należy określić także funkcję przynależności elementu x do zbioru

$\mu_A(x) = 1$ pełna przynależność elementu x do zbioru A ($x \in A$)

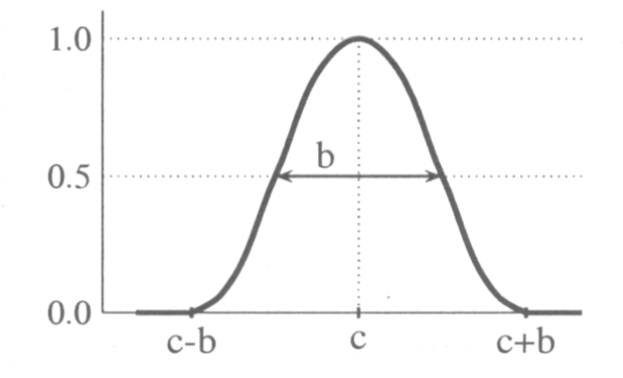
$\mu_A(x) = 0$ brak przynależności elementu x do zbioru A ($x \notin A$)

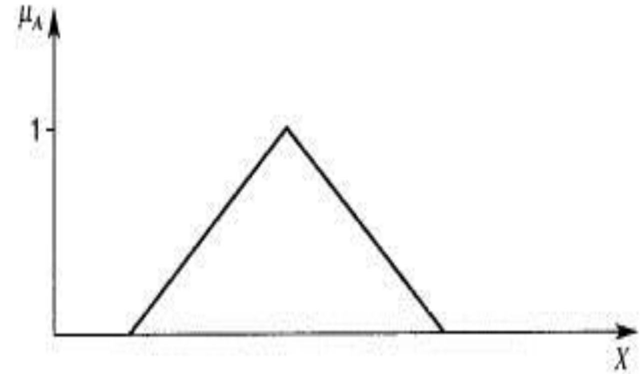
$0 < \mu_A(x) < 1$ częściowa przynależność elementu x do zbioru rozmytego A

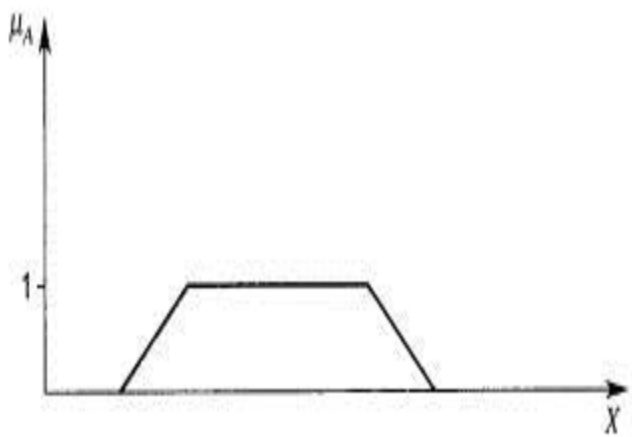
Modelowanie rozmyte

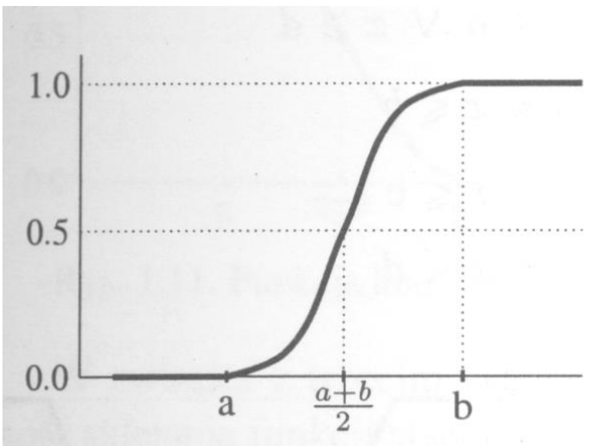
Dany element może należeć do różnych zbiorów z różnymi funkcjami przynależności jednocześnie.

Zbiory rozmyte

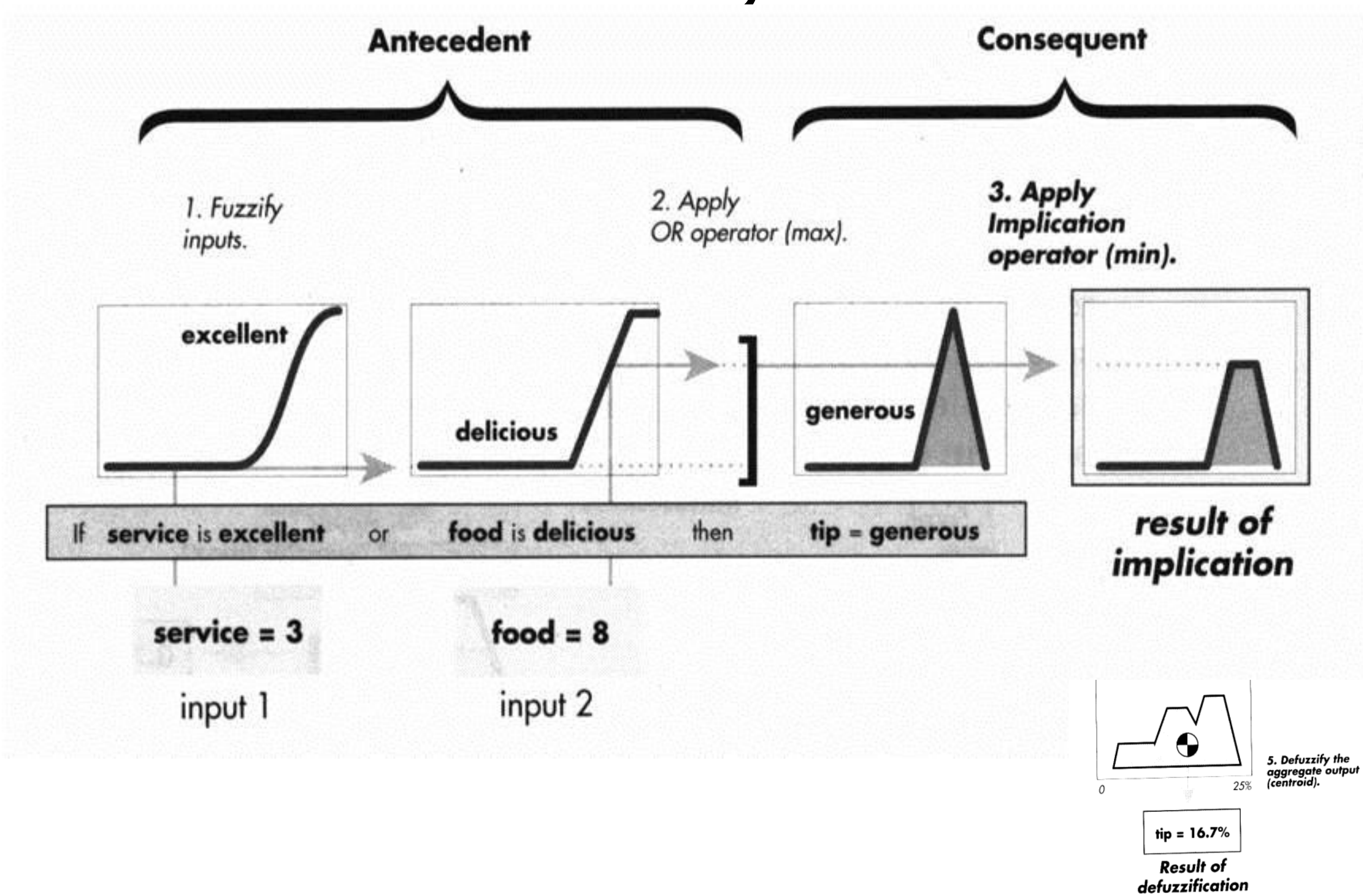








Wnioskowanie (sterowanie) rozmyte



Sieci neuronowe

Zastosowania: wszędzie tam gdzie nie można zbudować modelu przyczynowo –skutkowego (bo zjawisko jest zbyt skomplikowane):

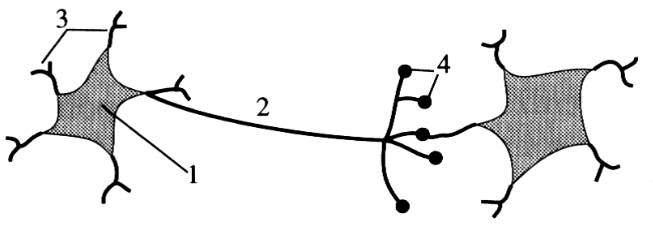
niektóre aspekty socjologii, psychologii, bankowości, ekonomi ,nauk technicznych.

Dysponujemy natomiast obserwacjami (niekiedy niedokładnymi i niejednoznacznymi) przyczyn i skutków.

- **Klasyfikacja, rozpoznawanie:**
  np. wykrywanie podmiotów rozwijających się i cechujących się stagnacją, decyzje komu przydzielić kredyt a komu nie,
- **Rozpoznawanie mowy, twarzy, pisma, wykrywanie chorób (medycyna)**
- **Sterowanie**
- **Analiza danych i wykrywanie związków pomiędzy danymi**
- **Prognozowanie**
- **Aproksymacja**

Modele SI - sieci neuronowe

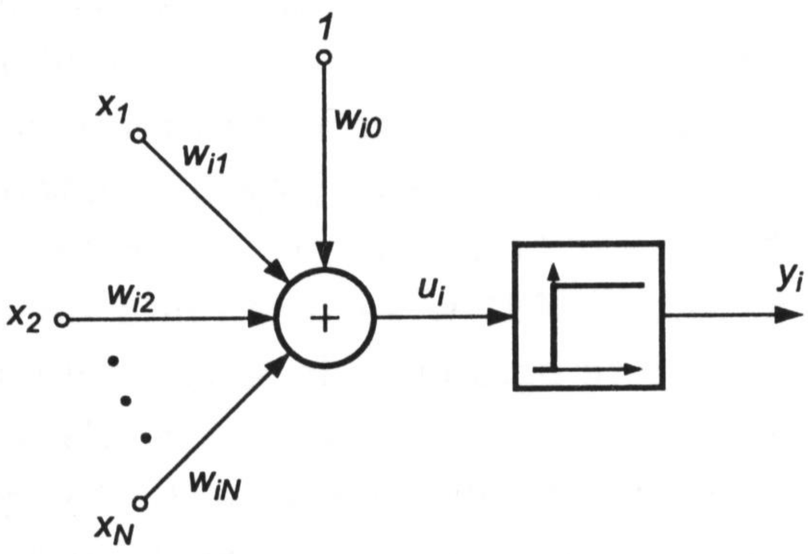
Biologiczny neuron



1- ciało komórki
2- akson – wyprowadzanie informacji
3- dendryty – wprowadzanie informacji
4- synapsy – złącza nerwowe

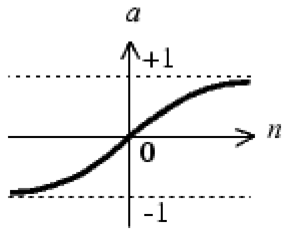
Do komórki docierają informacje pobudzające lub hamujące.
Jeśli suma tych sygnałów przekracza wartość progową to sygnał jest przesyłany do innych neuronów

Modele SI – sieci neuronowe



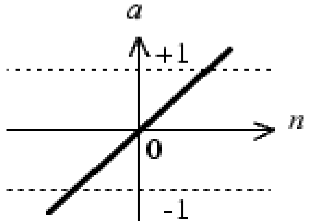
Idea modelowania biologicznej komórki mózgowej (neuronu)

Neuron sigmoidalny



Każde pobudzenie x mnożone jest przez odpowiednią wagę w i sumowane. Następnie przetwarzane za pomocą funkcji aktywacji: sigmoidalnej, liniowej, skoku jednostkowego itp...

Neuron liniowy



Modele SI – sieci neuronowe

Najbardziej „popularne” SN jako ***systemy uczące się (uczenie z nauczycielem)***

***„Wiedza” neuronu kryje się w wagach**

***W procesie uczenia na wejście neuronu podaje się określone kombinacje x oraz tak zmienia się wartości wag aby uzyskać pożądane wartości na wyjściu.**

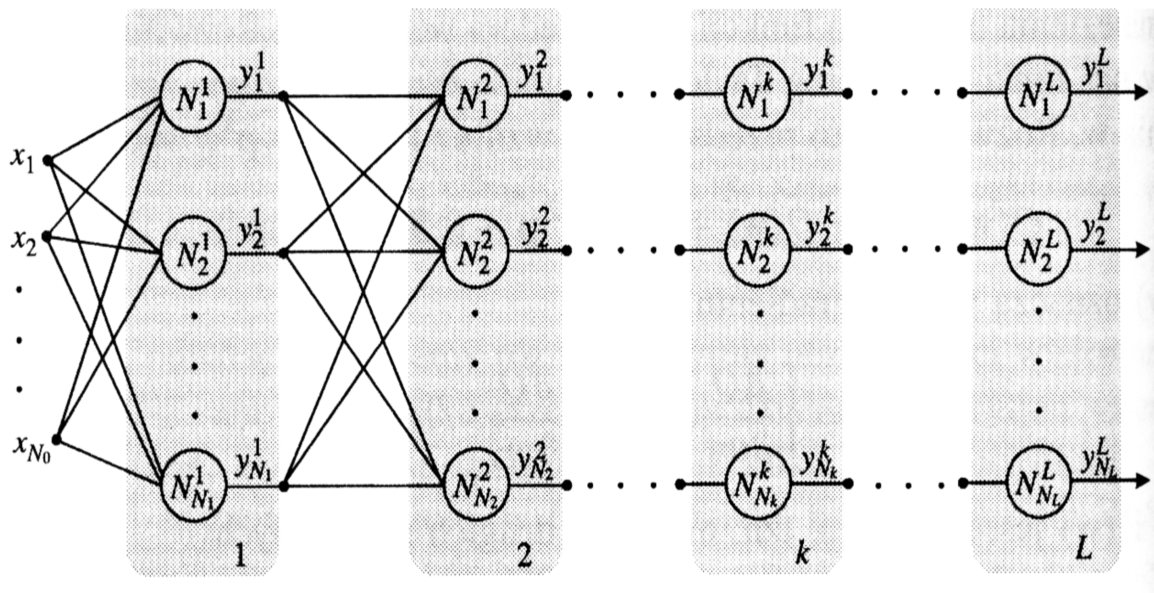
***Trzeba dysponować przykładami jak neuron ma reagować na określone kombinacje wejść**

Sieci neuronowe typu MLP

Pojedynczy neuron nie ma zastosowań praktycznych.

Z pojedynczych neuronów tworzy się sieci.

wejścia

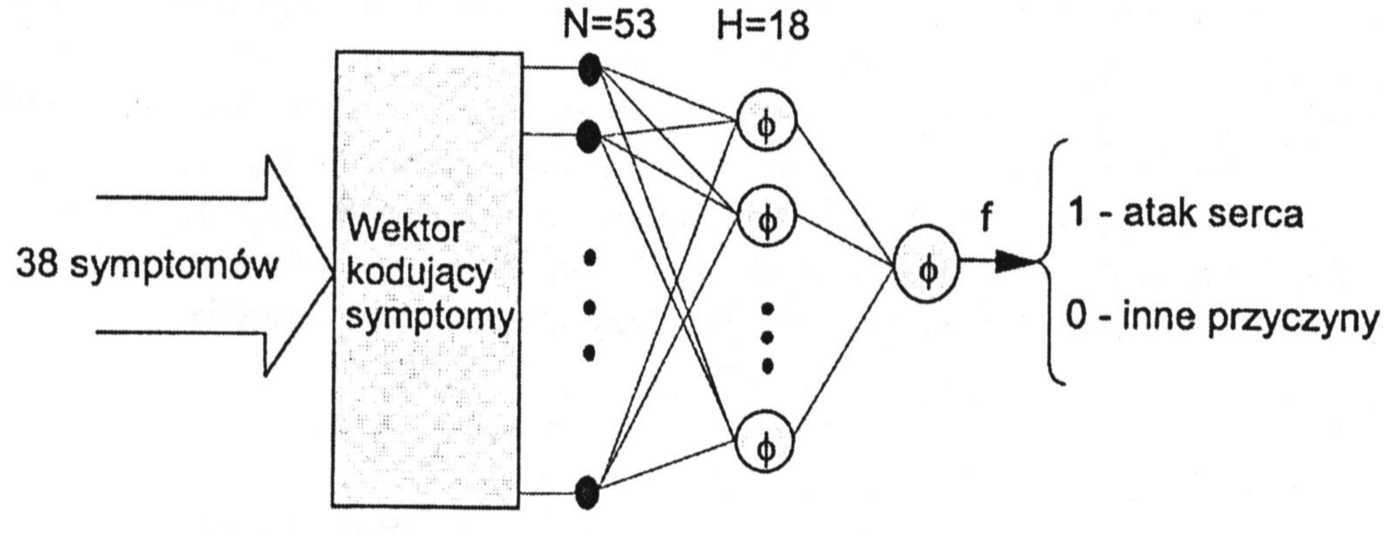


wyjścia

Sieci neuronowe - przykład

Medycyna i systemy ekspertowe.

Na wejściu różne cechy charakterystyczne wykresu EKG na wyjściu ewentualna diagnoza o ataku serca



Sieć nauczona na setkach różnych przypadków.