

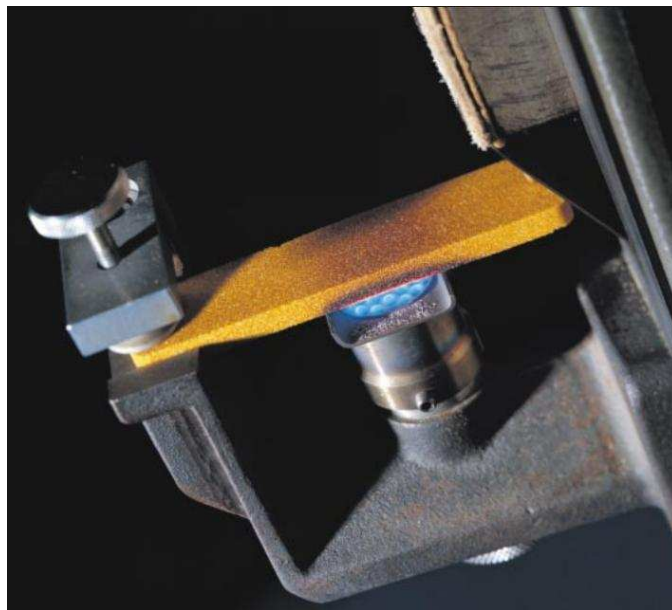
SPIS TREŚCI

1. WSTĘP.....	2
2. RÓWNANIA MODELOWANIA W TERMOSPĘŻYSTOŚCI.....	4
2.1. Równania odkształcenia i przemieszczenia.....	4
2.2. Prawo Hooke'a	5
2.3. Uogólnione prawo Hooke'a dla trójosiowego stanu naprężeń.....	5
2.4. Podstawowe równania ruchu	7
2.5. Równania termosprężystości	8
2.6. Związki liniowe teorii sprężystości zapisane w postaci macierzowej.....	9
2.7. Równanie ruchu zapisane w postaci macierzowej.....	10
2.8. Równanie przewodnictwa cieplnego	12
3. ŚRODOWISKO METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH.....	14
3.1. Metoda elementów skończonych.....	14
3.2. Środowisko COMSOL Multiphysics.....	16
4. ZAŁOŻENIA MODELOWE.....	19
5. WYNIKI NUMERYCZNE SYMULACJI	28
6. PODSUMOWANIE	40
LITERATURA	41

1. Wstęp

Przedmiotem niniejszej pracy jest symulacja komputerowa odkształcenia układu mechanicznego pod wpływem temperatury. Wybór tematu podyktowany był zainteresowaniami autora związanymi zarówno z metodą elementów skończonych, jak i z chęcią zbadania zmian właściwości fizycznych przykładowego układu poddanego działaniu temperatury.

Celem pracy jest opracowanie modelu trójwymiarowego dla zbadania odkształceń zachodzących pod wpływem temperatury. Dla tego modelu zadano warunki brzegowe w środowisku COMSOL, za pomocą, którego można dokonywać symulacji opartych na metodzie elementów skończonych. Proces symulacji komputerowej odkształcenia pod wpływem temperatury wzorowany był na próbie odkształceń na gorąco (Hot Distortion Test) opisany przez Ignaszaka i Popielarskiego [1].



Rysunek 1. Test odkształceń na gorąco (Hot Distortion Test) [1]

Praca została podzielona na pięć rozdziałów. Rozdział pierwszy stanowi wprowadzenie w tematykę pracy. Drugi rozdział zawiera analizę literaturową zagadnienia. W części tej omówiono problematykę związaną z podstawowymi zagadnieniami termosprężystości, uogólnionym prawem Hooke'a, a także z równaniem przewodnictwa cieplnego, których znajomość jest konieczna do zrozumienia istoty niniejszych badań. Przedstawiono w nim również wyprowadzenie wzorów pozwalających

na przeprowadzenie symulacji komputerowej przy pomocy metody elementów skończonych. Następny rozdział stanowi krótki opis metody elementów skończonych oraz pakietu symulacyjnego COMSOL Multiphysics. Czwarty rozdział dotyczy opisu problemu oraz zadanych warunków brzegowych symulacji komputerowych odkształcenia układu mechanicznego pod wpływem temperatury przeprowadzanej w środowisku MES programu COMSOL Multiphysics 3.5. Jako przykładem posłużono się zamodelowaną próbką ceramicznego materiału porowatego przeznaczonego na formy odlewnicze, której przykład także zbadano. Kolejny rozdział stanowi wyniki przeprowadzonych symulacji numerycznych. Sprawdzono zmianę właściwości termo-mechanicznych na przykładzie rozkładu temperatur i wielkości odkształcenia badanej próbki, a także bardziej złożonego modelu jaki stanowi forma odlewnicza. Wnioski końcowe zawarto w zakończeniu pracy.

2. Równania modelowania w termosprężystości

2.1. Równania odkształcenia i przemieszczenia

Ciało stałe podlegające działaniu obciążeń mechanicznych i cieplnych odkształca się. Jego punkty doznają pewnych przemieszczeń, które określamy względem stosownie przyjętego układu odniesienia. W prostokątnym układzie współrzędnych x , y , z , odpowiadające wymienionym osiom składowe przemieszczenia oznaczamy przeważnie symbolami u , v , w . Wyodrębniony myślowo z ciała element prostopadłościenny o długościach krawędzi dx , dy , dz w wyniku małych odkształceń przekształca się na zbliżony do równoległościanu element o długościach krawędzi: $(1 + \varepsilon_x)dx$, $(1 + \varepsilon_y)dy$, $(1 + \varepsilon_z)dz$ [2].

Wielkości ε_x , ε_y , ε_z wyrażają względne zmiany długości wspomnianych krawędzi, dlatego nazywane są odkształceniami względnymi. Krawędzie ulegają odkształceniu o stosunkowo małe kąty, wyrażone w mierze łukowej zwane odkształceniami kątowymi, oznaczone jako γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} .

Powyższe wielkości nazywane są składowymi stanu odkształcenia. Określają one tensor odkształcenia :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Weźmy pod uwagę prostokątny układ współrzędnych x , y , z i mały element wyodrębniony z rozpatrywanego ciała stałego przekrojami płaskimi równoległymi do płaszczyzn wyznaczonych osiami tego układu. Występujące na ściankach elementu naprężenia składowe normalne σ_x , σ_y i σ_z oraz styczne τ_{xy} , τ_{yz} i τ_{zx} [1]. Naprężenia te

w danym punkcie ciała określają tensor naprężenia σ , który można przedstawić w postaci następującej macierzy kwadratowej:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \frac{\tau_{xy}}{2} & \frac{\tau_{xz}}{2} \\ \frac{\tau_{yx}}{2} & \sigma_y & \frac{\tau_{yz}}{2} \\ \frac{\tau_{zx}}{2} & \frac{\tau_{zy}}{2} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

2.2. Prawo Hooke'a

Prawo Hooke'a głosi, że w zakresie małych odkształceń ciała zależności między naprężeniami a odpowiadającymi im odkształceniami są liniowe. Dla jednoosiowego stanu naprężenia, zrealizowanego w osiowo rozciągającym pręcie można wyrazić następującymi zależnościami:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon' = -\nu \frac{\sigma}{E}, \quad (2.5)$$

gdzie:

σ – naprężenia normalne w poprzecznym przekroju pręta [MPa],

$\varepsilon, \varepsilon'$ – odkształcenia liniowe odpowiednio w kierunku wzdłużnym i poprzecznym pręta,

E – moduł Younga [Mpa],

ν – współczynnik Poissona.

2.3. Uogólnione prawo Hooke'a dla trójosiowego stanu naprężeń.

Prawo Hooke'a w ogólnym stanie naprężenia dla materiału izotropowego wyraża się następującymi zależnościami między składowymi stanu naprężenia a składowymi stanu odkształcenia:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} &= 2\varepsilon_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},\end{aligned}\tag{2.7}$$

gdzie:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)},\tag{2.8}$$

to stała materiałowa zwana współczynnikiem sprężystości poprzecznej materiału lub modułem Kirchoffa [Mpa]

Wskutek zmiany temperatury od wartości początkowej T_0 do końcowej T występują w swobodnym od więzów zewnętrznych elemencie ciała równomierne wszechstronne odkształcenia względne liniowe równe $\alpha(T - T_0)$ [2].

Stosując zasadę superpozycji, dodajemy odkształcenia wywołane naprężeniami z odkształceniami wywołanymi rozszerzalnością cieplną otrzymując następujące związki:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha(T - T_0).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Dodając stronami powyższe równania, otrzymujemy związek między sumą naprężeń normalnych $s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ a sumą odkształceń liniowych $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$:

$$e = \frac{s}{3K} + 3\alpha(T - T_0),\tag{2.10}$$

gdzie:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (2.11)$$

to moduł objętościowej ścisłości sprężystej materiału.

Na podstawie równań 2.9 i 2.7 można wyrazić odkształcenia, za pomocą naprężeń. Związki te noszą nazwę równań Duhamela-Neumanna:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left\{ \varepsilon_x + \frac{1}{1-2\nu} [\nu e - (1+\nu)\alpha(T-T_0)] \right\}, \\ \sigma_y &= 2G \left\{ \varepsilon_y + \frac{1}{1-2\nu} [\nu e - (1+\nu)\alpha(T-T_0)] \right\}, \\ \sigma_z &= 2G \left\{ \varepsilon_z + \frac{1}{1-2\nu} [\nu e - (1+\nu)\alpha(T-T_0)] \right\}, \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.4. Podstawowe równania ruchu

Dla małych odkształceń oraz liniowej zależności między naprężeniami i odkształceniami otrzymamy następujące równanie ruchu:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}, \quad (2.13)$$

gdzie:

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3], \quad (2.14)$$

jest wektorem przemieszczeń.

Dla trójosiowego stanu naprężenia powyższe równanie możemy zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= F_x, \\ \rho_s \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= F_y, \\ \rho_s \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= F_z. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dla małych przemieszczeń większość materiałów wykazuje liniowy związek pomiędzy naprężeniem a odkształceniem co można zapisać jako:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.16)$$

gdzie:

\mathbf{D} – macierz sprężystości,

$\boldsymbol{\sigma}$ – tensor naprężeń,

$\boldsymbol{\varepsilon}$ – tensor małych odkształceń,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T). \quad (2.17)$$

W materiałach izotropowych występują dwie niezależne stałe materiałowe Lamégo λ i μ . Zostały wprowadzone aby uprościć zapis prawa Hooke'a dla materiałów izotropowych:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (2.18)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.19)$$

Uwzględniając powyższe stałe, wzór (2.9) możemy zapisać w postaci:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F}. \quad (2.20)$$

2.5. Równania termosprężystości

Rozszerzalność cieplna elementów ośrodka jest jednym z rodzajów odkształcenia. Dla ciała izotropowego odkształcenie termiczne jest wyrażone wzorem:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \Delta T \boldsymbol{\delta}, \quad (2.21)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\delta}$ – delta Kroneckera,

T – temperatura [K].

Uwzględniając równania Duhamela-Neumanna (2.12) oraz podstawiając za delte Kroneckera I otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_{ref})\mathbf{I}, \quad (2.22)$$

gdzie:

\mathbf{I} – macierz jednostkowa,

T_{ref} – temperatura początkowa [K].

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\mathbf{F} = -(3\lambda + 2\mu)\alpha\nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (2.23)$$

2.6. Związki liniowe teorii sprężystości zapisane w postaci macierzowej

Rozpatrując zagadnienia liniowej teorii sprężystości, możemy podstawowe związki zapisać w postaci macierzowej. Uwzględniając podstawowy związek między odkształceniami i naprężeniami:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.15)$$

oraz uwzględniając stałe Lamé'go (2.17) i (2.18), będące stałymi zależnościami między modułem Younga a współczynnikiem Poissona, a także zapisując macierze odkształceń (2.1) i naprężeń (2.3):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Możemy zapisać macierz sprężystości \mathbf{D} , która jest inaczej definiowana dla materiałów izotropowych, ortotropowych i anizotropowych. Dla materiałów izotropowych macierz \mathbf{D} przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Odwracając macierz \mathbf{D} otrzymujemy:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

2.7. Równanie ruchu zapisane w postaci macierzowej

Uwzględniając wcześniejsze wzory (2.15, 2.17, 2.18, 2.24, 2.25) opisujące związki liniowe teorii sprężystości zapisane w postaci macierzowej dochodzimy do ostatecznej formy równania ruchu:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla(\mathbf{c}\nabla\mathbf{u}) = \mathbf{F}, \quad (2.27)$$

gdzie:

\mathbf{c} – jest macierzą opisaną zależnością:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{14} & D_{16} \\ D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{16} & D_{46} & D_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{14} & D_{12} & D_{15} \\ D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{46} & D_{26} & D_{56} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{16} & D_{15} & D_{13} \\ D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{60} & D_{56} & D_{36} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{12} & D_{24} & D_{26} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{24} & D_{22} & D_{25} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{26} & D_{25} & D_{23} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_{16} & D_{46} & D_{66} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \\ D_{13} & D_{34} & D_{36} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{46} & D_{26} & D_{56} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \\ D_{34} & D_{23} & D_{35} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{66} & D_{56} & D_{36} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \\ D_{36} & D_{35} & D_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

gdzie:

D_{ij} – składowe macierzy sprężystości (2.25).

Przekształcenia ze wzoru (2.27) możemy zapisać następująco:

$$\mathbf{c}\nabla\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{14} & D_{16} \\ D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{16} & D_{46} & D_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{14} & D_{12} & D_{15} \\ D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{46} & D_{26} & D_{56} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{16} & D_{15} & D_{13} \\ D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{60} & D_{56} & D_{36} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{12} & D_{24} & D_{26} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{24} & D_{22} & D_{25} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{26} & D_{25} & D_{23} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_{16} & D_{46} & D_{66} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \\ D_{13} & D_{34} & D_{36} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{46} & D_{26} & D_{56} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \\ D_{34} & D_{23} & D_{35} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{66} & D_{56} & D_{36} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \\ D_{36} & D_{35} & D_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \\ \nabla u_3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{14} & D_{16} \\ D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{16} & D_{46} & D_{66} \end{bmatrix} \nabla u_1 + \begin{bmatrix} D_{14} & D_{12} & D_{15} \\ D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{46} & D_{26} & D_{56} \end{bmatrix} \nabla u_2 + \begin{bmatrix} D_{16} & D_{15} & D_{13} \\ D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{60} & D_{56} & D_{36} \end{bmatrix} \nabla u_3 \\ \begin{bmatrix} D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{12} & D_{24} & D_{26} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \end{bmatrix} \nabla u_1 + \begin{bmatrix} D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{24} & D_{22} & D_{25} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \end{bmatrix} \nabla u_2 + \begin{bmatrix} D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{26} & D_{25} & D_{23} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \end{bmatrix} \nabla u_3 \\ \begin{bmatrix} D_{16} & D_{46} & D_{66} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \\ D_{13} & D_{34} & D_{36} \end{bmatrix} \nabla u_1 + \begin{bmatrix} D_{46} & D_{26} & D_{56} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \\ D_{34} & D_{23} & D_{35} \end{bmatrix} \nabla u_2 + \begin{bmatrix} D_{66} & D_{56} & D_{36} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \\ D_{36} & D_{35} & D_{33} \end{bmatrix} \nabla u_3 \end{bmatrix} \quad (2.29) \\ = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha},$$

$$\alpha_{11} = D_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + D_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + D_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + D_{14} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + D_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + D_{15} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + D_{16} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + D_{15} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + D_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \alpha = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \\ \nabla \cdot \\ \nabla \cdot \\ \nabla \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{11}}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_{31}}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_{32}}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Ze względu na izotropowy materiał wiele ze współczynników przuymuje wartości zerowe.

2.8. Równanie przewodnictwa cieplnego

Przewodzenie ciepła jest to wymiana ciepła między częściami ciał bezpośrednio stykających się ze sobą. Przebiega zgodnie z prawem Fouriera, które mówi, że gęstość strumienia przewodzonego ciepła jest wprost proporcjonalna do gradientu temperatury w kierunku prostopadłym do powierzchni (izotermicznej). Można je wyrazić związkim wektorowym:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad (2.32)$$

gdzie:

λ - współczynnik przewodzenia ciepła $\left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$,

T – temperatura [K].

Matematyczny model wymiany ciepła przez przewodzenie przedstawiony jest za pomocą wzoru:

$$\rho c_s \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-\lambda \nabla T) = Q, \quad (2.33)$$

gdzie:

ρ – gęstość materiału $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$,

c_s – pojemność cieplna przy stałym ciśnieniu $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$,

Q – wydajność wewnętrznych źródeł cieplnych $\left[\frac{W}{m^3}\right]$.

3. Środowisko metody elementów skończonych

Symulacje komputerowe wymagają stosowania metod numerycznych do rozwiązywania układów cząstkowych równań różniczkowych określonych na obszarach o skomplikowanych geometriach. Na brzegach tych obszarów zdefiniowane są odpowiednie warunki brzegowe, a w przypadku zagadnień zależnych od czasu w rozważanym obszarze – również warunki początkowe. Co prawda rośnie wydajność obliczeniowa stosowanych komputerów, ale jednocześnie modeluje się i rozwiązuje coraz bardziej skomplikowane zagadnienia. Wymaga to rozwoju nie tylko sprzętu, ale również oprogramowania, co wiąże się między innymi z opracowywaniem efektywniejszych metod i algorytmów [3].

3.1. Metoda elementów skończonych

Metoda elementów skończonych jest jedną z metod dyskretyzacji układów geometrycznych ciągłych. Polega ona na podziale elementu na skończoną liczbę podobszarów, połączonych w tzw. węzłach. Efektem tego jest geometryczny model dyskretny o skończonej liczbie stopni swobody. Dyskretyzacji ulegają również wszelkie inne wielkości fizyczne, przedstawione w układzie za pomocą funkcji ciągłych, jak np. obciążenie. Podczas dyskretyzacji określonej wielkości fizycznej dąży się do maksymalnego zbliżenia jej postaci dyskretnej i ciągłej z zastosowaniem metod aproksymujących.

Aby rozwiązać poszczególne zagadnienie mechaniki należy zwrócić uwagę na fizyczne otoczenie układu, wymuszenie oraz utwierdzenie. Są one określane jako warunki brzegowe układu.

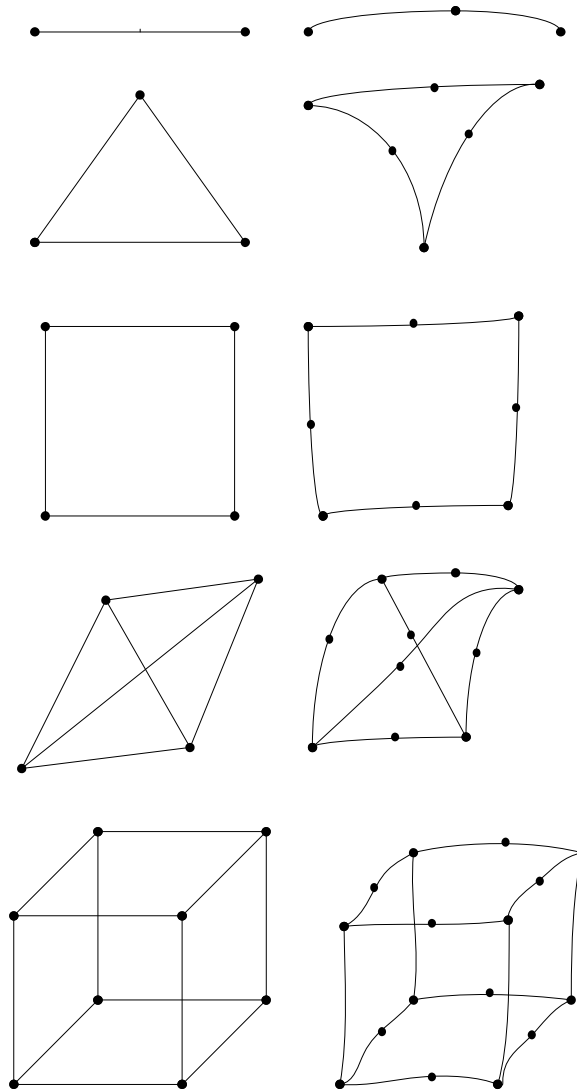
Chcąc doprowadzić do uzyskania żądanych wyników z zastosowaniem MES należy utworzyć tzw. macierze sztywności. Najpierw na podstawie wartości współrzędnych węzłów oraz wartości parametrów fizycznych elementów tworzy się macierze lokalne. Następnie znając macierze sztywności wszystkich elementów, tworzy się macierz sztywności całej struktury, tzw. macierz globalną.

Współczesny program komputerowy wykorzystujący MES składa się z trzech podstawowych modułów:

- preprocesor – przygotowuje dane dla procesora – odpowiada za przygotowanie geometrii, dobór rodzaju elementów skończonych, dyskretyzację modelu na podobszary, a także przyłożenie warunków brzegowych,
- procesor (solver) – wyznacza przemieszczenia węzłów przez rozwiązanie układu równań,
- postprocesor – odpowiada za zaprezentowanie użytkownikowi rezultatów obliczeń oraz wspomaganie interpretacji uzyskanych wyników,

Przed dyskretyzacją modelu z reguły poddaje się go odpowiedniemu uproszczeniu, podczas którego należy usunąć elementy nieistotne z punktu widzenia analizowanego zjawiska jak na przykład fazy czy otwory. Geometria analizowanych układów może różnić się od siebie w sposób znaczący. Dlatego też, podczas przygotowywania analizy MES dostępnych jest bardzo wiele rodzajów elementów skończonych (przykładowe na Rysunku 2), a do kryteriów ich podziału zaliczyć można:

- liczbę wymiarów, którymi można opisać element,
- kształt geometryczny,
- typ i stopień wielomianu założonej funkcji kształtu elementu skończonego,
- liczbę węzłów w elemencie,
- rodzaje więzów ogólnych, nałożonych na element skończony,

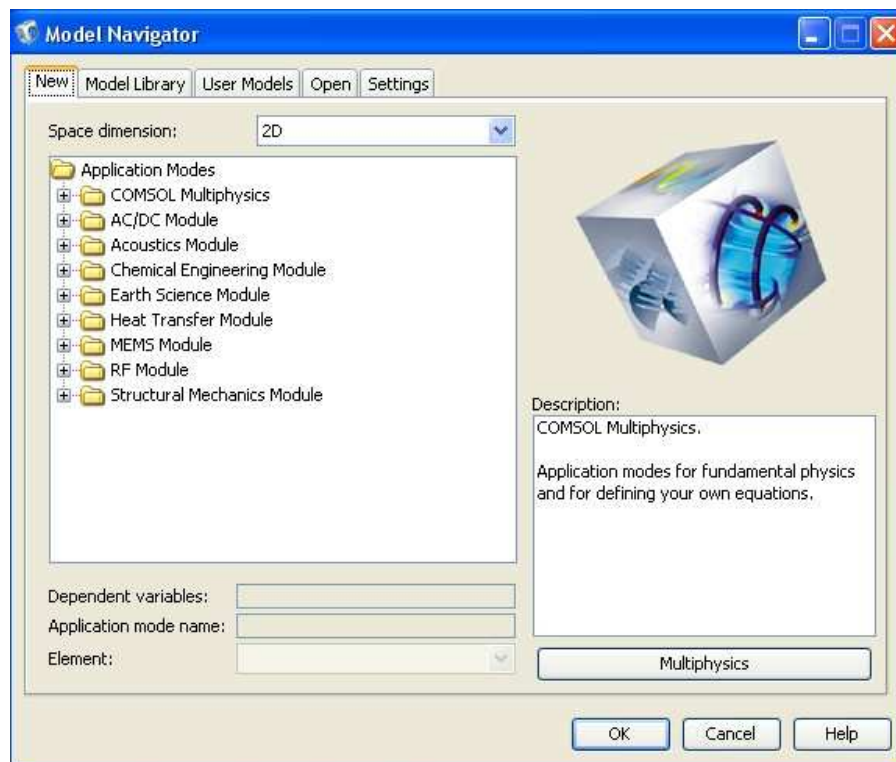


Rysunek 2. Rodzaje elementów skończonych [3; 4]

3.2. Środowisko COMSOL Multiphysics

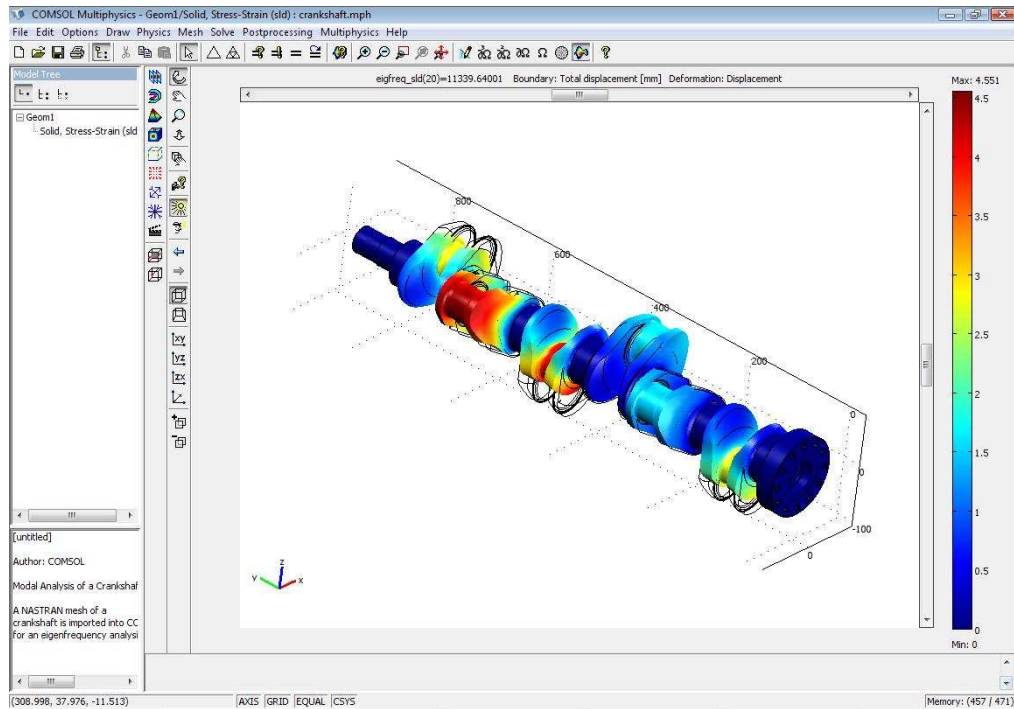
COMSOL Multiphysics jest pakietem symulacyjnym, rozwiązującym układy nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych przy wykorzystaniu metody elementów skończonych w jednym, dwóch lub trzech wymiarach. Jego elastyczność i cechy praktyczne pozwalają skoncentrować się na modelowanych zjawiskach bez konieczności dużego doświadczenia w użytkowaniu konkretnego programu [4]. Jest on wyposażony w graficzny interfejs użytkownika (GUI) pozwalający na szybkie i wygodne tworzenie modeli, uruchamianie symulacji oraz wizualizację wyników. Geometrię modelu można stworzyć w programie wykorzystując tryb rysowania (Draw Mode) lub zaimportować z jednego z obsługiwanych programów CAD (np. ProEnginner). Dzięki łatwej

możliwości zmian parametrów czy geometrii obiektu można szybko poznać i zrozumieć wpływ różnych parametrów na zachowanie całego systemu. Ułatwia to późniejsze przejście do zaawansowanej analizy systemu, projektowania i optymalizacji.



Rysunek 3. Startowe okno programu zawierające dostępne moduły

COMSOL Multiphysics pozwala na łatwe badanie, symulowanie i analizowanie złożonych zjawisk zachodzących w modelowanym systemie. Jest stosowany w wielu różnych obszarach zastosowań inżynierskich i naukowych. Zastosowano w nim modelowanie wielodomenowe, które pozwala w badanych systemach opisywać wiele różnych zjawisk fizycznych i modelować je równocześnie. Uzyskane wyniki odzwierciedlają zachowanie rzeczywistego systemu.



Rysunek 4. Przykładowa symulacja w środowisku COMSOL Multiphysics

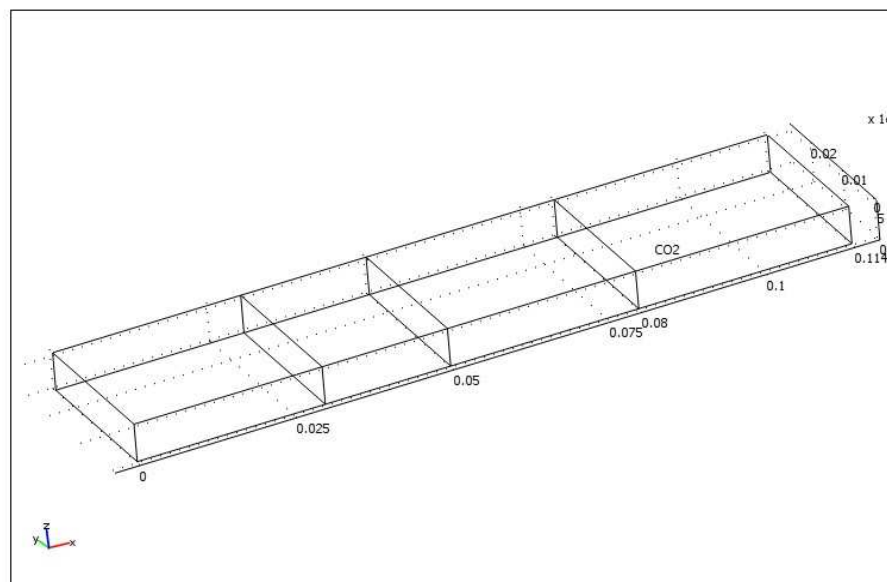
Pakiet COMSOL zawiera szereg dodatkowych modułów zwiększających funkcjonalność całego pakietu:

- AC/DC Module
- Acoustics Module
- CAD Import Module
- Chemical Engineering Module
- Earth Science Module
- Heat Transfer Module
- Material Library
- MEMS Module
- RF Module
- Structural Mechanics Module
- Optimization Lab
- Comsol Reaction Engineering Lab.

4. Założenia modelowe

Do sprawdzania odkształceń pod wpływem temperatury posłużono się modelem prostopadłościowej próbki o wymiarach 114 x 26 x 6 mm. Wprowadzono następujące założenia modelowe:

- ciało jest jednorodne, izotropowe,
- podlega prawu Hooke'a oraz ulega deformacji w zakresie małych odkształceń,
- charakterystyki materiałowe ciała, takie jak moduł sprężystości wzłużnej E , współczynnik Poissona ν oraz współczynnik rozszerzalności liniowej α są stałe w rozpatrywanym przedziale temperatur.



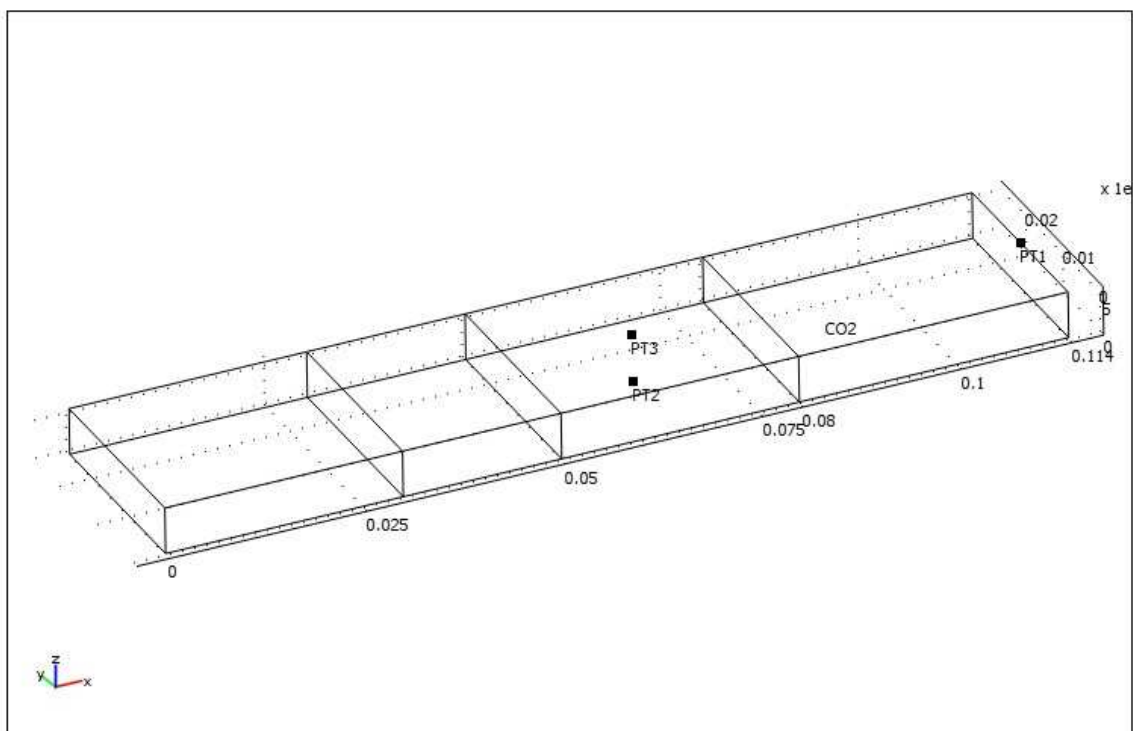
Rysunek 5. Model 3D badanej próbki

Jest ona wykonana z porowatego materiału ceramiczne – żywicy organicznej, o następujących właściwościach materiałowych:

- $\rho = 1500 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$
- $k = 0.55 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$
- $E = 1e + 10 [Pa]$
- $\nu = 0.25$
- $\alpha = 2.2e - 5 \left[\frac{1}{K} \right]$
- $C_p = 840 \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$

Do symulacji odkształcenia badanego elementu w stanie nieustalonym wykorzystano moduł przepływu ciepła (Heat Transfer Module), a także moduł mechaniki konstrukcji (Structural Mechanics Module) pakietu symulacyjnego COMSOL.

Model trójwymiarowy badanej próbki zawiera 3 punkty pomiarowe. Pierwszy z nich umieszczony jest na środku końcowej krawędzi, drugi oraz trzeci na spodzie, oraz górze pola próbki poddanemu „podgrzewaniu”. Oznaczone zostały kolejno jako PT1, PT2 oraz PT3. W pierwszym punkcie pomiarowym sprawdzane będzie odkształcenie. Natomiast w pozostałych dwóch będzie rejestrowana temperatura.



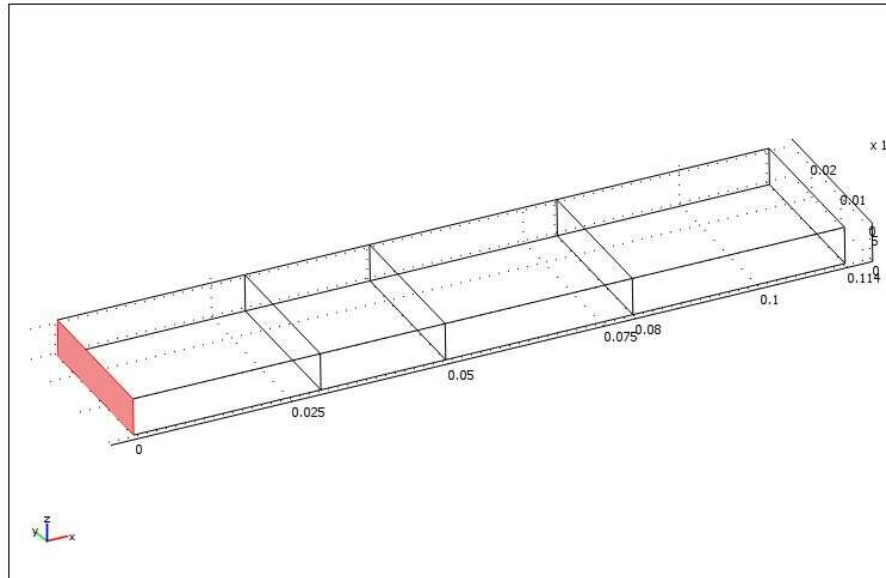
Rysunek 6. Model 3D, z naniesionymi punktami pomiarowymi PT1, PT2 oraz PT3

Rozważany problem termiczno-mechaniczny jest opisany w programie COMSOL przez następujące równania bezwymiarowe z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi:

- równanie ruchu w postaci macierzowej (2.27),
- równanie wymiany ciepła przez przewodnictwo cieplne (2.33).

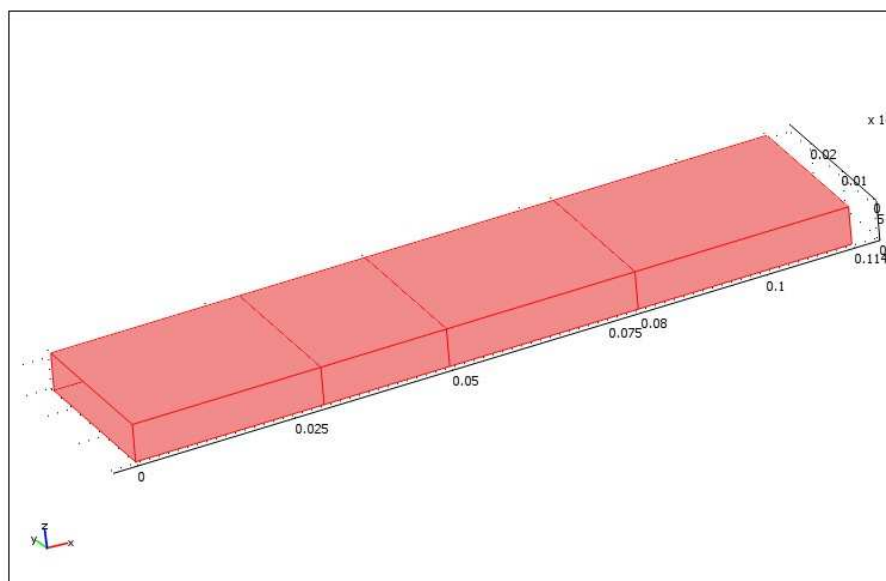
W module Structural Mechanics, w którym wprowadzono stałe materiałowe (moduł Young'a, współczynnik Poissona, współczynnik rozszerzalności cieplnej, gęstość), zadano ciężar próbce, a także uwzględniono w opcjach rozszerzalność cieplną – ustalając przy tym temperaturę początkową na 293.15 K.

Próbkę jest utwierdzona, poprzez zablokowanie krawędzi biegnącej wzdłuż osi y:



Rysunek 7. Badany model z utwierdzoną (Fixed) powierzchnią przebiegającą wzdłuż osi y

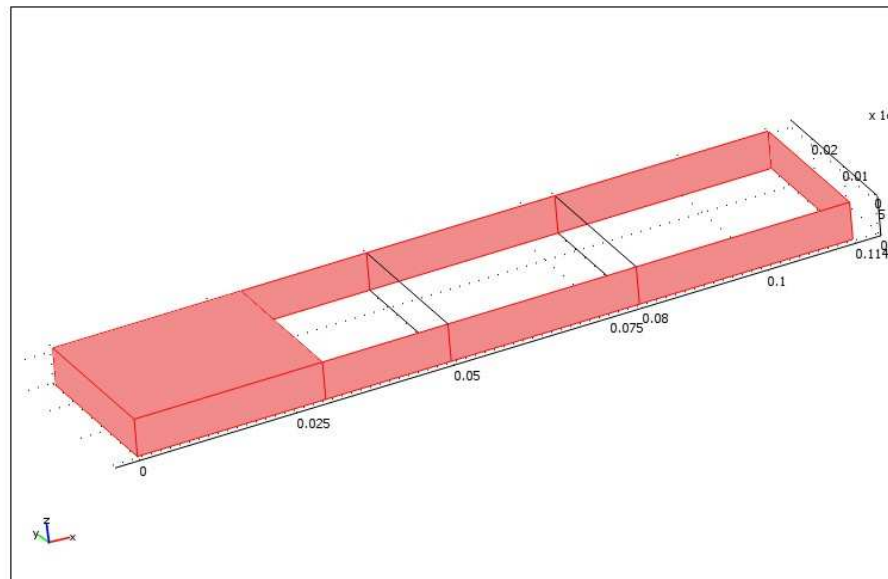
Reszta pozostawiona jest swobodnie, aby próbka mogła ulegać swobodnie odkształceniom:



Rysunek 8. Badany model z pozostałymi krawędziami ustalonymi jako swobodne (Free)

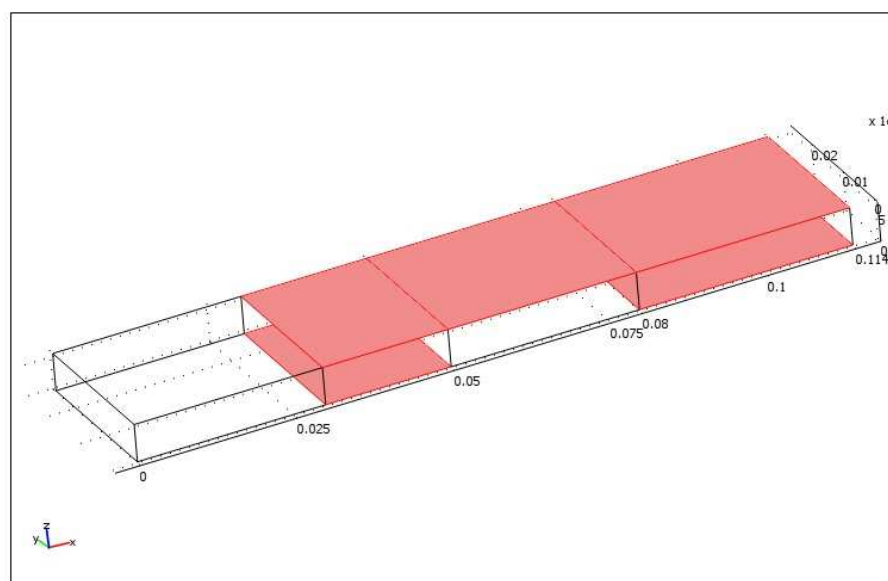
W module General Heat Transfer, w którym także wprowadzono stałe materiałowe (gęstość, ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, współczynnik przewodnictwa cieplnego), ustalono temperaturę początkową na 293.15 K.

Następnie ustalono warunki brzegowe. Najpierw wybrano powiecznie izolowane cieplnie (Insulation) :



Rysunek 9. Zaznaczone powierzchnie izolowane cieplnie

W kolejnym zadano przepływ ciepła (Heat Flux), dla odpowiednich powierzchni:



Rysunek 10. Zaznaczone powierzchnie z zadaniem przepływu ciepła

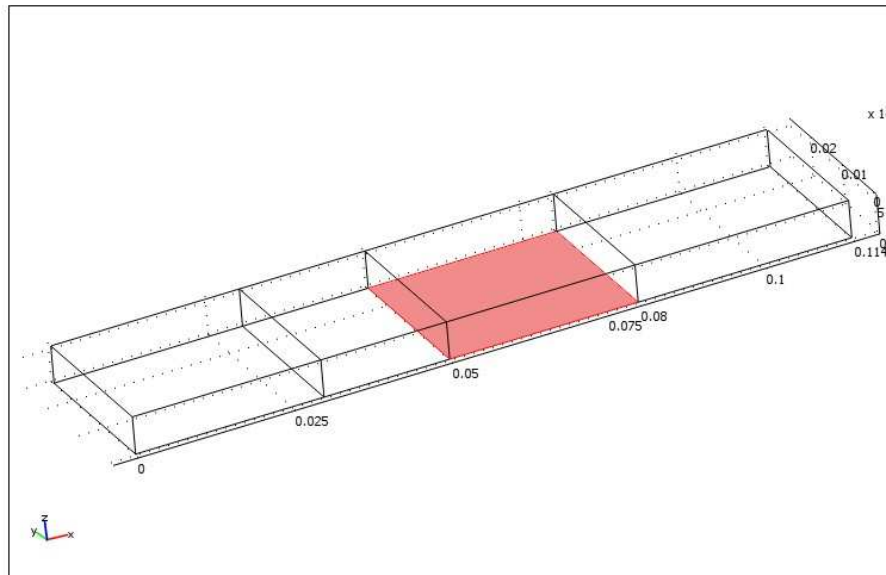
Wprowadzono także dla tych pól odpowiednie stałe:

$$q_0 = 0 \left[\frac{W}{m^2} \right],$$

$$h = 45 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right],$$

$$T_{inf} = 293.15 \text{ [K]}.$$

Natomiast dla pozostałej powierzchni, która jest ogrzewana także ustalono przepływ ciepła (Heat Flux):



Rysunek 11. Zaznaczone powierzchnie z zadaniem przepływem ciepła

Zmieniono natomiast stałe:

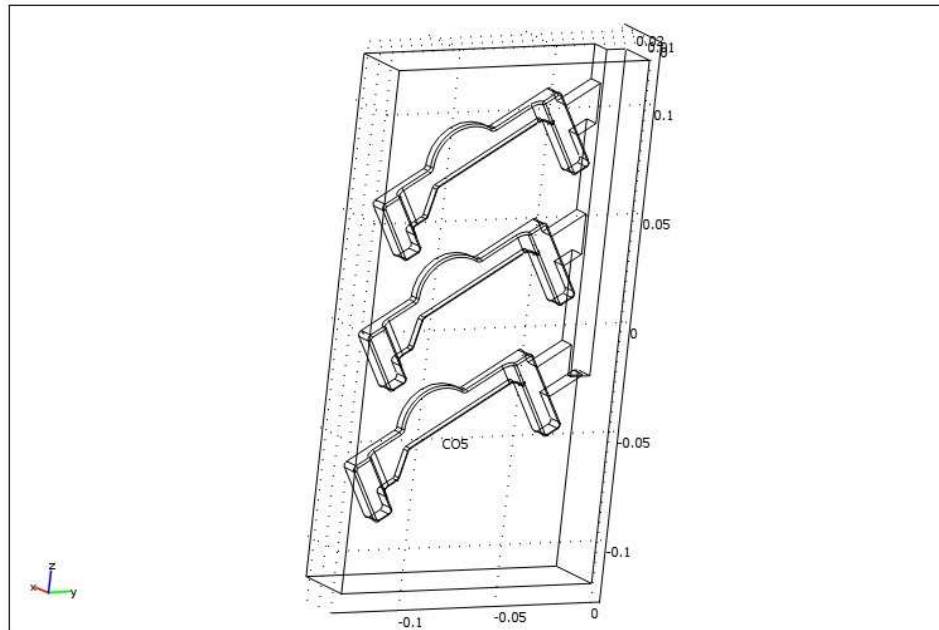
$$q_0 = 0 \left[\frac{W}{m^2} \right],$$

$$h = 150 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right],$$

$$T_{inf} = 1223.15 \text{ [K]}.$$

W drugiej części badań symulacji poddano bardziej złożony model. Jest to forma przeznaczona do odlewania znajdująca się w skrzynce formierskiej. Wykonana jest ona z badanego wcześniej materiału. Jest ona zalewana ciekłym metalem o temperaturze 1223.15 [K].

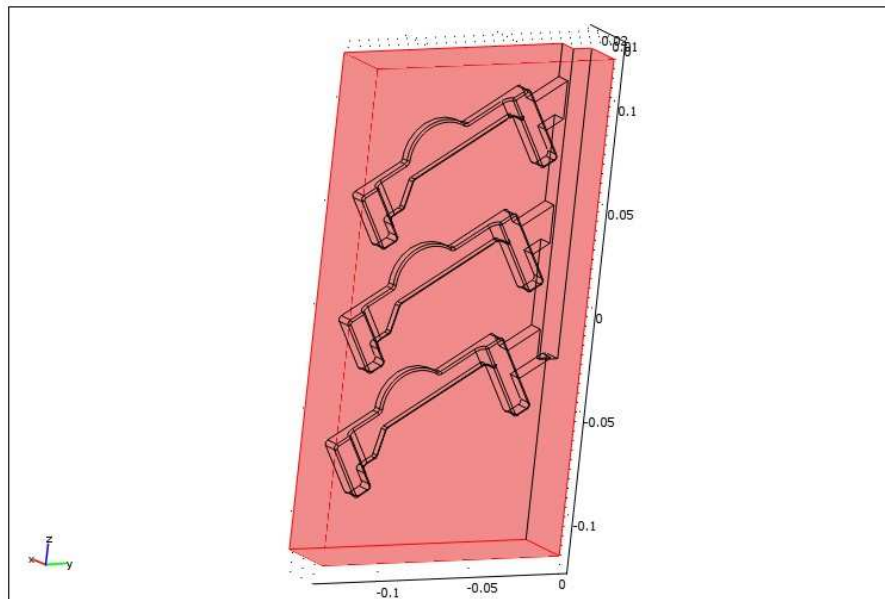
Do badań posłużono się uproszczoną połową modelu rzeczywistego.



Rysunek 12. Badana forma

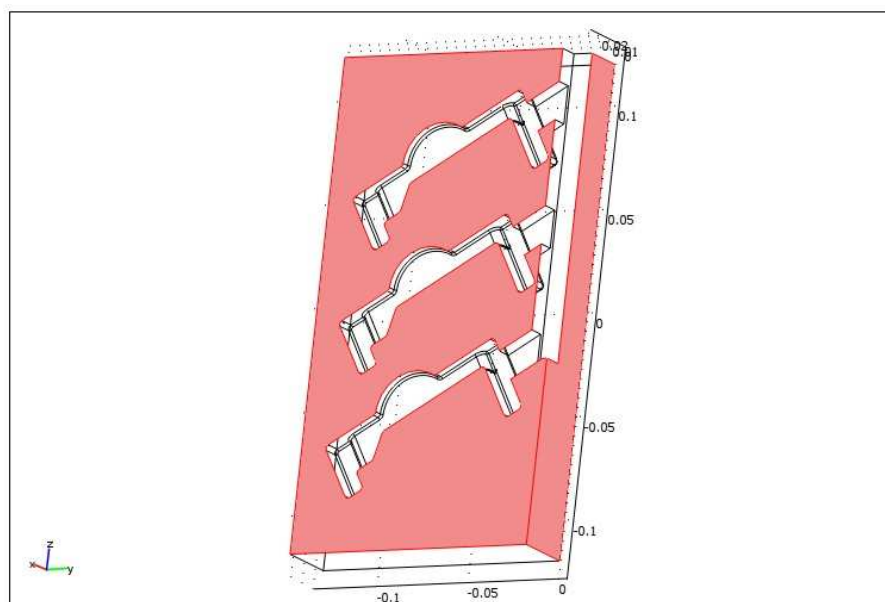
W module Structural Mechanics, wprowadzono stałe materiałowe takie same, jak dla wcześniej badanej próbki, a także uwzględniono w opcjach rozszerzalność cieplną – ustalając przy tym temperaturę początkową na 293.15 K.

Zablokowano wybrane powierzchnie, przedstawiono na poniższym rysunku poprzez ich utwierdzenie (Fixed). Pozostałe powierzchnie pozostawiono swobodne.



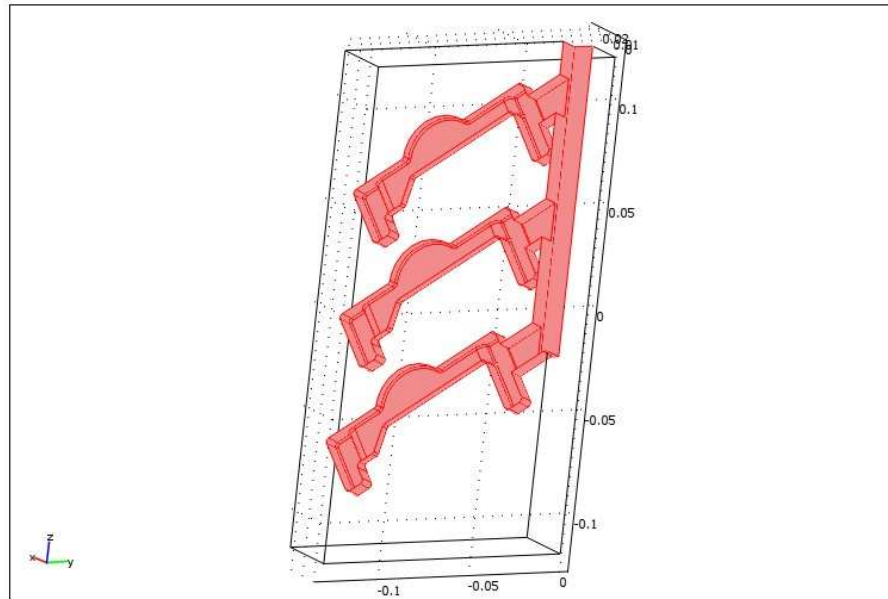
Rysunek 13. Utwierdzone powierzchnie

Jako, że do badań posłużono się połową z jednej z części formy oznaczono płaszczyzny widoczne na Rysunku 17 jako powierzchnie symetryczne.



Rysunek 14. Zaznaczone płaszczyzny symetrii

W drugim wykorzystywanym module – Heat Transfer dla wnętrza formy oraz układu wlewowego ustalono przepływ ciepła (Heat Flux).



Rysunek 15. Część formy przeznaczona do zalania

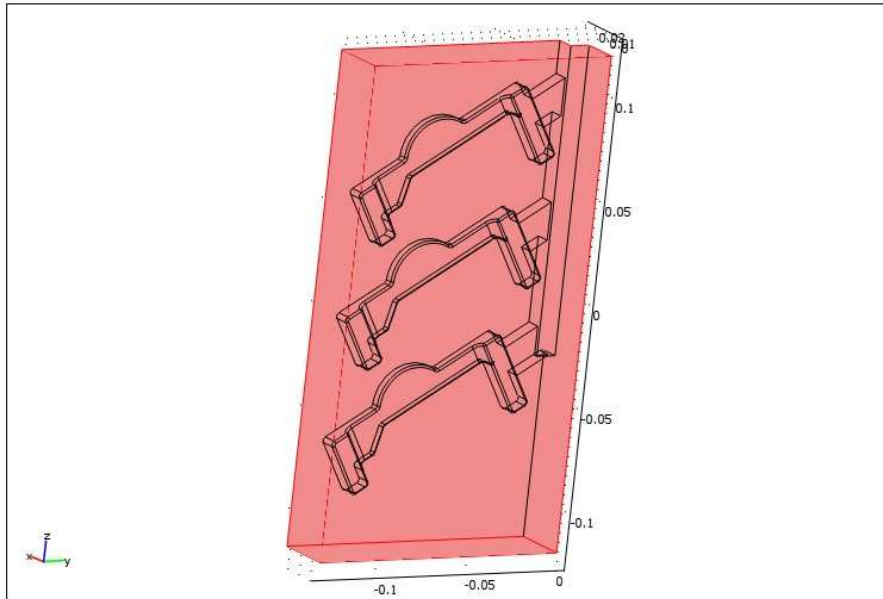
Wprowadzono także dla tych pól odpowiednie stałe:

$$q_0 = 0 \left[\frac{W}{m^2} \right],$$

$$h = 150 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right],$$

$$T_{inf} = 1223.15 \text{ [K]}.$$

Dla pozostałych powierzchni także ustalono przepływ ciepła:



Rysunek 16. Przepły ciepła dla zaznaczonych powierzchni

Zmieniono natomiast stałe:

$$q_0 = 0 \left[\frac{W}{m^2} \right],$$

$$h = 45 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right],$$

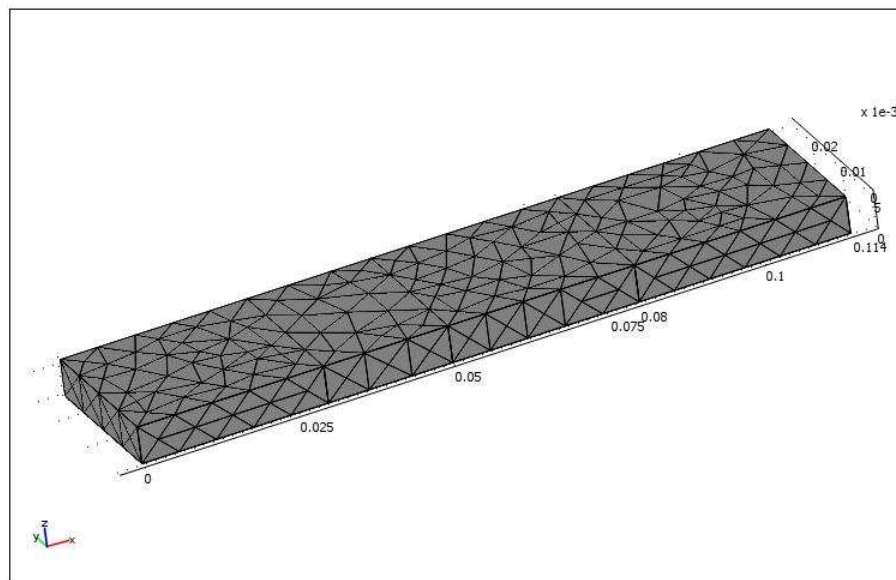
$$T_{inf} = 293.15 \text{ [K]}.$$

5. Wyniki numeryczne symulacji

Przygotowany model pokryto siatką elementów skończonych. Zastosowano jedno, ze standardowych ustawień trybu Mesh Mode zapewniającą wystarczającą dokładność obliczeń.

Właściwości wybranej siatki:

- Liczba stopni swobody – 8070
- Ilość węzłów – 429
- Ilość elementów – 1319
- Ilość elementów brzegowych – 790



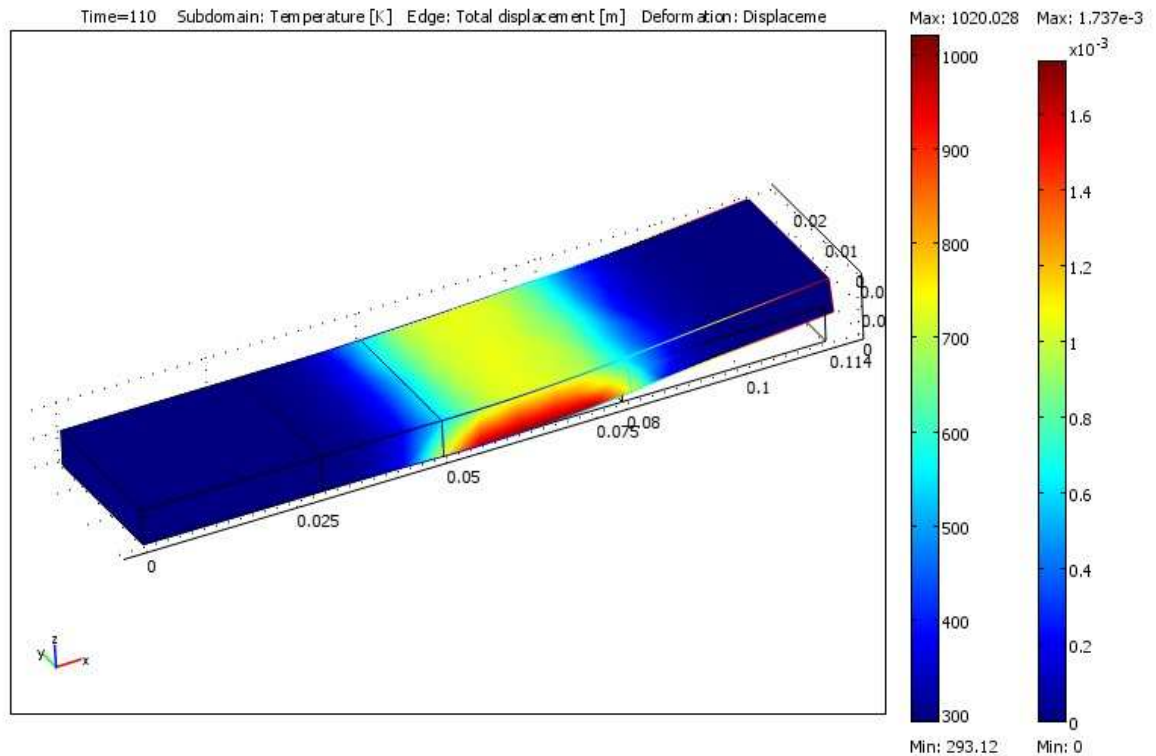
Rysunek 17. Badany model pokryty siatką

W ostatnim kroku w parametrach rozwiązywania problemu (Solver Parameters) ustalono przedział czasowy, dla którego szukane zagadnienie ma zostać obliczone dla przedziału czasu od 0 do 110 sekund.

Następnie zatwierdzono ustawienia uruchamiając tym samym obliczenia zadanej symulacji.

Wyniki zapisano z krokiem 1 sekundy.

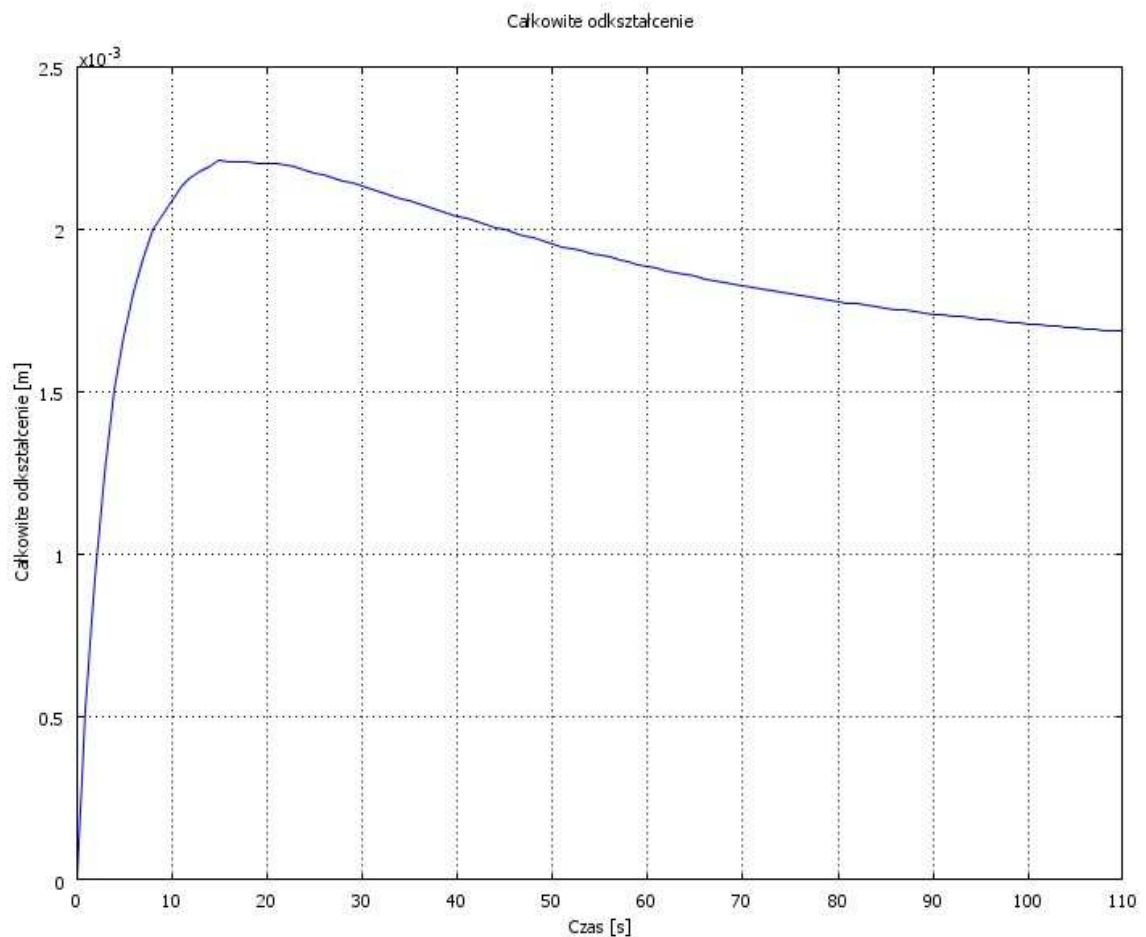
Uzyskane wyniki zostały przedstawione w programie COMSOL przy pomocy interfejsu graficznego w postaci odkształconej próbki z naniesionym rozkładem temperatur i odkształceń w formie barwnej bryły.



Rysunek 18. Wyniki symulacji badanej próbki

Po prawej stronie ilustracji symulacji znajdują się dwa barwne wykresy przedstawiające zakres temperatur i odkształceń, dla badanego numerycznie przykładu.

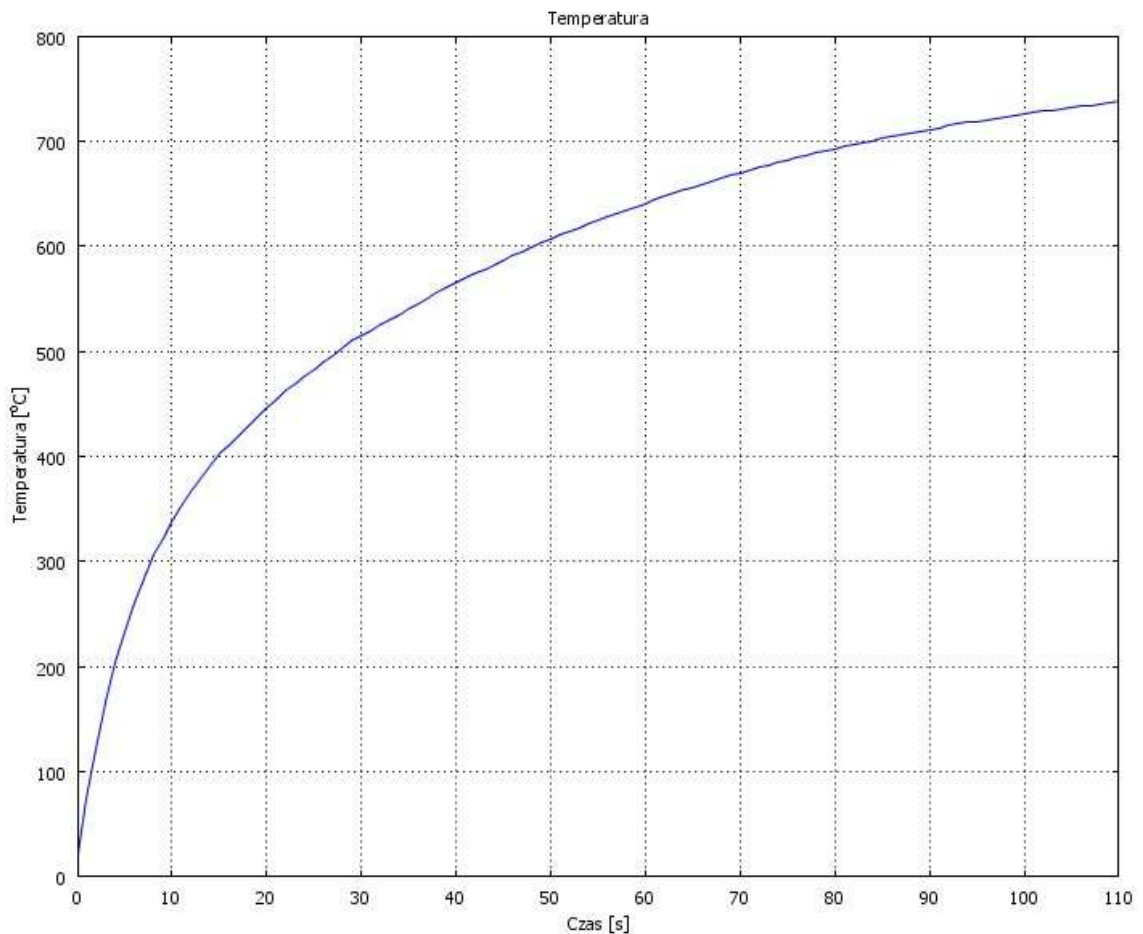
Z punktu pomiarowego oznaczonego jako PT1 odczytano odkształcenia od czasu i na tej podstawie stworzono Wykres 1.



Wykres 1 – Całkowite odkształcenie od czasu

Na podstawie powyższego wykresu można stwierdzić, że odkształcenie próbki na początku gwałtownie wzrasta i w ciągu 15 sekund osiąga wartość maksymalną, która wynosi $2,29 \cdot 10^{-3}$ m. Później wartość ta powoli spada, aby na końcu badanego przedziału czasowego osiągnąć wartość równą $1,73 \cdot 10^{-3}$ m.

Z kolejnego punktu pomiarowego oznaczonego jako PT2 sporządzono Wykres 2, na podstawie otrzymanych wartości zmiany temperatury w czasie.



Wykres 2 – Zmiana temperatury w czasie w punkcie pomiarowym PT2

Na podstawie wykresu można stwierdzić, że temperatura w całym badanym przedziale czasowym rośnie. Do 8 sekundy gwałtownie rośnie, by później stopniowo coraz wolniej wzrastała, aż do osiągnięcia uprzednio zadanej temperatury 950°C ($1223,15\text{ K}$).

Z ostatniego punktu pomiarowego PT3 sporządzono analogiczny Wykres 3, jak dla punktu pomiarowego PT2.

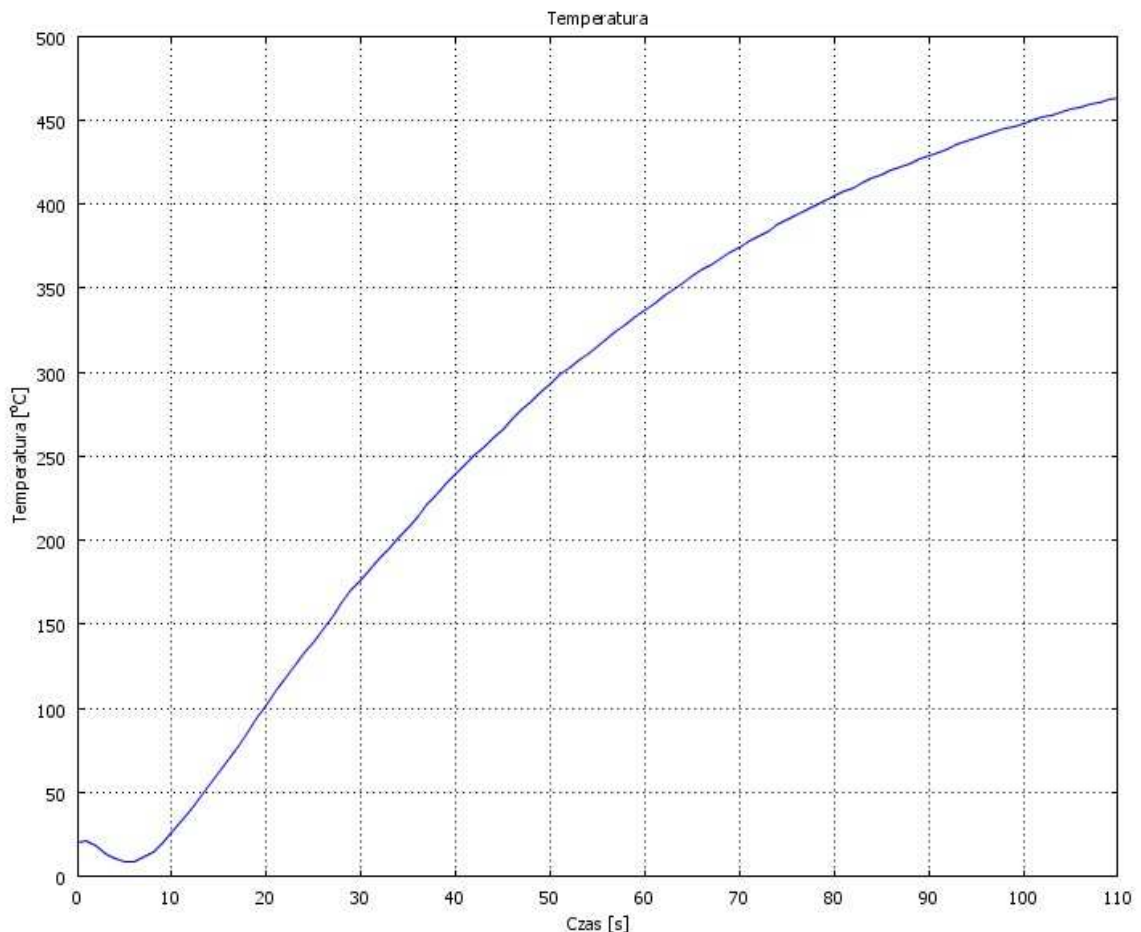


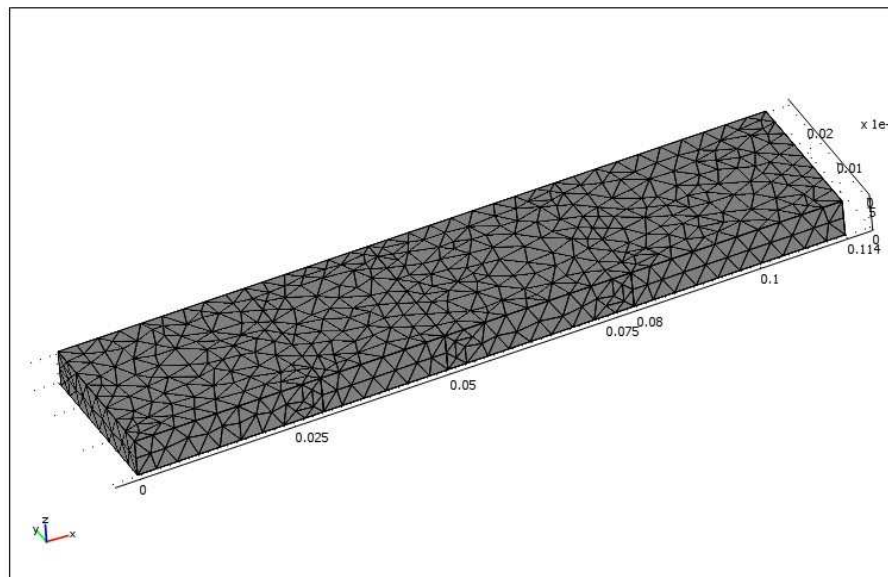
Tabela 3 – Zmiana temperatury w czasie w punkcie pomiarowym PT3

Z powyższego wykresu wyrugować można, że temperatura w badanym punkcie spadła z zadanej uprzednio temperatury otoczenia wynoszącej 20°C ($293,15\text{ K}$), w ciągu 6 sekund do wartości równej około $7,5^{\circ}\text{C}$ ($280,65\text{ K}$), by później stopniowo wzrastać, aż do osiągnięcia maksymalnej temperatury wynoszącej $467,75^{\circ}\text{C}$ ($740,9\text{ K}$) dla czasu 110 sekund, będącego końcem badanego przedziału.

W celu porównania dokładności obliczeń przeprowadzono symulację, dla tego samego modelu zagęszczając jedynie siatkę elementów skończonych.

Właściwości wybranej siatki:

- Liczba stopni swobody – 24373
- Ilość węzłów – 1228
- Ilość elementów – 4342
- Ilość elementów brzegowych – 1956

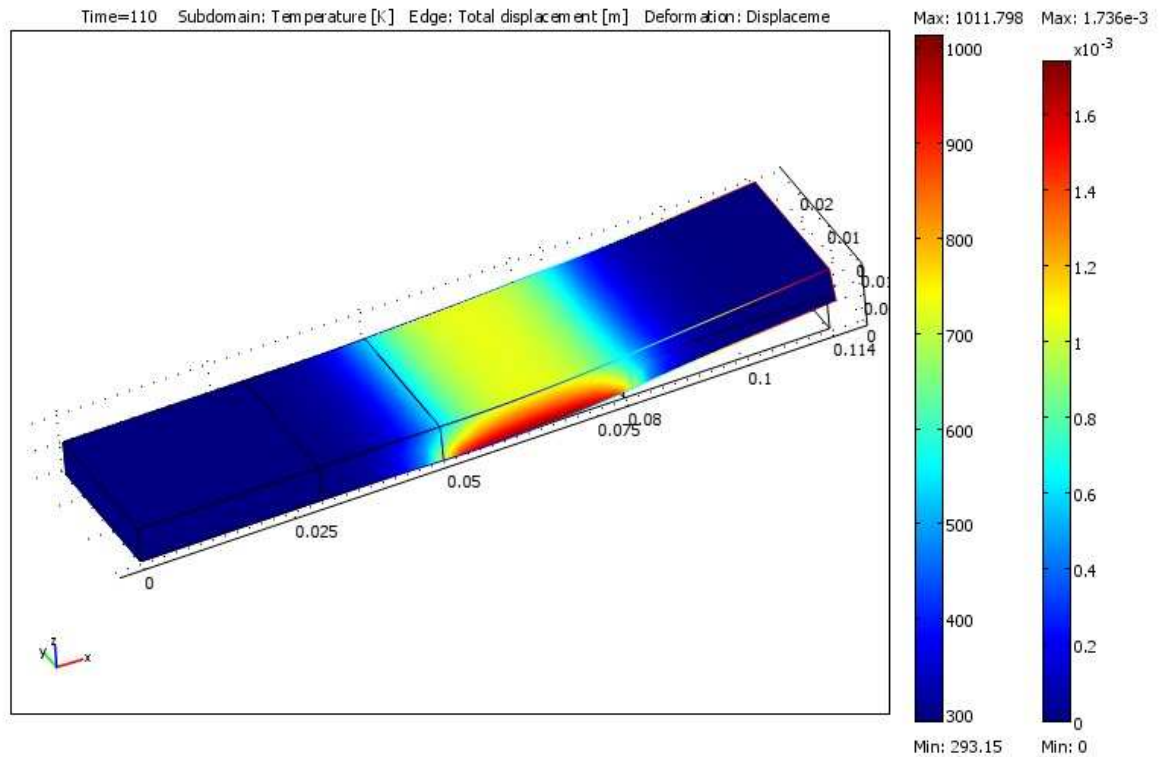


Rysunek 19. Badany model pokryty siatką

Parametrach rozwiązywania problemu (Solver Parameters) pozostawiono bez zmian.

Następnie zatwierdzono ustawienia uruchamiając tym samym obliczenia zadanej symulacji.

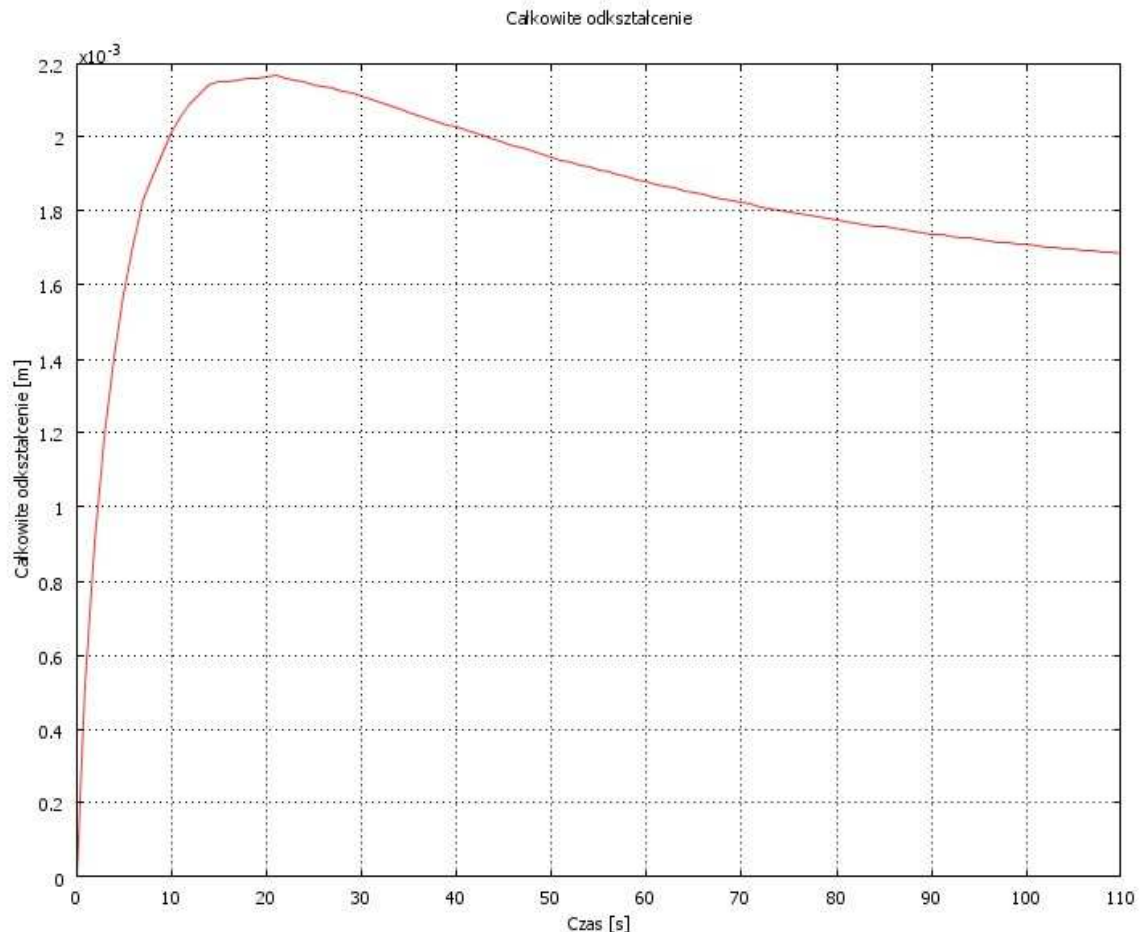
Tak jak w przypadku poprzednich badań uzyskano wykres w postaci odkształconej próbki z naniesionym zakresem temperatur i odkształceń oznaczonych różnymi kolorami.



Rysunek 20. Wyniki symulacji badanej próbki

Zarówno temperatura maksymalna, jak i wartość odkształceń zmniejszyła się w porównaniu do poprzednich badań wykonanych dla mniej dokładnej siatki.

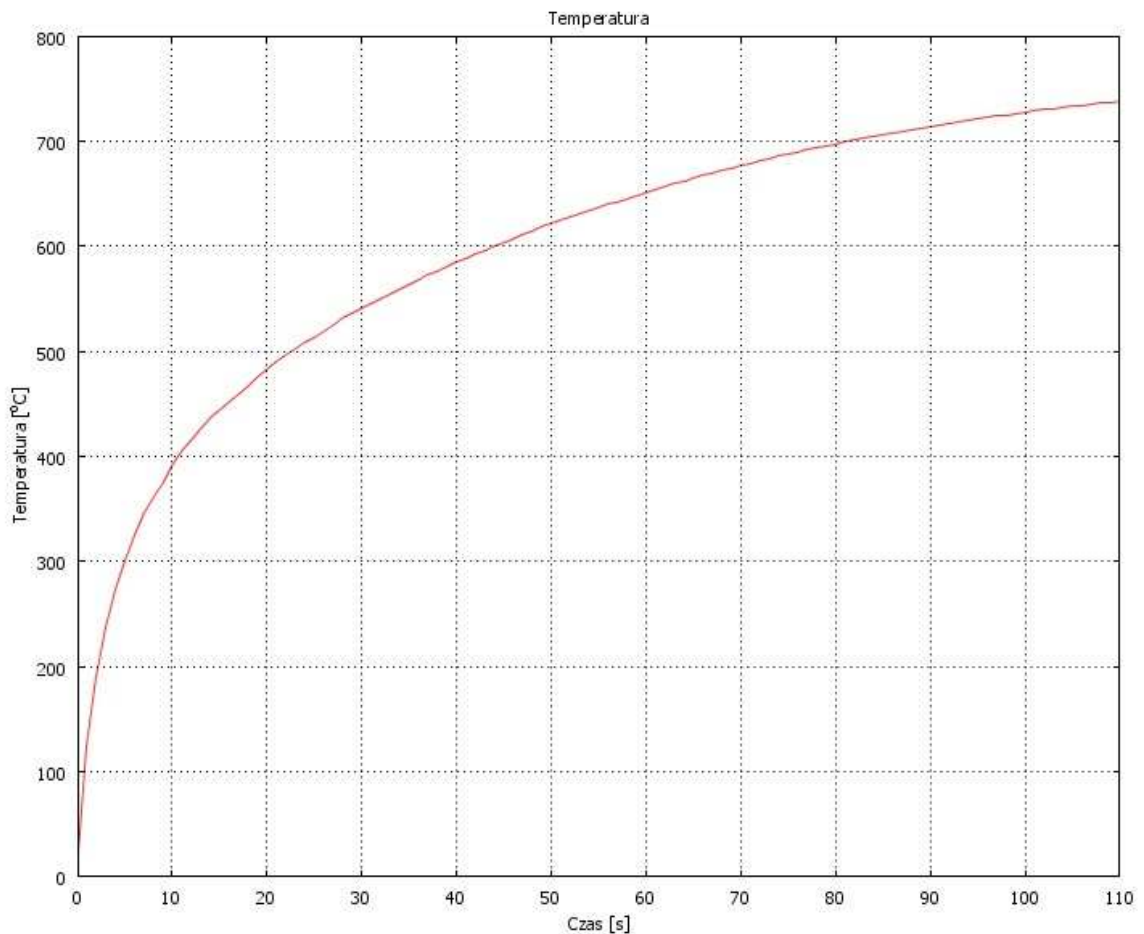
Wartość odkształceń zmieniających się w czasie odczytano z punktu pomiarowego oznaczonego jako PT1, i na tej podstawie stworzono Wykres 1.



Wykres 4 – Całkowite odkształcenie od czasu

Na podstawie powyższego wykresu można stwierdzić, że odkształcenie próbki na początku gwałtownie wzrasta i w ciągu 21 sekund osiąga wartość maksymalną, która wynosi $2,19 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Później wartość ta powoli spada, aby na końcu badanego przedziału czasowego osiągnąć wartość równą $1,69 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. W porównaniu do poprzedniego rozkładu zmienił się czas, w którym osiągnięto maksymalną wartość oraz sama wartość, która nieznacznie zmniejszyła się. Można także zauważyć przesunięcie wykresu w prawą stronę.

Z następnego punktu pomiarowego oznaczonego jako PT2 sporządzono Wykres 2 na podstawie otrzymanych wartości zmiany temperatury w czasie.



Wykres 5 – Zmiana temperatury w czasie w punkcie pomiarowym PT2

Na podstawie wykresu można stwierdzić, że temperatura w całym badanym przedziale czasowym rośnie. Do 10 sekundy gwałtownie rośnie, by później stopniowo coraz wolniej wzrastała, aż do osiągnięcia uprzednio zadanej temperatury 950°C ($1223,15\text{ K}$).

Z ostatniego punktu pomiarowego PT3 sporządzono podobnie jak w przypadku punktu pomiarowego PT2 Wykres 3 przedstawiający zmianę temperatury w czasie.

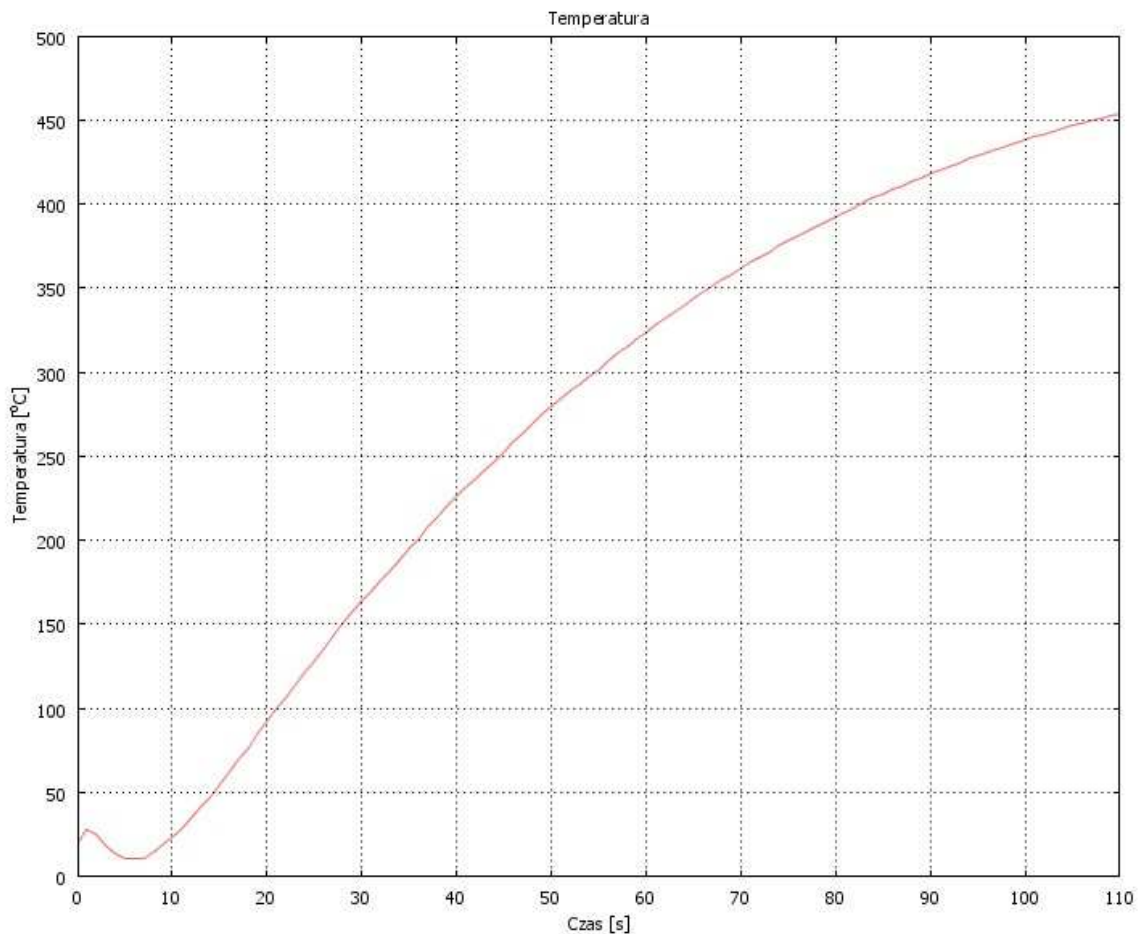


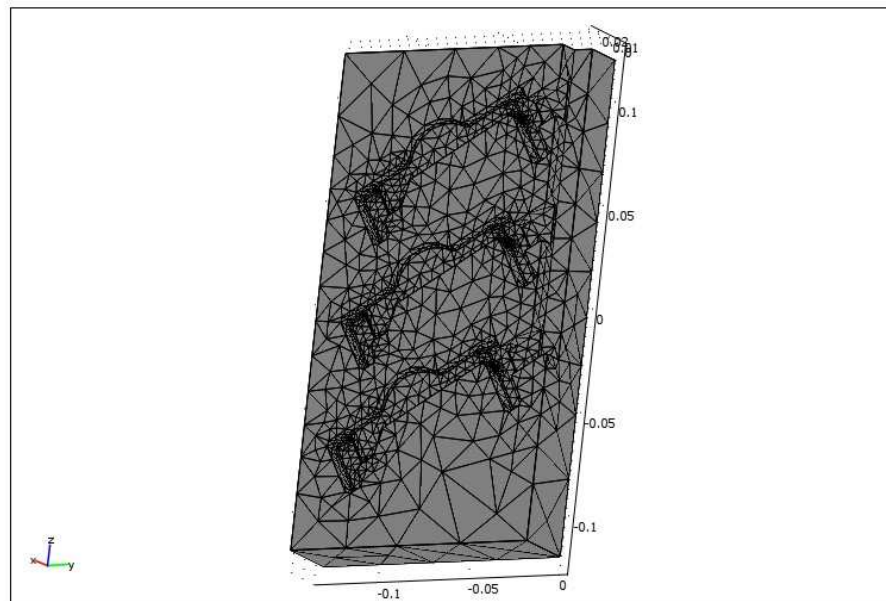
Tabela 6 – Zmiana temperatury w czasie w punkcie pomiarowym PT3

Z powyższego wykresu wyrugować można, że temperatura w badanym punkcie spadła z zadanej uprzednio temperatury otoczenia wynoszącej 20°C (293,15 K), w ciągu 5 sekund do wartości równej około 10°C (283,15 K), by później stopniowo wzrastać, aż do osiągnięcia maksymalnej temperatury wynoszącej 455 °C (728,15 K) dla czasu 110 sekund, będącego końcem badanego przedziału.

Zamodelowany obiekt pokryto siatką o następujących parametrach.

Właściwości wybranej siatki:

- Liczba stopni swobody – 84377
- Ilość węzłów – 3866
- Ilość elementów – 17146
- Ilość elementów brzegowych – 3920

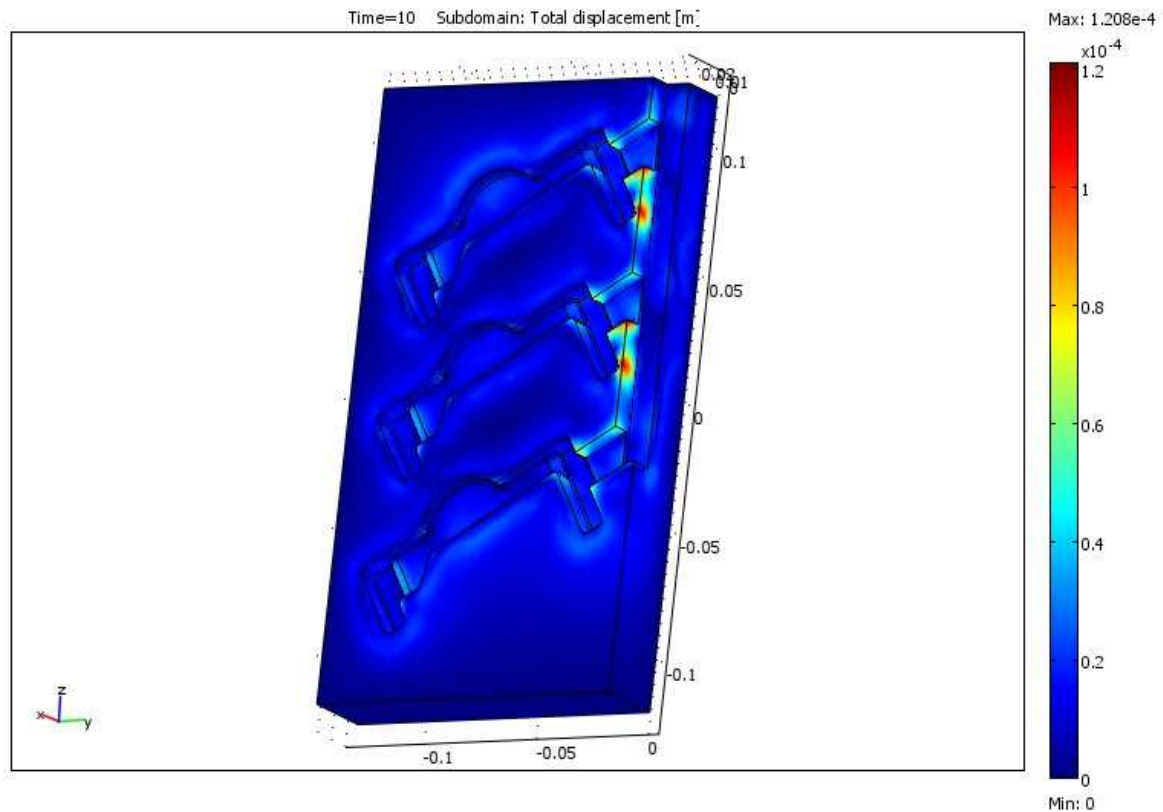


Rysunek 21. Badany model pokryty siatką

Czas, dla którego miały zostać przedstawione wyniki ustalono na 10 sekund.

Następnie zatwierdzono ustawienia uruchamiając tym samym obliczenia zadanej symulacji.

Uzyskane wyniki zostały przedstawione, tak jak w poprzednim badaniu – z naniesionym zakresem odkształceń w formie barwnej bryły.



Rysunek 22. Rozwiązanie badanej symulacji

Na podstawie Rysunku 22 można stwierdzić, że odkształcenia koncentrują się wzdłuż układu wlewowego. Tam też osiągają wartości maksymalne wynoszące $1.208 \cdot 10^{-4}$. W pozostałych obszarach odkształcenia w porównaniu do maksymalnych uzyskanych wartości, są stosunkowo niewielkie.

6. Podsumowanie

W pracy przedstawiono model komputerowej symulacji odkształcenia układu mechanicznego pod wpływem temperatury. Modelu ten stworzono w środowisku symulacyjnym COMSOL Multiphysics, który umożliwia obliczanie różnych parametrów wykorzystując metodę elementów skończonych. W programie tym wykorzystano dwa podstawowe moduły pozwalające wyznaczyć temperaturę podczas nieustalonego przepływu ciepła oraz na skutek jej zmiany obliczyć wielkość odkształceń. Do obliczenia każdej z wymienionych wielkości potrzebna jest znajomość podstawowych właściwości termomechanicznych, a także warunki brzegowe badanego modelu.

Wielkości obliczane przy pomocy programu komputerowego są wyznaczone przy pomocy metody elementów skończonych, dlatego do ich obliczenia konieczne było przeprowadzenia podstawowych działań na uprzednio wygenerowanych macierzach sztywności.

W rozdziale 5 przedstawiono wyniki przykładowej symulacji odkształcenia układu mechanicznego pod wpływem temperatury. W tym celu posłużono się przykładem próbki ceramicznego materiału przeznaczonego na piasek formierski, o zadanych konkretnych warunkach brzegowych. Pozwoliło to zauważyć pewne zależności definiujące zachowanie się materiału poddanego działaniu podwyższonej temperatury. W tym celu sprawdzono przebieg temperatury oraz odkształceń w czasie, a ich rezultat przedstawiono na wykresach. Zbadano także bardziej złożony przypadek modelu z badanego materiału na przykładzie formy odlewniczej.

W pracy rozpatrywano prostopadłościenną próbkę o wymiarach 114x26x6 mm, utwierdzoną z jednej strony. Zamodelowano także działanie palnika ogrzewającego materiał od spodu o temperaturze 1223,15 K. Dla sprawdzenia dokładności wyników symulację wykonano dla różnych ilości elementów skończonych. Dzięki gęściejszej siatce uzyskano dokładniejsze wyniki, ale było to okupione znacznym wzrostem czasu obliczeń. Różnice wartości wybranych parametrów były stosunkowo niewielkie. Przeprowadzono także symulację, dla bardziej złożonego obiektu, jakim była forma odlewnicza. Uzyskane niewielkie odkształcenia formy potwierdziły sprawdzone wcześniej dobre właściwości termo-mechaniczne badanego materiału.

Na podstawie przeprowadzonych badań symulacji komputerowej odkształcenia próbki pod wpływem temperatury można stwierdzić, że założony cel pracy został osiągnięty.

Literatura

- [1] Ignaszak Z., Popielarski P., *Heat Transfer during Hot Distortion Test of Ceramic Porous Material Bonded by Various Resins*, Defect and Diffusion Forum, 2009 nr 3, str. 382-387
- [2] Orłoś Z. (red.), *Naprężenia cieplne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991
- [3] Stręk T., *Analiza wymiany ciepła w płynie ferromagnetycznym z wykorzystaniem metody elementów skończonych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008
- [4] <http://www.tobl.krakow.pl/CategoryView.php?categoryId=48>
- [5] Nowacki W., *Termosprężystość*, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 1972
- [6] Gabryszewski Z., *Teoria sprężystości i plastyczności*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2001
- [7] Jakowluk A., *Procesy pełzania i zmęczenia w materiałach*, Wydawnictwo Naukowe-Techniczne, Warszawa 1993
- [8] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., *Wytrzymałość materiałów, T.2*, Wydawnictwo Naukowe-Techniczne, Warszawa 1997
- [9] Joniak S. (red.), *Badania eksperymentalne w wytrzymałości materiałów*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2006
- [10] Tabor A., Rączka J.S., *Projektowanie odlewów i technologii form*, Fotobit, Kraków 1998
- [11] Comsol Multiphysics User's Guide, Modeling Guide, Documentation Set, Comsol AB, 2008