

O.C. Zienkiewicz

Tytuł oryginału:

THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING SCIENCE

The second, expanded and revised, edition of The Finite  
Element Method in Structural and Continuum Mechanics

O. C. Zienkiewicz

Professor of Civil Engineering and Dean of Applied Science, University of Wales, Swansea

McGraw-Hill, London

Copyright © 1971 McGraw-Hill Publishing Company Limited

# METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Tłumaczył z angielskiego  
na podstawie drugiego wydania

Igor Kisiel

1972

międzynarodowy rok książki



ARKADY WARSZAWA 1972

W pracy podano podstawy teoretyczne i sposób zastosowania nowej metody obliczania różnorodnych układów konstrukcyjnych, jaką jest metoda elementów skończonych. Postępując wg tej metody można rozwiązać wszystkie układy konstrukcyjne zapisując problem w języku macierzowym, najbardziej przydatnym do układania programów na maszyny cyfrowe.

Metoda elementów skończonych umożliwia analizę ciągłych układów przestrzennych izotropowych i anizotropowych o dowolnych kształtach, dowolnie obciążonych, znajdujących się w stanie sprężystym lub plastycznym.

W pracy zarysowano także możliwość zastosowania metody elementów skończonych w reologii ośrodków ciągłych oraz w problemach przewodzenia ciepła i innych zagadnieniach teorii pola. Praca przeznaczona jest w zasadzie dla inżynierów projektantów budownictwa lądowego i wodnego. Ze względu jednak na uniwersalność proponowanej metody obliczeń mogą z niej korzystać konstruktorzy różnych specjalności.

Redakторы Wydawnictwa

mgr inż. Elżbieta Gomulińska  
mgr inż. Andrzej Staniszewski

## Spis treści

<b>Przedmowa</b> . . . . .	13
<b>Od tłumacza</b> . . . . .	17
<b>1. Wprowadzenie — sztywność konstrukcji i analiza sieci</b> . . . . .	19
1.1. Wstęp . . . . .	19
1.2. Element konstrukcyjny . . . . .	20
1.3. Analiza układu . . . . .	24
1.4. Transformacja współrzędnych . . . . .	26
1.5. Sieć elektryczna lub wodociągowa . . . . .	27
1.6. Układ ogólny . . . . .	29
Cytowane publikacje . . . . .	31
<b>2. Skończone elementy kontinuum sprężystego — metoda przemieszczeń</b> . . . . .	33
2.1. Wstęp . . . . .	33
2.2. Bezpośrednie określenie charakterystyk elementu skończonego . . . . .	34
2.2.1. Funkcja przemieszczeń . . . . .	35
2.2.2. Odkształcenia . . . . .	35
2.2.3. Naprężenia . . . . .	36
2.2.4. Równoważne siły węzłowe . . . . .	37
2.2.5. Uogólniony charakter przemieszczeń, odkształceń i naprężeń . . . . .	39
2.3. Uogólnienie na cały obszar z pominięciem pojęcia wewnętrznych sił węzłowych . . . . .	40
2.4. Metoda przemieszczeń jako minimalizacja całkowitej energii potencjalnej . . . . .	41
2.5. Kryteria zbieżności . . . . .	44
2.6. Funkcje przemieszczeń z nieciągłością pomiędzy elementami . . . . .	45
2.7. Granice energii sprężystej w metodzie przemieszczeń . . . . .	45
2.8. Minimalizacja bezpośrednia . . . . .	46
Cytowane publikacje . . . . .	47
<b>3. Uogólnienie koncepcji elementów skończonych</b> . . . . .	49
3.1. Ogólne problemy wariacyjne . . . . .	49
3.2. Kryteria zbieżności . . . . .	51
3.3. Zmienne pozawęzłowe . . . . .	52
3.4. Odmienne sposoby formułowania metody elementów skończonych . . . . .	54
3.5. Przykład — równanie <i>Poissona</i> . . . . .	56
3.5.1. Minimalizacja funkcjonału . . . . .	57
3.5.2. Ważone procesy residualne . . . . .	57
3.6. Przykład — równanie przepływu lepkiego . . . . .	59
3.7. Uwagi końcowe . . . . .	62
Cytowane publikacje . . . . .	62

<b>4. Płaskie stany naprężenia i odkształcenia</b> . . . . .	63	7.2.3. Elementy prostokątne — zastosowanie wielomianów <i>Lagrange'a</i> . . . . .	114
4.1. Wstęp . . . . .	63	7.2.4. Węzły wewnętrzne i zmienne „bezwęzłowe” . . . . .	115
4.2. Charakterystyki elementu . . . . .	63	7.2.5. Eliminacja zmiennych wewnętrznych przed ułożeniem równań — podpodziały . . . . .	116
4.2.1. Funkcje przemieszczenia . . . . .	63	7.2.6. Rodzina elementów trójkątnych . . . . .	118
4.2.2. Odkształcenia (całkowne) . . . . .	65	7.3. Elementy jednowymiarowe . . . . .	122
4.2.3. Odkształcenia początkowe (odkształcenia termiczne) . . . . .	66	7.3.1. Elementy liniowe . . . . .	122
4.2.4. Macierz sprężystości . . . . .	67	7.4. Elementy trójwymiarowe . . . . .	123
4.2.5. Macierz sztywności . . . . .	69	7.4.1. Prostopadłościany, rodzina serendipowska . . . . .	123
4.2.6. Siły węzłowe wywołane odkształceniem początkowym . . . . .	70	7.4.2. Prostopadłościany — rodzina lagranżowska . . . . .	124
4.2.7. Siły objętościowe . . . . .	70	7.4.3. Elementy czworosiennie . . . . .	124
4.2.8. Potencjał sił objętościowych . . . . .	71	7.4.4. Inne proste elementy trójwymiarowe . . . . .	126
4.2.9. Wyznaczanie naprężeń . . . . .	72	7.4.5. Uwagi końcowe . . . . .	127
4.3. Przykłady. Ocena dokładności . . . . .	72	Cytowane publikacje . . . . .	128
4.4. Niektóre zastosowania praktyczne . . . . .	74	<b>8. Zakrzywione elementy izoparametryczne i całkowanie numeryczne</b> . . . . .	129
4.5. Specjalne traktowanie płaskiego stanu odkształcenia w nieściśliwym materiale . . . . .	81	8.1. Wstęp . . . . .	129
Cytowane publikacje . . . . .	84	8.2. Współrzędne krzywoliniowe . . . . .	131
<b>5. Analiza osiowo-symetrycznego stanu naprężenia</b> . . . . .	85	8.2.1. Zastosowanie funkcji kształtu przy ustaleniu transformacji współrzędnych . . . . .	131
5.1. Wstęp . . . . .	85	8.2.2. Geometryczna zgodność elementów . . . . .	133
5.2. Charakterystyki elementu . . . . .	86	8.2.3. Zmienność nieznanych funkcji wewnątrz przekształconych, zakrzywionych elementów. Wymagania ciągłości . . . . .	133
5.2.1. Funkcja przemieszczeń . . . . .	86	8.2.4. Spełnienie kryterium stałej pochodnej . . . . .	134
5.2.2. Odkształcenia (całkowne) . . . . .	87	8.3. Transformacje . . . . .	135
5.2.3. Odkształcenia początkowe (odkształcenia termiczne) . . . . .	88	8.3.1. Obliczenie macierzy elementu (transformacje we współrzędnych $\xi, \eta, \zeta$ ) . . . . .	135
5.2.4. Macierz sprężystości . . . . .	89	8.3.2. Macierze elementu. Współrzędne powierzchniowe i objętościowe . . . . .	138
5.2.5. Macierz sztywności . . . . .	90	8.4. Całkowanie numeryczne . . . . .	139
5.2.6. Siły zewnętrzne w węzłach . . . . .	91	8.4.1. Całkowanie w obszarze jednowymiarowym . . . . .	139
5.2.7. Siły węzłowe od odkształceń początkowych . . . . .	92	8.4.2. Całkowanie numeryczne — obszary prostokątne lub prostopadłościennie . . . . .	142
5.2.8. Rozłożone siły masowe . . . . .	92	8.4.3. Całkowanie numeryczne — obszary trójkątne i czworosiennie . . . . .	143
5.2.9. Wyznaczanie naprężeń . . . . .	93	8.5. Uwagi końcowe . . . . .	146
5.3. Kilka przykładów rozwiązań . . . . .	93	Cytowane publikacje . . . . .	146
5.4. Zastosowania praktyczne . . . . .	95	<b>9. Niektóre zastosowania elementów izoparametrycznych do analizy dwu- i trójwymiarowego stanu naprężeń</b> . . . . .	147
5.5. Obciążenie niesymetryczne . . . . .	96	9.1. Wstęp . . . . .	147
Cytowane publikacje . . . . .	98	9.2. Żądana dokładność całkowania numerycznego . . . . .	148
<b>6. Analiza trójwymiarowego stanu naprężeń</b> . . . . .	99	9.3. Korzyści obliczeniowe całkowania numerycznego elementów skończonych . . . . .	150
6.1. Wstęp . . . . .	99	9.4. Przykłady analizy dwuwymiarowego stanu naprężenia . . . . .	151
6.2. Charakterystyki elementu czworosiennego . . . . .	100	9.5. Wyznaczanie naprężeń w stanie trójwymiarowym . . . . .	153
6.2.1. Funkcje przemieszczeń . . . . .	100	9.6. Uwagi ogólne o elementach wyższych rzędów . . . . .	157
6.2.2. Macierz odkształceń . . . . .	102	Cytowane publikacje . . . . .	159
6.2.3. Macierz sprężystości . . . . .	103	<b>10. Zginanie płyt</b> . . . . .	161
6.2.4. Macierze sztywności, naprężeń i obciążeń . . . . .	103	10.1. Wstęp . . . . .	161
6.3. Elementy o ośmiu węzłach . . . . .	104	10.2. Sformułowanie zadania płyty w przemieszczeniach . . . . .	162
6.4. Przykłady i uwagi końcowe . . . . .	105	10.3. Wymagana ciągłość dla funkcji kształtu . . . . .	164
Cytowane publikacje . . . . .	108	10.4. Elementy prostokątne o węzłach w narożach . . . . .	167
<b>7. Funkcje kształtu elementów — pewne uogólnienia</b> . . . . .	109	10.4.1. Funkcje kształtu . . . . .	167
7.1. Wstęp . . . . .	109	10.4.2. Macierze sztywności i obciążenia . . . . .	169
7.2. Elementy dwuwymiarowe . . . . .	110		
7.2.1. Elementy prostokątne — rozwiązania wstępne . . . . .	110		
7.2.2. Elementy prostokątne — rodzina serendipowska . . . . .	113		

10.5. Elementy czworoboczne . . . . .	173	13.7. Uwagi końcowe . . . . .	244
10.6. Elementy trójkątne . . . . .	174	Cytowane publikacje . . . . .	245
10.6.1. Funkcje kształtu . . . . .	174	<b>14. Powłoki grubościenna jako szczególny przypadek problemu trójwymiarowego</b> . . . . .	247
10.6.2. Macierze sztywności i obciążenia . . . . .	176	14.1. Wstęp . . . . .	247
10.7. Zbieżność w elementach „niedostosowanych” . . . . .	177	14.2. Opis geometrii elementu . . . . .	248
10.8. Przykłady rozwiązań . . . . .	178	14.3. Pole przemieszczeń . . . . .	249
10.8.1. Elementy prostokątne . . . . .	178	14.4. Definicje odkształceń i naprężeń . . . . .	251
10.8.2. Elementy trójkątne . . . . .	186	14.5. Własności elementu i niezbędne transformacje . . . . .	252
10.8.3. Niektóre zastosowania praktyczne . . . . .	182	14.6. Niektóre uwagi o przedstawianiu naprężeń . . . . .	255
10.9. Dostosowane funkcje kształtu z osobliwościami w węzłach . . . . .	185	14.7. Szczególny przypadek zakrzywionej grubościennej powłoki osiowo-symetrycznej . . . . .	255
10.9.1. Uwagi ogólne . . . . .	185	14.8. Szczególne przypadki płyt grubych . . . . .	258
10.9.2. Osobliwe funkcje kształtu dla prostych elementów trójkątnych . . . . .	186	14.9. Zbieżność . . . . .	258
10.9.3. Elementy trójkątne o osiemnastu stopniach swobody z dostosowanymi funkcjami kształtu . . . . .	189	14.10. Przykłady . . . . .	260
10.9.4. Dostosowane elementy czworoboczne . . . . .	189	Cytowane publikacje . . . . .	262
10.9.5. Niektóre rozwiązania przy użyciu elementów dostosowanych . . . . .	190	<b>15. Problemy ustalone pola — przewodnictwo cieplne, potencjał elektryczny, przepływy cieczy itd.</b> . . . . .	263
10.10. Dostosowane funkcje kształtu z dodatkowymi stopniami swobody . . . . .	191	15.1. Wstęp . . . . .	263
10.10.1. Hermitowskie prostokątne funkcje kształtu . . . . .	191	15.2. Problem ekstremum . . . . .	264
10.10.2. Trójkąty o 21 i 18 stopniach swobody . . . . .	192	15.3. Dyskretyzacja za pomocą elementów skończonych . . . . .	266
10.10.3. Uwagi końcowe . . . . .	194	15.3.1. Ogólny przypadek trójwymiarowy . . . . .	266
Cytowane publikacje . . . . .	195	15.3.2. Warunki zbieżności . . . . .	268
<b>11. Powłoka jako zbiór płaskich elementów</b> . . . . .	197	15.3.3. Niejednorodność i anizotropia . . . . .	268
11.1. Wstęp . . . . .	197	15.3.4. Zagadnienie dwuwymiarowe . . . . .	269
11.2. Sztywności elementu płaskiego we współrzędnych lokalnych . . . . .	199	15.4. Przykłady, oszacowanie dokładności . . . . .	270
11.3. Transformacja współrzędnych ogólnych i łączenie elementów . . . . .	201	15.5. Niektóre problemy praktyczne . . . . .	273
11.4. Filicyjna sztywność skręcania . . . . .	203	15.6. Problemy opisywane równaniem biharmonicznym; płynięcie lepkie . . . . .	280
11.5. Lokalne kosinusy kierunkowe . . . . .	204	15.7. Analogie . . . . .	282
11.5.1. Elementy prostokątne . . . . .	204	15.8. Uwagi końcowe . . . . .	283
11.5.2. Elementy trójkątne dowolnie zorientowane w przestrzeni . . . . .	205	Cytowane publikacje . . . . .	283
11.6. Przykłady praktyczne . . . . .	208	<b>16. Problemy przestrzenno-czasowe. Podstawowe sformułowania procesów nieustalonych pola i zagadnień dynamicznych</b> . . . . .	285
11.7. Zbieżność . . . . .	215	16.1. Wstęp . . . . .	285
Cytowane publikacje . . . . .	215	16.2. Bezpośrednie sformułowanie problemów zależnych od czasu w przestrzennym podziale na elementy skończone . . . . .	285
<b>12. Powłoki osiowo-symetryczne</b> . . . . .	217	16.2.1. Równanie quasi-harmoniczne z pochodnymi względem czasu . . . . .	285
12.1. Wstęp . . . . .	217	16.2.2. Dynamiczne zachowanie się konstrukcji sprężystych z liniowym tłumieniem . . . . .	287
12.2. Charakterystyka elementu. Obciążenie osiowo-symetryczne, elementy prostoliniowe . . . . .	219	16.2.3. Macierze mas oraz tłumienia dla pewnych typowych elementów . . . . .	289
12.3. Przykłady i dokładność wyników . . . . .	221	16.3. Zagadnienia sprężone . . . . .	292
12.4. Elementy zakrzywione i ich funkcje kształtu . . . . .	223	16.3.1. Sprężony ruch konstrukcji sprężystej w cieczy . . . . .	292
12.5. Wyróżnienia dla odkształceń i cechy elementów zakrzywionych . . . . .	225	16.3.2. Sprężyste zachowanie się nawodnionego ośrodka porowatego . . . . .	294
12.6. Dodatkowe zmienne pozawęzłowe . . . . .	227	16.4. Odmienne sformułowanie zagadnienia wpływu czasu . . . . .	296
Cytowane publikacje . . . . .	229	16.5. Związki rekurencyjne dla rozwiązania zagadnienia wartości początkowych . . . . .	297
<b>13. Półanalityczne sposoby w metodzie elementów skończonych. Zastosowanie funkcji ortogonalnych</b> . . . . .	231	16.5.1. Zagadnienia z pierwszą pochodną względem czasu . . . . .	297
13.1. Wstęp . . . . .	231	16.5.2. Zagadnienia z drugą pochodną względem czasu . . . . .	299
13.2. Pręt pryzmatyczny . . . . .	234	16.5.3. Problemy sprężone . . . . .	301
13.3. Cienkościenne skrzywkowa konstrukcja przeponowa . . . . .	237	16.5.4. Przykłady . . . . .	301
13.4. Płyty lub skrzynki zginane . . . . .	238	16.6. Inny problem niustalony. Filtracja przy powierzchni swobodnej . . . . .	303
13.5. Ciała osiowo-symetryczne z niesymetrycznym obciążeniem . . . . .	239		
13.6. Powłoki osiowo-symetryczne z niesymetrycznym obciążeniem . . . . .	243		

16.7. Uwagi końcowe	304
Cytowane publikacje	305
<b>17. Problemy przestrzenno-czasowe. Postępowanie półanalityczne. Drgania i wartości własne</b>	307
17.1. Wstęp	307
17.2. Rozwiązanie podstawowego równania dynamicznego przy okresowym wzburzeniu	307
17.3. Drgania własne	308
17.4. Rozwiązanie problemu wartości własnych	309
17.4.1. Uwagi ogólne	309
17.4.2. Drgania swobodne	310
17.4.3. Uproszczona metoda wyznaczania wartości własnych	311
17.5. Przykłady obliczenia wartości własnych	313
17.5.1. Drgania płyt	313
17.5.2. Drgania tarcz	314
17.5.3. Drgania powłok	314
17.5.4. Równanie falowe. Problemy elektromagnetyczne i fale w cieczech	316
17.5.5. Układy zespolone — ruch cieczy	317
17.6. Rozwiązania zagadnień nieustalonych poprzez wartości własne. Sposób postaci znormalizowanych	318
Cytowane publikacje	320
<b>18. Nieliniowość materiału, plastyczność, pełzanie, nieliniowe problemy pola</b>	323
18.1. Wstęp	323
18.2. Fizyczna strona zagadnienia	324
18.2.1. Podstawy	324
18.2.2. Sposób zmiennej sztywności	325
18.2.3. Sposób naprężeń początkowych	326
18.2.4. Sposób początkowych odkształceń	327
18.2.5. Przyspieszenie zbieżności	328
18.3. Matematyczna strona zagadnienia	328
18.4. Plastyczność	330
18.4.1. Teoria ogólna	330
18.4.2. Rys historyczny	333
18.4.3. Zastosowania	333
18.5. Materiały nie przenoszące ciągnięć	340
18.6. Materiały uwarstwione i elementy łączące	342
18.7. Pełzanie i odkształcenia zależne od czasu	344
18.7.1. Uwagi ogólne	344
18.7.2. Związek między pełzaniem a historią materiału (lepkosprężystość)	345
18.7.3. Prawa pełzania zależne od stanu	348
18.7.4. Szczególne przypadki rozwiązania problemu pełzania	350
18.8. Uwagi dodatkowe	352
18.9. Nieliniowe, quasi-harmoniczne zagadnienia pola	354
18.10. Inne możliwe zastosowania	356
Cytowane publikacje	357
<b>19. Zagadnienia geometrycznie nieliniowe — duże odkształcenia i stateczność budowli</b>	359
19.1. Wstęp	359
19.2. Rozważania ogólne	360

19.2.1. Problem podstawowy	360
19.2.2. Procesy iteracyjne	361
19.2.3. Problem stateczności początkowej	363
19.2.4. Energetyczna interpretacja kryteriów stateczności	363
19.2.5. Siły zależne od deformacji	364
19.3. Duże ugięcia i początkowa stateczność płyt	364
19.3.1. Definicje	366
19.3.2. Obliczenie macierzy $[B]$	368
19.3.3. Obliczenie $[K_T]$	368
19.3.4. Zagadnienie dużych ugięć	369
19.3.5. Stateczność kształtu	371
19.4. Powłoki	372
19.5. Ogólne sformułowania zagadnienia dużych odkształceń i przemieszczeń	373
19.5.1. Macierz $[B_L]$	374
19.5.2. Macierz $[K_T]$	375
19.6. Uwagi końcowe	376
Cytowane publikacje	379
<b>20. Metody numeryczne i programy (Y. K. Cheung i I. P. King)</b>	379
20.1. Wstęp	380
20.2. Struktura programów w metodzie elementów skończonych	384
20.3. Dane wejściowe	384
20.3.1. Współrzędne połączeń i charakterystyki elementów	385
20.3.2. Własności materiałów	385
20.3.3. Obciążenia	385
20.3.4. Warunki brzegowe	390
20.4. Budowanie macierzy sztywności	395
20.5. Budowanie i rozwiązywanie równań	395
20.5.1. Proces eliminacji <i>Gausa</i>	397
20.5.2. Efektywny układ pamięci dla macierzy pasmowych	398
20.5.3. Metoda iteracyjna <i>Gausa-Seidela</i>	399
20.5.4. Inne metody rozwiązywania bezpośredniego	400
20.5.5. Pewne szczególne ułatwienia	401
20.5.6. Uwzględnienie warunków brzegowych	402
20.5.7. Przykład podprogramu	407
20.6. Obliczenie sił wewnętrznych i wydawnictwo wyników	410
20.7. Zadania przykładowe	414
20.8. Przedstawienie wyników	418
20.9. Iteracyjna metoda wyznaczania wartości własnych	423
20.10. Uwagi końcowe	440
Cytowane publikacje	441
<b>Dodatki</b>	455
<b>Skorowidz</b>	

# Przedmowa

W pierwszym, ogłoszonym w 1967 r. wydaniu książki: „Metoda elementów skończonych w mechanice budowli i kontinuum” większą część przedmowy poświęcono wyjaśnieniu, na czym polega wymieniona w tytule metoda. Wyjaśnienie to jest dzisiaj zbędne, nastąpił bowiem gwałtowny rozwój metody. To, co pierwotnie pomyślane było jako sposób badania konstrukcji, pozwalający uwzględnić prawie dowolne jej ukształtowanie, dziś stało się metodą ogólną, szeroko stosowaną w różnych zagadnieniach fizyki i techniki. Ten szeroki rozwój zastosowań, zarówno do celów badawczych jak i praktycznych, spowodował konieczność rewizji pierwotnego tekstu. Od razu też uwidoczniły się trudności w wyborze nowego materiału i jego przedstawieniu, należało bowiem uniknąć konfliktu między prostotą wykładu a jego wszechstronnością; spowodowało to znaczny wzrost objętości książki. W wyniku poszukiwań właściwego ujęcia większa część książki została opracowana od nowa, chociaż podstawowy jej układ i idee pozostały niezmiennione.

W istocie swej metoda elementów skończonych jest procesem, w wyniku którego kontinuum o nieskończonej liczbie stopni swobody może być aproksymowane poprzez zbiór podobszarów (elementów), z których wyodrębnią się określona, skończona liczba stopni swobody. Następnie każdy z tych elementów łączony jest z sąsiednimi w znany każdemu inżynierowi sposób, stosowany przy badaniu dyskretnych układów konstrukcyjnych lub elektrycznych. Ta zasadnicza prostota fizycznej interpretacji i postaci matematycznej wpłynęła niewątpliwie na popularność metody w takim samym stopniu jak istnienie maszyn cyfrowych, pozwalających dziś na realne rozwiązywanie najbardziej złożonych zadań inżynierskich. W wielu biurach projektów metodę elementów skończonych stosuje się dziś jako zwykle postępowanie inżynierskie i tendencja ta niewątpliwie będzie się rozszerzać.

Pierwszy rozdział książki ma niewiele wspólnego z elementami skończonymi. Podano w nim w prosty sposób podstawowe zasady wyznaczania zbioru sztywności konstrukcji, aby uniknąć potrzeby odwoływania się do innych opracowań. Dla tych, których zainteresowania kierują się na inne zagadnienia, jak np. elektrotechnika, pokazano, że podstawowe zasady wyznaczenia zbiorów są w tych dziedzinach w istocie takie same; będzie to powtarzane w dalszym ciągu tekstu przy wyjaśnieniu szczegółów postępowania za pomocą metody elementów skończonych.

Rozdział 2 opisuje podstawy metody elementów skończonych w odniesieniu do problemów sprężystości przy zastosowaniu metody przemieszczeń. Uważne przestudiowanie tego rozdziału będzie wynagrodzone łatwością rozumienia dalszego tekstu, opartego głównie na podanych tu wywodach. Przytoczone alternatywne postępowanie przy zastosowaniu zasady pracy wirtualnej lub minimalizacji energii prowadzi wprost do rozdziału 3, w którym podano uogólnienie metody na wszystkie procesy wariacyjne, pokazując równocześnie prostotę sformułowania *Rayleigha-Ritza*. Ponadto w rozdziale tym zbadane są również nie wariacyjne możliwości sformułowania teoretycznych podstaw postępowania.

Podczas gdy w rozdz. 4 do 6 przedstawiono najprostsze postacie elementów skończonych, ogólna dyskusja nad kształtem tych elementów zawarta jest w rozdz. 7 i 8. Czytelnik znajdzie tutaj podstawy różnych sposobów obliczania elementów.

Rozdziały 16 i 17 poświęcone są rozszerzeniu metody elementów skończonych na zagadnienia zmienne względem czasu, rozdziały zaś 18 i 19 na zagadnienia nieliniowe. Przy rozwiązywaniu tych zagadnień obserwuje się największy postęp, uzyskany w ostatnich latach; z tego powodu ograniczono się tu do raczej ogólnych sformułowań, niż szczegółowych opisów postępowania. Nieco dokładniej omówiono plastyczność, duże odkształcenia i zagadnienia pokrewne.

Praktyczne zastosowanie metody elementów skończonych wymaga nie tylko odpowiednich wiadomości teoretycznych, ale także i znacznego wysiłku przy opracowywaniu programu na maszynę. I chociaż istnieje szereg skutecznych systemów programowania, złożoność ich może sprawić zawód początkującemu, który by wolał z mniejszą nieco ścisłością, ale w prosty sposób rozwiązać zadanie średniej wielkości. Mając to na uwadze opracowano ostatni, 20 rozdział, który napisali dwaj moi współpracownicy, dr *I. P. King* i dr *Y. K. Cheung*, przyczyniając się waleśnie do uwzględnienia tego aspektu zagadnienia. Podano prosty zbiór wzorcowych podprogramów średniej wielkości i należy mieć nadzieję, że ułatwi to Czytelnikowi opracowanie własnych programów bez konieczności poszukiwania szeregu nowych wiadomości.

Książka została napisana zarówno dla studentów, jak i dla praktykujących inżynierów. Aby uzyskać bezpośrednio i prostotę wykładu, zrezygnowano czasem z matematycznej elegancji wywodów (należy się spodziewać, że bez szkody dla ścisłości). Wymagane są jednak pewne wiadomości wykraczające poza program studiów; wszędzie dla wygody stosowano rachunek macierzowy. W Dodatku podano główne zasady operowania macierzami.

Rachunek macierzowy nie jest jednak istotą metody elementów skończonych, jak to niekiedy błędnie się sądzi. Z równą skutecznością można by zastosować rachunek tensorowy.

W pierwszym wydaniu podany był rozdział o ewentualnym dalszym rozwoju metody. Wiele z tego zostało w międzyczasie urzeczywistnione; toteż przepowiadanie nie wydaje się obecnie celowe, chociaż w szeregu szczegółowych zagadnień wskazywane są pewne przyszłe możliwości. Należałoby chyba usprawiedliwić się z tego, że nie umieszczono na przykład bezpośredniego zastosowania twierdzenia wariacyjnego *Helinger-Reissnera* i postępowania hybrydowego, które

to metody szybko się obecnie rozwijają. Pominięcie to zostało jednak zamierzone nie tylko dla oszczędności miejsca, lecz także dla zapewnienia jednolitości przedstawienia treści.

Przykłady praktyczne wybrano z różnych dziedzin inżynierskich; Czytelnik prawdopodobnie zauważy, że wybór był w pewnym stopniu uzależniony od głównego kierunku zainteresowania autora — inżynierii budowlanej. Rozszerzenie na inne dyscypliny wymaga jednak — to się wyczuwa — trochę wyobraźni.

O. C. ZIENKIEWICZ  
University of Wales—Swansea

## Do wydania polskiego

Tłumaczenie mej książki na język polski przez prof. *Kisiela* sprawiło mi wielką osobistą przyjemność. W chwili obecnej elementy skończone stały się przedmiotem dużego zainteresowania w wielu krajach świata, nie tylko w kołach inżynierskich, ale i wśród matematyków, którzy w końcu uznali wielką efektywność metody. O ile książka zyska przychylną ocenę ze strony polskich inżynierów, i jeżeli dzięki niej wzrośnie zainteresowanie metodą i praktyczne stosowanie jej do zadań inżynierskich, to będę uważał, że cel pracy został osiągnięty.

O. C. ZIENKIEWICZ  
University of Wales—Swansea

## Podziękowania

Profesorowi *Ray Clough*, którego gorący entuzjazm skierował moją uwagę na metodę i którego trwała przyjaźń zapewniła mi współpracę z Jego aktywnym zespołem w Berkeley, California.

Zespołem badaczy z Uniwersytetu Technicznego w Trondheim, Norwegia, Cornell University (USA), MIT (USA) i szeregowi innych grup i osób, którzy dostarczali informacji i dopomogli do ogólnego rozwoju metody.

Moim słuchaczom i współpracownikom ze Swansea, bez pomocy których nie byłoby możliwe opracowanie tego tomu. Serdecznie dziękuję zatem drowi *Y. K. Cheungowi*, drowi *I. P. Kingowi*, Pani *M. Watson*, drowi *J. Ergatoudisowi*, drowi *S. Valliappanowi*, drowi *C. Parekhowi*, drowi *S. Ahmadowi*, Pani *D. Phillips*, Panu *G. Nayakowi*, Panu *J. Campbellowi*, Panu *F. Scottowi*, Panu *C. Dullage'owi*, Panu *G. Treharne'owi*, Panu *R. Woodowi*, Panu *D. Phillipsowi*, Panu *J. Too*, Panu *K. Hintoo* i innym, których wymienianie bardzo wydłużyłoby tę listę.

Panu *M. B. Ironsowi*, mojemu Koledze, za Jego wkład do teorii elementów izoparametrycznych (rozdz. 7 i 8) i wielce pomocne dyskusje.

Wreszcie za pomoc szeregowi instytucji finansujących, których środki dopomogły do prowadzenia badań. Moje podziękowania kieruję do Civil Engineering Research and Information Association, do Science Research Council, do NATO, do Ministry of Transport, do United Kingdom Atomic Energy Authority i innych.

O. C. ZIENKIEWICZ  
University of Wales—Swansea

## Od tłumacza

Konieczność oszczędzania materiałów konstrukcyjnych, doceniana i rozumiana dziś na całym świecie, zmusza do pełniejszego wykorzystywania ich własności wytrzymałościowych. Można osiągnąć to, z jednej strony, w wyniku coraz lepszego poznawania własności reologicznych materiałów, z drugiej — przez stosowanie coraz dokładniejszych metod obliczania konstrukcji, uwzględniających przestrzenne rozróżnienie materiału, jego anizotropię, działanie wpływów niesłusznie nlekłedy zwanych dodatkowymi (termiczne, dynamiczne itp.).

(O ile w konstrukcjach prętowych na ogół, przy mniejszych lub większych kłopotach, dajemy sobie z tym radę, to konstrukcje powierzchniowe lub bryłowe przyporządkują nieraz pod tym względem niepokonalnych trudności. Zmusza to inżyniera do stosowania uproszczeń, czasem tak daleko idących, że aż ich sens fizyczny staje się wątpliwy.)

Wskutecznie zatem pilna potrzeba zastosowania efektywnej metody obliczeń, umożliwiającej znajdowanie sił wewnętrznych i deformacji w konstrukcjach powierzchniowych lub bryłowych. Mamy zawsze prawie możliwość zapisania układu niezależnych do tego celu równań różniczkowych i dostatecznie poprawnego sformułowania warunków granicznych problemu. Trudności występują dopiero przy rozwiązywaniu. Pozostaje wówczas jedyna droga, tj. obliczenia numeryczne. Te obliczenia, wykonywane na suwaku lub arytmometrze, są zwykłe i praco- i czasochłonne.

W ten sposób współczesny inżynier zmuszany bywa coraz częściej do korzystania z usług maszyn cyfrowych. Inżynier jutra nie będzie mógł pracować bez ich pomocy. Fakt, że maszyna średniej wielkości potrafi zastąpić pracę setek rachmistrzów, mówi sam za siebie.

Aby jednak w całej pełni wykorzystać możliwości maszyn cyfrowych należy formułować dla nich zadania w sposób zgodny z ich układem logicznym. Ten sposób różni się dość istotnie od logiki, w jakiej zwykliśmy na codzień formułować zadania rachunkowe.

Proponowana uwadze Czytelnika książka profesora Uniwersytetu Walijskiego *Oliwiera Zienkiewicza* formułuje wszelkie operacje rachunkowe w języku macierzyowym, najbardziej przydatnym dla układania programów na maszyny cyfrowe. Tematem jej jest metoda elementów skończonych, opracowana głównie do analizy układów o charakterze kontynuualnym. Jest ona w pewnym sensie daleko idącym uogólnieniem znanego rachunku różnic skończonych. Wykazuje jednak pełną wykazność nad tą ostatnią, gdyż można w niej stosować w jednym obszarze różno



w różnych jego miejscach często podzielił na elementy, co daje możliwość dokładnego śledzenia efektów lokalnych zaburzeń. Metoda ta pozwala już na obecnym etapie na analizę, limitowaną jedynie pojemnością pamięci maszyny, wszelkich układów kontynualnych o różnych własnościach fizycznych, o dowolnych kształtach, dowolnie obciążonych, znajdujących się w stanie sprężystym lub plastycznym. Można za jej pomocą rozwiązywać, stosując jednolity sposób, zadania pełzania, przepływów i przewodnictwa. W książce nie podano oczywiście wszystkich zastosowań metody, znajduje się ona bowiem w burzliwej fazie rozwoju. Wolno więc przypuszczać, że Czytelnik po zapoznaniu się z istotną metodą niejedno potrafi w niej ulepszyć, a może znaleźć nowe dziedziny jej zastosowań.

Autor książki powołuje się na wiele prac, z których niektóre przetłumaczone są przez „Arkady”, np. książki *Timoshenki*. Jest to korzystne dla Czytelnika, który chciałby prześledzić niektóre wywody Autora. Warto wspomnieć także o wydanej ostatnio przez PWN książce *Y. C. Funga* „Podstawy mechaniki ciała twardego”, w której znaleźć można sporo problemów (przepływy, przewodnictwo) poruszanych przez *Zienkiewicza* w niniejszej książce.

IGOR KISIEL

Wrocław grudzień 1971.

# 1. Wprowadzenie – sztywność konstrukcji i analiza sieci

## 1.1. Wstęp

Proste konstrukcje inżynierskie można rozpatrywać jako zespoły elementów połączonych ze sobą za pomocą skończonej liczby punktów węzłowych (węzłów). Jedną związki między siłami a przemieszczeniami dla poszczególnych elementów są znane, to stosując znane metody mechaniki budowli [1], [2], można wyprowadzić wnioski odnośnie do zachowania się konstrukcji jako całości.

W kontinuum sprężystym rzeczywista liczba punktów połączeń jest nieograniczona i to stanowi największą trudność w ich analizowaniu. Koncepcja „elementów skończonych”, wprowadzona przez *Turnera* i innych [3], usiłuje pokonać tę trudność poprzez założenie podziału rzeczywistego kontinuum na elementy połączone ze sobą tylko w skończonej liczbie punktów węzłowych, w których zakłada się istnienie sił skupionych reprezentujących napięcia w rzeczywistości działające kontynualnie na granicach elementów. Jeżeli taka idealizacja jest dopuszczalna, problem sprowadza się do zwykłego zadania statycznego nadającego się do rozwiązań numerycznych.

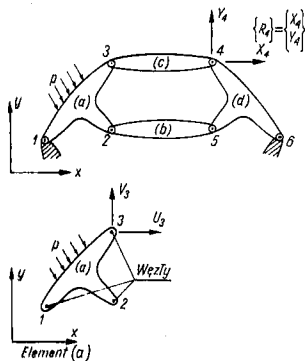
Postępowanie takie, choć zachęcające intuicyjnie inżyniera-konstruktora, nie wydaje się całkowicie przekonywujące; w szczególności pozostaje otwarta sprawa określenia „siły przemieszczenia” elementu. Sposób określania tych relacji będzie szczegółowo przedstawiony w rozdz. 2, gdzie podane zostaną podstawy metody. Tu natomiast omówiona jest ogólnie metoda analizy sztywności konstrukcji, stosowanej w niniejszej książce.

Metoda elementów skończonych będzie tu zastosowana do rozwiązania wielu problemów typu niebudowlanego. Zasadnicze zależności w elementach będą podobne w postaci spotykanej w mechanice budowli. Również ogólne postępowanie przy układaniu i rozwiązywaniu równań będzie bazować na zasadach, dla których w mechanice budowli ustalono najwłaściwsze formy.

W literaturze postać równań przyjęta w mechanice budowli jest charakterystyczna nie tylko dla tej dyscypliny. Ta sama postać równań występuje jako typowa w problemach związanych z obwodami elektrycznymi lub obwodami rurociągów prowadzących ciecz. Dlatego też wiąże się je często z „analizą sieci”.

## 1.2. Element konstrukcyjny

Rysunek 1.1 przedstawia dwuwymiarową konstrukcję złożoną z oddzielnych elementów połączonych w węzłach 1 do  $n$ . Na wstępie rozważany jest przypadek, gdy węzły nie przenoszą momentów.



Rys. 1.1. Przykład konstrukcji zbudowanej z elementów połączonych w węzłach

Przyjmijmy, że w wyniku odrębnego rachunku lub w wyniku doświadczenia poznane zostały dokładnie relacje zachodzące między siłami i przemieszczeniami dla poszczególnych elementów. Gdy zatem rozpatrujemy element (a) powiązany z konstrukcją węzłami 1, 2, 3, to siły działające na węzły są jednoznacznie określone poprzez: przemieszczenia tych węzłów, obciążenie rozłożone na elemencie (a) i jego odkształcenie wstępne. To ostatnie może być wywołane przez temperaturę, skurcz lub też przez niedokładności montażu. Odpowiednie siły  $F$  i przemieszczenia  $\delta$  są określone przez składowe:  $U; V, u, v$  w prostokątnym układzie współrzędnych.

Zstawiając w postaci macierzy<sup>1)</sup> siły  $F$  działające na element w węzłach (w rozważanym przypadku trzy) mamy

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (1-1)$$

<sup>1)</sup> Przy czytaniu niniejszej książki niezbędne są podstawowe wiadomości z algebry macierzy. Zapis macierzowy był niezbędny dla uzyskania odpowiedniej zwięzłości wykładu i skrócenia objętości książki. Dla Czytelników nie znających rachunku macierzowego przytacza się krótki dodatek na końcu książki, w którym wyłożone są podstawy algebry macierzy w zakresie wystarczającym do śledzenia wywodów podanych w książce.

Odpowiednie przemieszczenia węzłów  $\delta$  można zapisać

$$\{\delta\}^a = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (1-2)$$

Zakładając, że element jest sprężysty, związki charakterystyczne mają zawsze postać ogólną

$$\{F\}^a = [k]^a \{\delta\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\delta_0}^a, \quad (1-3)$$

gdzie:  $\{F\}_p^a$  — siły węzłowe niezbędne do zrównoważenia każdego obciążenia wewnętrzznego działającego na element,  $\{F\}_{\delta_0}^a$  — siły węzłowe wywołane odkształceniami początkowymi, np. wpływem temperatury, gdy poza tym węzły nie podlegają żadnym innym przemieszczeniom. Pierwszy wyraz sumy (1-3) oznacza siły wywołane przemieszczeniami węzłów.

Podobnie wstępne obliczenie względnie doświadczenie pozwala jednoznacznie określić naprężenia lub reakcje wewnętrzne w każdym wybranym punkcie (punktach) elementu w zależności od przemieszczeń węzłów. Definiując takie naprężenia jako macierz  $\{\sigma\}^a$ , otrzymujemy związek

$$\{\sigma\}^a = [S]^a \{\delta\}^a + \{\sigma\}_p^a + \{\sigma\}_{\delta_0}^a, \quad (1-4)$$

w którym dwa ostatnie wyrazy oznaczają naprężenia wywołane odpowiednio przez obciążenie rozłożone na elemencie oraz odkształcenia początkowe, przy braku innych przemieszczeń węzłów.

Macierz  $[k]^a$  nazywa się macierzą sztywności elementu, macierz  $[S]^a$  zaś macierzą naprężeń elementu.

Związek (1-3) i (1-4) napisano dla elementu o trzech węzłach przenoszących tylko po dwie składowe siły. Oczywiście, te same rozważania i definicje są ważne w przypadku ogólnym. Na przykład element (b) ma tylko dwa węzły; inne elementy mogą mieć większą liczbę węzłów.

Zakładając następnie sztywne połączenia elementów, należy w węzłach wprowadzić po trzy składowe siły uogólnionych i trzy składowe przemieszczeń uogólnionych. Dla sztywno połączonych przestrzennych elementów liczba składowych węzłowych wynosić będzie po sześć. Ogólnie zatem można zapisać

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \{\delta\}^a = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

gdzie każdy wektor  $F_i$  i  $\delta_i$  ma tę samą liczbę składowych lub inaczej — stopni swobody.

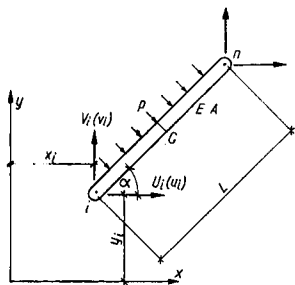
Macierze sztywności elementu są oczywiście zawsze kwadratowe i mają postać

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

gdzie elementy  $k_{ij}, \dots$  są podmacierzami także kwadratowymi i mającymi wymiar  $l \times l$ ;  $l$  jest tu liczbą składowych sił węzłowych w rozpatrywanym węźle.

Jako przykład rozpatrzmy obustronnie przegubowy pręt o stałym przekroju  $A$  i module sprężystości  $E$  (rys. 1.2). Pręt poddany jest obciążeniu poprzecznemu  $p$  oraz wydłużeniu termicznemu

$$\varepsilon_0 = \alpha T.$$



Rys. 1.2. Pręt o połączeniach przegubowych

Jeżeli końce pręta określone są przez współrzędne  $x_i, y_i, x_n, y_n$ , to jego długość wynosi

$$L = \sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2},$$

a jego nachylenie do osi  $x^1$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{y_n - y_i}{x_n - x_i}.$$

W węzłach pręta występują tylko po dwie składowe siły i przemieszczeń.

Siły węzłowe od obciążenia  $p$  wynoszą

$$\{F\}_p^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_n \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} \frac{pL}{2}$$

<sup>1)</sup> Oznaczenie  $\tan^{-1}$  odpowiada przyjętemu u nas oznaczeniu  $\arctg$  (przyp. tłum.).

i są po prostu reakcjami belki. Podobnie, aby uwzględnić wpływ siły osiowej  $K\alpha T A$  od wydłużenia termicznego  $\varepsilon_0$  na reakcje w węzłach, obliczamy

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_n \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} (E\alpha T A).$$

Składowe przemieszczeń elementu, wynoszące

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \delta_1 \\ v_1 \\ u_n \\ \delta_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

sprawodują wydłużenie  $(u_n - u_1) \cos \alpha + (v_n - v_1) \sin \alpha$ , które pomnożone przez  $K\alpha T A$ , da siłę osiową. Składowe siły węzłowe można znaleźć przez podstawienie tej siły zamiast  $E\alpha T A$  do wyrażenia na siły od wydłużenia termicznego. Otrzymujemy w ten sposób następująco

$$\{F\}_\delta^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_n \end{Bmatrix}_\delta = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_\delta =$$

$$KA \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = [K]^e \{\delta\}^e.$$

Składowe równania (1-3) dla rozważanego elementarnego przypadku są w ten sposób ustalono. Teraz względnie prosto można znaleźć naprężenie w każdym punkcie elementu w postaci równania (1-4). Na przykład, gdy rozpatrzmy przekrój  $C$  pręta (rys. 1.2), naprężenia w skrajnych włókienach (uwzględniając siłę osiową i wgnięcie) wynoszą

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}_C = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \{\delta\}^e + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{pL^2}{8} \frac{d}{I} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} E\alpha T,$$

gdzie  $d$  — połowa wysokości przekroju,  $I$  — moment bezwładności. Wszystkie wyrazy wzoru (1-4) można teraz łatwo wyznaczyć.

Dla bardziej skomplikowanych elementów postępowanie jest oczywiście bardziej złożone, wyniki jednak mają tę samą postać. Inżynier łatwo zauważy, że tak „rozprowadzanie” w obliczaniu ram o sztywnych węzłach jest szczególnym przypadkiem opisanego postępowania.

Należy tu zwrócić uwagę, że pełna macierz sztywności otrzymana dla prostego elementarnego elementu okazuje się niesymetryczna (choć jej podmacierze są symetryczne). Wynika to z zasady zachowania energii i jej naturalnego następstwa — słynnego znanego odwrotnego twierdzenia Betti-Maxwella.

Właściwość sprężystość elementu przyjęto jako całkowicie liniową. W zasadzie podobne związki można ustalić także dla materiałów nieliniowych. Rozważania te są podane w dalszych częściach książki.

### 1.3. Analiza układu

Wróćmy znów do konstrukcji przedstawionej na rys. 1.1. Aby rozwiązać ją poprawnie, należy spełnić dwa warunki: a) zgodności przemieszczeń, b) równowagi.

Każdy układ przemieszczeń węzłów

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (1-7)$$

zapisany dla całej konstrukcji (wszystkich elementów) automatycznie spełnia pierwszy warunek.

Ponieważ warunki równowagi są już spełnione wewnątrz każdego elementu, pozostają do spełnienia tylko warunki równowagi w węzłach konstrukcji. Wynikające stąd równania będą zawierać przemieszczenia jako niewiadome. Po wyznaczeniu tych niewiadomych problem statyczny zostanie rozwiązany. Siły wewnętrzne w elementach, a także naprężenia można łatwo znaleźć stosując zależności ustalone a priori dla każdego elementu wg (1-4).

Rozpatrzmy konstrukcję obciążoną siłami zewnętrznymi

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (1-8)$$

przyłożonymi w węzłach (niezależnie od obciążeń ciągłych działających na poszczególne elementy). Każda z sił  $R_i$  musi mieć tę samą liczbę składowych jaką przewiduje się dla poszczególnych reakcji węzłów. W rozważanym przypadku

$$\{R_i\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \quad (1-9)$$

ponieważ węzły potraktowaliśmy jako przegubowe; ogólnie można przyjąć dowolną liczbę składowych.

Jeśli teraz mamy ustalić warunki równowagi dla typowego węzła  $i$ , to należy dodać każdą ze składowych  $R_i$  do sumy sił składowych wyrażających oddziaływanie elementów zbiegających się w tym węźle. Rozważając wszystkie składowe siły, mamy

$$\{R_i\} = \Sigma \{F_i^a\} = \{F_i^1\} + \{F_i^2\} + \dots, \quad (1-10)$$

gdzie:  $F_i^1$  — siła oddziaływająca na węzeł  $i$  od elementu 1,  $F_i^2$  — jw. od elementu 2 itd. Oczywiście, tylko elementy łączące się w węźle  $i$  wprowadzają do tego rów-

nania siły nierzerowe, jednak dla porządku do sumowania włączono wszystkie elementy.

Podstawiając (1-3) otrzymujemy następujące równanie dla sił związanych w węźle  $i$

$$\{R_i\} = (\Sigma [k_{i1}]^a) \{\delta_1\} + (\Sigma [k_{i2}]^a) \{\delta_2\} + \dots + \Sigma \{F_i\}_p + \Sigma \{F_i\}_{e0}. \quad (1-11)$$

Sumowanie znów obejmuje tylko te elementy, które łączą się w węzeł  $i$ .

Wszystkie takie równania zapisujemy w postaci

$$[K] \{\delta\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{e0}. \quad (1-12)$$

Macierz  $[K]$  nazywa się macierzą sztywności układu.

Elementami tej macierzy są podmacierze określone następująco:

$$\begin{aligned} [K_{im}] &= \Sigma [k_{im}]^a, \\ \{F_i\}_p &= \Sigma \{F_i\}_p^a, \\ \{F_i\}_{e0} &= \Sigma \{F_i\}_{e0}^a, \end{aligned} \quad (1-13)$$

przy czym sumowanie obejmuje wszystkie elementy.

Ta prosta reguła zbierania równań jest bardzo wygodna, gdyż natychmiast po wyznaczeniu odpowiedniego współczynnika dla poszczególnego elementu można mu byćstawiony we właściwe miejsce przez samą maszynę. *Ta ogólna reguła zbierania stanowi wspólną i podstawową cechę wszystkich obliczeń za pomocą elementów skończonych* i powinna być dobrze przyswojona przez Czytelnika.

Gdy stosujemy różne rodzaje elementów konstrukcji powinniśmy mieć na uwadze, że reguły sumowania macierzy pozwalają dodawać je tylko w przypadku, gdy mają one tego samego wymiaru (ta sama liczba kolumn i ta sama liczba wierszy). Indywidualne podmacierze, z których składa się macierz, muszą być zatem budowane zawsze dla tej samej liczby składowych sił lub przemieszczeń. Jeśli na przykład element konstrukcji przenoszący moment do węzła spotyka się w tym węźle z elementem przegubowym, macierz sztywności tego ostatniego należy uzupełnić pewną wstawienie współczynników zerowych (zer) w odpowiednie miejsca dla obrotów lub momentów.

Układ równań (1-12) może być rozwiązany, gdy podstawione zostaną odpowiednie przemieszczenia. W przypadku rys. 1.1, jeśli obie składowe przemieszczenia węzłów 1 do 6 są zerami, należy to przekazać przez podstawienie

$$\{\delta_1\} = \{\delta_6\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Jest to równoważne redukcji równań równowagi (w tym przypadku dwunastu) przy równoczesnej redukcji liczby niewiadomych do ośmiu.

Jednakże zawsze wygodniej jest układać równania w myśl (1-12), tj. włączać wszystkie węzły.

Jest oczywiście, że bez podstawienia co najmniej takiej liczby przemieszczeń, która jest niezbędna dla zapobieżenia ruchom konstrukcji jako ciała sztywnego, nie jest możliwe rozwiązanie układu, ponieważ w takiej sytuacji przemieszczenia

nie będą jednoczesne określone przez siły. Ten fizyczny oczywisty fakt będzie interpretowany matematycznie w macierzy  $[K]$ , która wówczas będzie macierzą osobliwą, tj. nie będzie miała macierzy odwrotnej. Uwzględnienie ograniczeń kinematycznych w konstrukcji po zebraniu równań powoduje modyfikację macierzy  $[K]$ . W przypadku przemieszczeń zerowych ulegają skreśleniu odpowiadające tym przemieszczeniom wiersze i kolumny tej macierzy.

Podczas gdy podstawienie znanych przemieszczeń jest względnie łatwe przy obliczaniu tradycyjnym, dając w wyniku redukcję liczby rozwiązywanych równań, to często wygodniej jest przy obliczeniu na maszynie wykonywać działania na pierwotnej liczbie równań, aby uniknąć przekształcania stanu pamięci maszyny. Staje się to bardzo proste przy wykorzystaniu pomysłu *Payne'a* i *Irons'a* [4].

Przy zastosowaniu tego pomysłu, zamiast eliminować równania równowagi, w których znane są poszczególne przemieszczenia (a odpowiednie składowe siły zewnętrzne nieznane), i rozwiązywać pozostałe równania poprzez podstawienie znanych przemieszczeń, współczynniki przekątne macierzy  $[K]$  dla rozważanego punktu są mnożone przez bardzo dużą liczbę. Równocześnie wyrazy po prawej stronie równania zastępuje się iloczynami tej liczby przez zadane wartości przemieszczeń. Równanie eliminowane zastępuje się więc równaniem, w którym rozważane przemieszczenie jest równe odpowiednio dobranej wartości, i podstawia się to równanie do rozwiązywanego układu.

Po uzyskaniu wartości przemieszczeń w wyniku rozwiązania układu (1-12) znajduje się siły i naprężenia w poszczególnych elementach konstrukcji, korzystając ze wzoru (1-4).

#### 1.4. Transformacja współrzędnych

Często wygodnie jest zestawzić związki charakterystyczne dla poszczególnych elementów w układzie współrzędnych różnym od tego, w którym obliczane są siły zewnętrzne i przemieszczenia całej konstrukcji. Dla każdego elementu mogą być stosowane różne układy współrzędnych, jeśli ułatwia to rachunek. Istnieje prosty sposób przekształcania składowych przemieszczeń i sił w równaniu (1-3) z określonego układu na jakikolwiek inny układ wspólny dla konstrukcji. Oczywiście można to uczynić przed zebraniem pełnej macierzy konstrukcji.

Oznaczmy lokalny układ współrzędnych, w którym wyrażamy własności elementu, przez wskaźnik „prim”, zaś ogólny układ współrzędnych (dla całej konstrukcji) pozostawmy bez wskaźnika.

Składowe przemieszczeń można przetransformować przez odpowiednią macierz kosinusów kierunkowych  $[L]$

$$\{\delta'\}^a = [L]\{\delta\}^a. \quad (1-14)$$

Składowe sił transformuje się podobnie, za pomocą tej samej macierzy

$$[F']^a = [L][F]^a. \quad (1-15)$$

Jeśli macierz sztywności pozostała w lokalnych współrzędnych (primowanych), to równania (1-3) w ogólnych współrzędnych (nieprimowanych) ma postać

$$\{F\}^a = [L]^{-1}\{F'\}^a = [L]^{-1}[k']^T[L]\{\delta\}^a + [L]^{-1}\{F'\}_p^a + [L]^{-1}\{F'\}_0^a. \quad (1-16)$$

Macierz sztywności w ogólnych współrzędnych wyraża się zatem następująco

$$[k]^a = [L]^{-1}[k']^a[L]. \quad (1-17)$$

Ponieważ macierz transformacji jest ortogonalna, tj. transpozycja macierzy równa się jej odwrotności,<sup>1)</sup> mamy

$$[L]^{-1} = [L]^T,$$

więc

$$[k]^a = [L]^T[k']^a[L]. \quad (1-17a)$$

Czytelnik może sprawdzić pożyteczność powyższej transformacji poprzez ponowne przerobienie przykładu pręta obustronnie przegubowego. Oczywiście, uzyskane tutaj uproszczenie będzie znacznie efektywniejsze w przypadku bardziej skomplikowanych elementów.

#### 1.5. Sieć elektryczna lub wodociągowa

Intuicyjne zasady określania charakterystyk elementów i układania równań obowiązuja także w wielu zagadnieniach niebudowlanych.

Wskazaliśmy na przykład układ oporów elektrycznych przedstawiony na rys. 1.1. Jeśli typowy element oporu  $i_j$  wydzielimy z układu, możemy zapisać równanie o prawem *Ohma* związek pomiędzy natężeniem prądu wchodzącego do elementu na jego końcach a napięciem na tych końcach jako

$$I_i = \frac{1}{r^e} (V_i - V_j),$$

$$I_j = \frac{1}{r^e} (V_j - V_i)$$

<sup>1)</sup> Można to łatwo sprawdzić wychodząc z faktu, że praca wykonana w każdym układzie współrzędnych jest taka sama. Zatem

$$(\{F\}^a)^T \{\delta\}^a = (\{F'\}^a)^T \{\delta'\}^a.$$

Wykorzystując zależności (1-14) i (1-15)

$$(\{F\}^a)^T \{\delta\}^a = (\{F'\}^a)^T [L]^T [L] \{\delta\}^a.$$

Wydawanie musi być

$$[L]^T [L] = [I] \text{ (macierz jednostkowa),}$$

więc

$$[L]^{-1} = [L]^T.$$

lub w postaci macierzowej

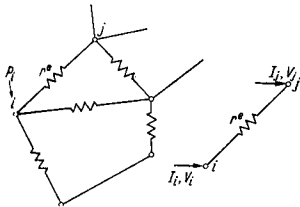
$$\begin{Bmatrix} I_i \\ I_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{r^e} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}$$

Stosując tu ustalony poprzednio zapis, mamy

$$\{I\}^e = [k]^e \{V\}^e. \quad (1-18)$$

Postać ta odpowiada związkowi (1-3).

Podobnie jeżeli wzdłuż „elementu” przyłożone jest natężenie zewnętrzne można również znaleźć wyrażenie odpowiadające „sile” w elemencie.



Rys. 1.3. Układ oporów elektrycznych

Dla zestawienia całego układu zakłada się ciągłość potencjału w węzłach i bilans prądu. Jeżeli  $P_i$  przedstawia dopływ prądu w węzle  $i$ , wówczas analogicznie do (1-11) otrzymujemy

$$P_i = \sum_{m=1}^n \sum_{m=1}^n k_{im}^e V_m, \quad (1-19)$$

gdzie drugie sumowanie należy rozciągnąć na wszystkie elementy.

Dla wszystkich węzłów stosujemy zapis

$$\{P\} = [K]\{V\}, \quad (1-20)$$

gdzie

$$K_{ij} = \sum k_{ij}^e.$$

W powyższym wyrażeniu opuszczono nawiasy, ponieważ takie wielkości jak napięcie i natężenie prądu, a zatem i współczynniki „macierzy sztywności”, są skalarami.

Jeżeli układ oporów elektrycznych zastąpimy przez rury prowadzące ciecz, w których panuje stan laminarny, wówczas można dokładnie powtórzyć takie same sformułowania, oznaczając przez  $V$  ciśnienie hydrauliczne, przez  $I$  zaś przepływ.

W układach rurociągów spotykanych w praktyce liniowe prawa nie mogą być stosowane. Typowy związek między ciśnieniem a przepływem ma postać

$$I_i = c(V_i - V_j)^\gamma, \quad (1-21)$$

gdzie wykładnik  $\gamma = 1,5 \div 2$ .

I tutaj również możliwe jest zapisanie związków w postaci (1-18), z tym jednak, że macierze  $k^e$  nie będą zbiorem stałych lecz znanymi funkcjami od  $\{V\}$ . Równaniu końcowe można tu zestawzić podobnie jak poprzednio, lecz nie będą to równania liniowe i na ogół przy ich rozwiązaniu potrzebne jest postępowanie iteracyjne.

Wreszcie warto zaznaczyć, że można rozważać także bardziej ogólną postać sieci elektrycznej poddanej działaniu prądu zmiennego. Zazwyczaj związki między natężeniem a napięciem zapisuje się wówczas w postaci zespolonej, zastępując opór przez impedancję zespoloną. I znów można otrzymać standardową postać równań (1-18) do (1-20), jednak każda wielkość będzie teraz podzielona na części rzeczywistą i urojona.

Można zastosować tu taki sam sposób postępowania przy rozwiązywaniu, jeżeli występuje równość części rzeczywistych i urojonych w każdym etapie. Istotnie, współczesne maszyny cyfrowe pozwalają stosować programowanie standardowe umożliwiające wykorzystanie wszystkich ułatwień przy operowaniu liczbami zespolonymi. Uwagi dotyczące pewnych zagadnień tego typu podane są w dalszych rozdziałach, przy omawianiu zagadnień drgań.

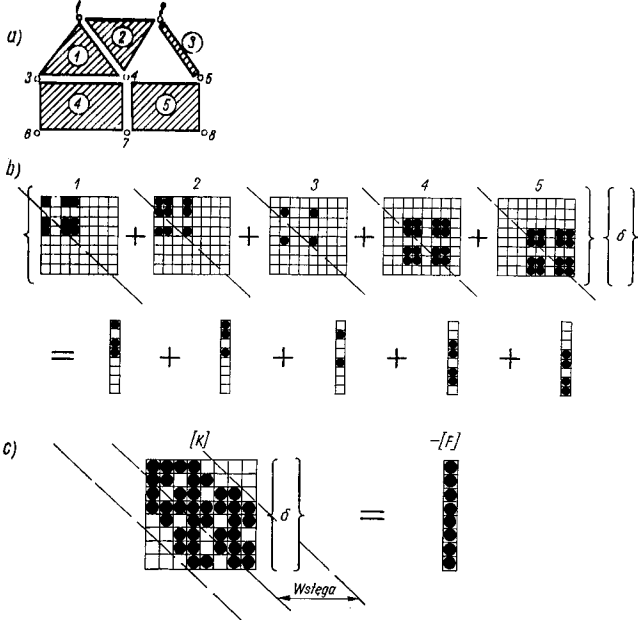
## 1.6. Układ ogólny

Dla utrwalenia omawianych koncepcji poniżej rozpatrzmy przykład. Pokazano go na rys. 1.4a; urządzenie składa się z pięciu oddzielnych elementów połączonych w sposób ogólny. Mogą one przedstawiać zagadnienie budowlane, elektryczne lub inne, typu liniowego. Przy rozwiązaniu zagadnienia postępujemy według poniższego schematu.

Pierwszym krokiem jest określenie własności elementów ze względu na geometrię układu, materiał i dane o obciążeniu. Dla każdego elementu znajdujemy odpowiednie sztywności i odpowiednie obciążenia w węzłach w postaci równań (1-1). Każdy element ma swój własny numer i określone powiązania w węzłach. Np.

element	węzły
1	1, 3, 4
2	1, 4, 2
3	2, 5
4	3, 6, 7, 4
5	4, 7, 8, 5.

Zakładając, że własności zostały określone we współrzędnych ogólnych, możemy wpisać każdą składową sztywności lub siły w jej położenie w ogólnej macierzy, jak pokazano na rys. 1.4b. Każdy zaciemniony kwadracik oznacza pojedynczy współczynnik lub podmacierz postaci  $[k_{ij}]$ , jeżeli rozpatrywana jest więcej niż jedna wielkość w pojedynczym węźle. Dla każdego elementu widać zatem jego udział w macierzy ogólnej: Czytelnik zechce sprawdzić położenia poszczególnych współczynników. Zauważmy, że różne postacie rozpatrywanych tu ele-



Rys. 1.4. Układ ogólny rozwiązania (opis w tekście)

mentów nie sprawiają trudności przy wpisywaniu (wszystkie siły węzłowe, dla uproszczenia, są tutaj powiązane z elementami).

**Drugi krok** polega na zebraniu końcowych równań typu podanego we wzorze (1-12). Dokonuje się tego przez zastosowanie reguły *dołączania* wszystkich liczb odpowiednio do ich położenia w macierzy ogólnej wg wzoru (1-13). Wynik pokazano na rys. 1.4c, gdzie współczynniki niezerowe zaznaczone są przez zamienienie odpowiednich kwadracików.

Ponieważ macierz jest symetryczna, wystarczy wyznaczyć tylko jej górną połowę nad przekątną.

Wszystkie niezerowe współczynniki znajdują się wewnątrz *pasma*, którego szerokość, dla zadanych warunków połączenia elementów, można określić *z góry*. Dlatego w programie maszyny należy zapamiętać tylko elementy znajdujące się w górnej połowie pasma macierzy, wliczając główną przekątną, jak pokazano na rys. 1.4c.

**Trzeci krok** polega na wstawieniu do końcowego układu macierzy zadanych warunków granicznych; jak to omówiono w p. 1.3.

Następnie dokonuje się *ostatniego kroku*, polegającego na rozwiązaniu ostatecznego układu równań. Można tu zalecić szereg różnych metod postępowania; niektóre z nich omówione są w rozdz. 20. W istocie, problem rozwiązywania równań, chociaż szczególnie ważny, leży poza zakresem zainteresowań niniejszej książki.

Po tym ostatnim kroku należy jeszcze dokonać podstawień dla obliczenia naprężeń, natężeń prądu lub innych wymaganych wielkości końcowych.

Wszystkie operacje przy analizie sieci dokonywane są zgodnie z przedstawionymi powyżej wytycznymi, które Czytelnik powinien dokładnie zrozumieć i opamiętać. Są one ważne dla zastosowań metody elementów skończonych, choć nie stanowią jej istoty, i są w zasadzie dobrze znane i zawsze dadzą się zastosować w dyskretnych układach sieci.

*Dłuższy ciąg tej książki poświęcony jest badaniu metody, za pomocą której ostateczki ciągle można zastąpić z dostatecznym przybliżeniem przez równoważne układy dyskretnie.* Gdy cel ten osiągniemy, wówczas przedstawione tutaj zasady pozwolą dokonać pełnego obliczenia układu.

#### Wydane publikacje

- [1] P. Timoshenko, D. H. Young: Theory of Structures. Wyd. 2. Mc Graw Hill, 1965.
- [2] H. A. Tadmor: Matrix Methods in Structural Analysis. Pergamon Press, 1964.
- [3] A. Przemieniecki: Theory of Matrix Structural Analysis. Mc Graw Hill, 1968.
- [4] H. J. Martin: Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis. Mc Graw Hill, 1969.
- [5] H. J. Martin: Matrix and Digital Computer Methods of Structural Analysis. Mc Graw Hill, 1969.
- [6] A. T. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp: Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Amer. Mol., 23, a. 805-23, 1956.
- [7] H. A. Tadmor, H. Irons: Private communication, 1963.

## 2. Skończone elementy kontinuum sprężystego – metoda przemieszczeń

### 2.1. Wstęp

W wielu zagadnieniach inżynierskich wymagane jest znalezienie rozkładu naprężeń i odkształceń w kontinuum sprężystym. Z problemami tego rodzaju spotykamy się przy obliczaniu tarcz, płyt, powłok i ciał trójwymiarowych. We wszystkich tych przypadkach liczba powiązań pomiędzy dowolnym „skończonym elementem” wydzielonym myślowo a jego otoczeniem jest nieograniczona. Zadanie to może być obliczone w sposób podobny do opisanego w rozdziale 1. Rozwiązanie jest następujące:

a) Kontinuum podzielone zostaje w myśli liniami na pewną liczbę „skończonych elementów”.

b) Zakłada się, że elementy te są połączone ze sobą w skończonej liczbie punktów, znajdujących się na ich obwodach. Przemieszczenia punktów węzłowych stanowią błądą punktawowy układ niewiadomych.

c) Znajduje dobrana funkcja (funkcje) określająca jednoznacznie stan przemieszczeń wewnątrz każdego elementu skończonego w zależności od przemieszczeń punktów węzłowych.

d) Funkcje przemieszczeń definiują jednoznacznie stan odkształceń wewnątrz elementów w zależności od przemieszczeń węzłów. Odkształcenia te, wspólnie z odkształceniami początkowymi i własnościami sprężystymi materiału, określają stan naprężeń w całym elemencie, a więc i na jego brzegach.

e) Znajduje określony układ sił skupionych w węzłach, równoważących napięcia na brzegach elementów oraz wszelkie inne siły; otrzymuje się związki sztywności w postaci równań (1-3).

Ten etap ten zostanie osiągnięty, dalsze rozwiązywanie odbywa się w opisany w poprzednio sposób.

Przykładem wymaga to szeregu aproksymacji. Pierwszą trudność stanowi odwołanie funkcji przemieszczeń spełniających warunek ciągłości pomiędzy stykającymi się elementami. Dlatego też warunki zgodności wzdłuż tych linii mogą być spełnione (choć wewnątrz każdego elementu są one spełnione przez



wybór wspomnianych funkcji). Po drugie, przez skupienie sił prowadzących w węzłach warunki równowagi spełnione są tylko w odniesieniu do całego układu. Zazwyczaj występować będą lokalne odchylenia od warunków równowagi wewnętrznej każdego elementu i na jego granicach.

Wybór kształtu elementu i postaci funkcji przemieszczeń w poszczególnych przypadkach zależy w dużym stopniu od pomysłowości i doświadczenia inżyniera. Oczywiście wybór tych dwóch czynników decyduje o stopniu przybliżenia rozwiązania.

Zaproponowany tutaj sposób podejścia do zagadnienia znany jest pod nazwą sposobu przemieszczeń [1], [2].

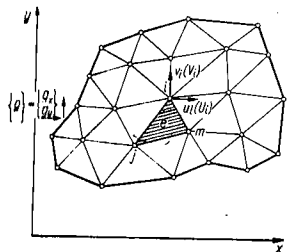
Opisany dotychczas proces może być sprawdzony tylko intuicyjnie, jednakże to co zostało zaproponowane, w istocie swej jest równoważne minimalizacji całkowitej energii potencjalnej układu, wyrażonej w funkcji założonego pola przemieszczeń. Jeżeli pole to jest określone w odpowiedni sposób, wówczas zapewniona jest zbieżność do wyników poprawnych. Proces jest więc podobny do dobrze znanego postępowania *Ritz'a*. To podobieństwo (równoważność) zostało udowodnione dalej; tam też omówione są kryteria zbieżności.

Równoważność metody elementów skończonych z procesem minimalizacji energii stwierdzono wcześniej [2], [3]. Natomiast *Courant* [4] w 1943 r. oraz *Prager* i *Synge* [5] w 1947 r. zaproponowali metody podobne w istocie do opisywanej. Ta bogata baza metody pozwala rozszerzyć jej stosowanie na wszystkie prawic problemy, w których możliwe jest sformułowanie wariacyjne. Pewne zagadnienia typu niebudowlanego są omówione w rozdz. 15.

## 2.2. Bezpośrednie określenie charakterystyk elementu skończonego

Sposoby wyznaczenia charakterystyk elementu skończonego wyodrębnionego z kontinuum, omówione ogólnie, zostaną obecnie przedstawione w szczególowej postaci matematycznej.

Pożądanе jest uzyskanie rezultatów w postaci ogólnej, nadającej się do każdego okoliczności; aby jednak ułatwić zrozumienie, związki ogólne są ilustrowane na



Rys. 2.1. Obszar płaski podzielony na elementy skończone

przykładzie płaskiej tarczy. Podzielono ją na elementy trójkątne, jak podano na rys. 2.1. Wyrażenia mające znaczenie ogólne są drukowane tłustą czcionką, a odnoszące się do przykładu — normalną. Stosowany jest zapis macierzowy.

**2.2.1. Funkcja przemieszczeń.** Typowy element skończony  $e$  (rys. 2.1) zdefiniowany jest poprzez węzły  $i, j, m, \dots$  i prostoliniowe brzozy. Przemieszczenie w dowolnym punkcie wewnątrz elementu jest określone wektorem kolumnowym  $\{f(x, y)\}$

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e = [N_i N_j N_m \dots] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

w którym składniki  $[N]$  ogólnie są pewnymi funkcjami,  $\{\delta\}^e$  zaś reprezentuje zbiór przemieszczeń węzłów dla omawianego elementu.

Dla zagadnienia płaskiego

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

przedstawia przemieszczenia poziome i pionowe dowolnego punktu wewnątrz elementu, natomiast

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

odpowiednio przemieszczenia węzła  $i$ .

Funkcje  $N_i, N_j, N_m \dots$  należy tak obrać, aby dawały odpowiednie przemieszczenia węzłów, gdy do równania (2-1) wstawione będą współrzędne odnośnych węzłów.

W przypadku funkcji liniowych mamy

$$N_i(x_i, y_i) = I \text{ (macierz jednostkowa),}$$

stad

$$N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_m) = 0 \text{ itd.}$$

Wskazywały dotyczące tego zagadnienia podane są w następnych rozdziałach.

Funkcje  $[N]$  nazywane są „funkcjami kształtu”; odgrywają one doniosłą rolę w metodzie elementów skończonych.

**2.2.2. Odkształcenia.** Jeżeli znane są przemieszczenia we wszystkich punktach elementu, to można wyznaczyć „odkształcenia”<sup>1)</sup> w dowolnym jego punkcie. Związek pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniem węzłów w postaci macierzyowej jest następujący

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}^e. \quad (2-2)$$

<sup>1)</sup> „Odkształcenia” są tu rozumiane ogólnie, np. krzywizna w problemie zginania płyty.

Dla zadania płaskiego odkształceniu mogą być zapłacono w ogólnie znanej postaci [6]

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Z równań (2-1) przy określonych funkcjach  $N_i$ ,  $N_j$  i  $N_m$  uzyskuje się z łatwością macierz  $[B]$ . Jeśli przyjmiemy liniową postać tych funkcji, wówczas odkształcenia wewnątrz rozważanego elementu pozostają stałe.

**2.2.3. Naprężenia.** Ogólnie biorąc, materiał elementu może być poddany początkowym odkształceniom spowodowanym temperaturą, skurczem, rozwojem kryształów itd. Oznaczmy te odkształcenia przez  $\{\epsilon_0\}$ . Naprężenia w elemencie wywołane będą różnicami pomiędzy tymi odkształceniami a odkształceniami występującymi aktualnie. Ponadto wygodnie jest założyć, że na początku obliczeń ciało jest poddane działaniu znanego układu początkowych naprężeń resztkowych (residualnych)  $\{\sigma_0\}$ , które można pomierzyć, lecz zmienności ich nie da się przewidzieć bez znajomości pełnej historii materiału. Naprężenia te można po prostu dodać do zdefiniowanych ogólnie. Zatem, przy założeniu sprężystych własności materiału, związek pomiędzy odkształceniami i naprężeniami staje się liniowy i przyjmuje postać

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (2-3)$$

gdzie  $[D]$  — macierz sprężystości, opisująca zadane własności materiału.

Dla szczególnego przypadku płaskiego stanu mamy trzy naprężenia składowe, odpowiadające trzem rozpatrywanym składowym odkształceniom. Naprężeniami tymi są

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

znając macierz  $[D]$  dla materiału izotropowego otrzymuje się ze znanych zależności [6]

$$\epsilon_x - (\epsilon_x)_0 = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y,$$

$$\epsilon_y - (\epsilon_y)_0 = -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y,$$

$$\gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy},$$

lub po zebraniu odpowiednich wyrazów

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

**2.2.4. Równoważne siły węzłowe.** Niech wektor (macierz)

$$\{\mathbf{F}\}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \\ \mathbf{F}_m \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

przedstawia siły węzłowe, statycznie równoważne napięciom na granicach elementu i linijnym obciążeniom elementu. Każda z sił  $\{\mathbf{F}_i\}$  musi mieć tę samą liczbę składowych jak odpowiednie przemieszczenie węzła  $\{\delta_i\}$  i musi być skierowana we właściwym kierunku. Obciążenia  $\{\mathbf{p}\}$  definiowane są jako działające na jednostkę objętości wewnątrz elementu i mające kierunki odpowiadające kierunkom przemieszczeń  $\{\mathbf{f}\}$  w odpowiednich punktach wnętrza.

W szczególnym przypadku płaskiego stanu naprężenia siły węzłowe mają postać

$$\{\mathbf{F}_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

gdzie:  $U$  i  $V$  — składowe sił odpowiadające kierunkom przemieszczeń  $u$  i  $v$ , zaś odpowiednio rozłożone  $\{\mathbf{p}\}$

$$\{\mathbf{p}\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

gdzie:  $X$  i  $Y$  — znane składowe „siły masowe”.

Aby uzyskać siły w węzłach statycznie równoważne napięciom na brzegach i liniowym rozłożonym, najprościej jest założyć dowolne wirtualne przemieszczenia węzłów i porównać pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych, którą wszystkie siły wykonują na tych przemieszczeniach.

Założmy, że przemieszczenia wirtualne węzłów są  $\mathbf{d}\{\delta\}^e$ . Powodują one przemieszczenia i odkształcenia wewnątrz elementu, które wg (2-1) i (2-2) zapisujemy odpowiednio

$$\mathbf{d}\{\mathbf{f}\} = [N]\mathbf{d}\{\delta\}^e \text{ oraz } \mathbf{d}\{\epsilon\} = [B]\mathbf{d}\{\delta\}^e. \quad (2-4)$$

Praca wykonana przez siły węzłowe równa się sumie iloczynów poszczególnych składowych tych sił przez odpowiadające przemieszczenia, tj. w zapisie macierzyowym

$$(\mathbf{d}\{\delta\}^e)^T \{\mathbf{F}\}^e. \quad (2-5)$$

Podobnie praca sił wewnętrznych w jednostce objętości wykonana przez naprężenia i siły rozłożone wynosi

$$(\mathbf{d}\{\epsilon\})^T \{\sigma\} - (\mathbf{d}\{\mathbf{f}\})^T \{\mathbf{p}\}, \quad (2-6)$$

$$(\mathbf{d}\{\delta\})^T \{[\mathbf{B}]^T \{\sigma\} - [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\}\}. \quad (2-7)$$

Porównując pracę sił zewnętrznych z całkowitą pracą sił wewnętrznych, otrzymaną przez scałkowanie po całej objętości elementu, mamy<sup>2)</sup>

$$(\mathbf{d}\{\delta\})^T \{\mathbf{F}\}^e = (\mathbf{d}\{\delta\})^T \left( \int [\mathbf{B}]^T \{\sigma\} d(\mathbf{vol}) - \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} d(\mathbf{vol}) \right). \quad (2-8)$$

Ponieważ związek ten jest ważny dla każdej wartości przemieszczeń wirtualnych, musi zachodzić równość mnożników. Podstawiając zatem (2-2) i (2-3) otrzymujemy

$$\{\mathbf{F}\}^e = \left( \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d(\mathbf{vol}) \right) \{\delta\}^e - \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\epsilon_0\} d(\mathbf{vol}) + \int [\mathbf{B}]^T \{\sigma_0\} d(\mathbf{vol}) - \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} d(\mathbf{vol}). \quad (2-9)$$

Jest to typowy związek dla charakterystyk dowolnego elementu skończonego w postaci przedstawionej w rozdz. 1 przez (1-3). Macierz sztywności ma postać

$$[\mathbf{k}]^e = \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d(\mathbf{vol}), \quad (2-10)$$

siły w węzłach wywołane rozłożonym obciążeniem

$$\{\mathbf{F}\}_p^e = - \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} d(\mathbf{vol}), \quad (2-11)$$

znac siły w węzłach od odkształceń początkowych

$$\{\mathbf{F}\}_{\sigma_0}^e = - \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\epsilon_0\} d(\mathbf{vol}). \quad (2-12)$$

Siły węzłowe wywołane przez naprężenia początkowe  $\sigma_0$  (patrz p.2.2.3) można zapisać

$$\{\mathbf{F}\}_{\sigma_0}^e = \int [\mathbf{B}]^T \{\sigma_0\} d(\mathbf{vol}). \quad (2-13)$$

Jeżeli układ naprężeń początkowych jest samorzównoważony, jak to jest w przypadku zwykłych naprężeń residualnych, wówczas siły wyrażone przez równanie (2-13) po scałkowaniu muszą być równe zeru. Dlatego też często pomija się te siły. Jednakże, jeśli na przykład część maszyny wykonuje się z bloku, w którym występują naprężenia residualne, lub gdy wykonuje się wykop w skale, gdzie znane są naprężenia tektoniczne, pominięcie takie nie jest możliwe.

Dla rozważanego przykładu trójkątnego elementu płaskiego charakterystyki powyższe można otrzymać przez odpowiednie podstawienie funkcji kształtu. Należy zaznaczyć, że dla funkcji liniowych macierzy  $[\mathbf{B}]$  nie zależy od współrzędnych, zatem całkowanie wykonuje się dość prosto.

<sup>1)</sup> Zauważmy, że zgodnie z regułą algebry macierzy

$$([\mathbf{A}][\mathbf{B}])^T = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{A}]^T.$$

<sup>2)</sup> vol oznacza tu objętość (przyp. tłum.).

Poleżenie i rozwiązanie całego układu elementów odbywa się w sposób opisany w rozdz. 1. Ogólnie biorąc, w węzłach mogą istnieć siły skupione, a wówczas macierz

$$\{\mathbf{R}\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

powinno być dodana do stanu równowagi węzłów.

Obciążenia wymagają tu jeszcze elementy w pobliżu brzegów badanego obszaru. Nie ma trudności, jeśli na brzegi określone są przemieszczenia. Rozważmy jednak brzeg obciążony siłami rozłożonymi np.  $\{\mathbf{g}\}$  na jednostkę pola. Do obciążeń węzłów równowagi elementu należy dodać człon obrazujący wpływ obciążonego brzegu. Tęsi badamy pracę wirtualną, dodajemy po prostu<sup>1)</sup>

$$\{\mathbf{F}\}_g^e = - \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{g}\} d(\mathbf{area}), \quad (2-15)$$

przez całe całkujemy po całym polu brzegu. Zauważmy, że  $\{\mathbf{g}\}$  musi mieć tyle samo składowych, ile ich ma  $\{\mathbf{f}\}$ . Taki element brzegowy pokazano dla przypadku prostokąta na rys. 2.1.

Całkowanie tego typu rzadko udaje się explicite. Zwykle, korzystając z intuicji fizycznej, można rozpatrywać obciążenie brzegowe jako układ sił skupionych działających w węzłach i obliczać je zwykłymi metodami statyki. W szczególności, omawianym tu przypadku rezultaty będą dostatecznie dokładne.

Siły przemieszczenia węzłów są wyznaczone przez rozwiązanie układu równań równowagi, można określić naprężenia w każdym punkcie elementu z zależności (2-2) i (2-3)

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\delta\}^e - [\mathbf{D}]\{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\}. \quad (2-16)$$

W równaniu tym łatwo dostrzegamy typowe wyrazy z równania (1-4); macierz sztywności elementu ma postać

$$[\mathbf{S}]^e = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]. \quad (2-17)$$

Do tego należy dodać naprężenia:

$$\{\sigma_{\sigma_0}\} = -([\mathbf{D}]\{\epsilon_0\}) \quad \text{oraz} \quad \{\sigma_0\}. \quad (2-18)$$

Wzrost w równaniu (2-16) wyrażenia na naprężenia od rozłożonych obciążeń  $\{\mathbf{g}\}$ , wynika stąd, że nie była rozważana równowaga wewnątrz każdego elementu, a ustalano jedynie warunki równowagi całego układu.

### 3.3.3. Uogólniony charakter przemieszczeń, odkształceń i naprężeń.

Ważne jest pojęcie takich jak: przemieszczenie, naprężenie i odkształcenie w rozważanym powyżej przykładzie jest jednoznaczne. Natomiast w wielu innych zastosowaniach, opisywanych dalej, terminologia ta będzie stosowana w mniej oczy-

<sup>1)</sup> W tym miejscu tu pole brzegu (przyp. tłum.).

wiastych przypadkach. Rozpatrując na przykład element płyty, jako „przemieszczenia” można traktować ugięcia płyty i nachylenia poszczególnych jej przekrojów; „naprężeniami” nazwane będą momenty zginające, a „odkształceniami” — krzywizny płaszczyzny środkowej.

Wszystkie wyprowadzone powyżej wyrażenia nie tracą ważności jeśli założymy, że suma iloczynów składowych przemieszczeń i odpowiadających im składowych sił oznacza pracę zadanych sił zewnętrznych, zaś suma iloczynów składowych „naprężeń” i odpowiadających im „odkształceń” — całkowitą pracę sił wewnętrznych.

### 2.3. Uogólnienie na cały obszar z pominięciem pojęcia wewnętrznych sił węzłowych

W dotychczasowych rozważaniach zastosowano zasadę pracy wirtualnej dla jednego elementu, przy zachowaniu pojęcia równoważnych sił węzłowych. Zasada układania równań w sposób oczywisty wynikała z konwencjonalnej, pośredniej metody.

Idea sił węzłowych, pochodzących od elementów i zastępujących oddziaływania rozłożone w sposób ciągły, stanowi trudność koncepcyjną. Ma ona znaczenie przy odwoływaniu się do intuicji inżyniera — praktyka, pozwalając na interpretację, która z drugiej strony nie jest wcale oczywista dla matematyka. Nie ma jednak potrzeby rozpatrywania każdego elementu indywidualnie; rozważania poprzednie można zastosować wprost do kontinuum jako całości.

Równanie (2-1) można odnieść do całego obszaru, czyli

$$\{f\} = [\bar{N}] \{\delta\}, \quad (2-19)$$

gdzie w  $\{\delta\}$  wyszczególnione są wszystkie punkty węzłowe, oraz

$$\bar{N}_i = N_i, \quad (2-20)$$

gdy rozważany punkt jest zawarty wewnątrz pewnego elementu  $e$ , zaś  $i$  jest punktem związanym z tym elementem. Jeżeli punkt  $i$  nie znajduje się wewnątrz elementu, wtedy

$$\bar{N}_i = 0. \quad (2-21)$$

Podobnie można zdefiniować macierz  $[B]$  i zastosować zasadę prac wirtualnych do całej konstrukcji. Siły między elementami mogą tu nie być brane pod uwagę i praca sił zewnętrznych wywołana poszczególnymi przemieszczeniami wirtualnymi  $d\{\delta\}$  wyraża się

$$(d\{\delta\})^T \{R\}, \quad (2-22)$$

zaś praca wirtualna sił wewnętrznych

$$\int_V (d\{\epsilon\})^T \{\sigma\} dV - \int_V (d\{f\})^T \{p\} dV - \int_S (d\{f\})^T \{g\} dS, \quad (2-23)$$

gdzie całki należy teraz rozciągnąć na cały obszar. Podstawiając

$$d\{f\} = [\bar{N}]d\{\delta\} \quad \text{i} \quad d\{\epsilon\} = [\bar{B}]d\{\delta\} \quad (2-24)$$

i uwzględniając związek fizyczny (2-3), otrzymamy bezpośrednio przez przyrównanie prac wirtualnych sił zewnętrznych i wewnętrznych następującą zależność

$$[K]\{\delta\} + \{F\}_p + \{F\}_s + \{F\}_{e0} + \{F\}_{e0} - \{R\} = 0. \quad (2-25)$$

Typowa postać wyrazu macierzy sztywności jest następująca

$$[K_{ij}] = \int_V [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}]_j dV, \quad (2-26)$$

gdzie całkowanie rozciąga się na cały obszar.

Rozpatrując jednak związek pomiędzy  $[\bar{B}]_i$  i  $[B]_j$ , stwierdzamy, że

$$[K_{ij}] = \sum [k_{ij}]^e, \quad (2-27)$$

gdzie udział każdego elementu musi być wyznaczony indywidualnie, zgodnie z zaleceniami podanymi w poprzednich paragrafach.

To samo można z łatwością wykazać dla innych składowych sił występujących w równaniu (2-25).

Tak więc reguły układania równań można otrzymać bez potrzeby korzystania z koncepcji „sił międzyelementowych”. W pozostałej części tego rozdziału wskaźnik górny, oznaczający element, może więc być opuszczony. Podobnie, nie będzie więc czynić różnicy pomiędzy funkcjami kształtu elementu i układu.

Jednakże konieczne jest tu podanie ważnej uwagi. Rozpatrując pracę wirtualną całego układu (2-23) i przyrównując ją do sumy udziałów każdego elementu, zakłada się bez zastrzeżeń, że nie występują żadne nieciągłości między elementami. Jeżeli jednak takie nieciągłości występują, należy dodać udział równy pracy naprężeń w miejscach rozdziału.

Zatem pole przemieszczeń zdefiniowane przez funkcje kształtu jest takie, że na stykach istnieją tylko deformacje skończone, tzn. aby równania ogólne były słuszne musi istnieć ciągłość przemieszczeń. O tym warunku będziemy mówić dalej.

### 2.4. Metoda przemieszczeń jako minimalizacja całkowitej energii potencjalnej

Zastosowana powyżej zasada przemieszczeń wirtualnych zapewnia spełnienie warunków równowagi w granicach zadanych przez przygotowany układ przemieszczeń. Tylko wtedy równowaga będzie całkowita, gdy zapewni się równość pracy wirtualnej dla wszelkich dowolnych wariacji przemieszczeń (przy zadanych warunkach brzegowych).

Jeśli liczba parametrów  $\{\delta\}$  opisujących przeszczenie wzrasta nieskończenie, to wówczas uzyskuje się coraz lepsze przybliżenie do wszystkich warunków równowagi.

Zasada prac wirtualnych może być różnie zredagowana. Przyrównując wyrażenia (2-22) i (2-23) można napisać

$$\int_V \{d\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \left[ \{d\{\delta\}\}^T \{R\} + \int_V \{d\{f\}\}^T \{p\} dV + \int_S \{d\{f\}\}^T \{g\} dS \right] = 0. \quad (2-28)$$

Pierwszy wyraz powyższego równania jest wariacją energii odkształcenia  $U$  układu, drugi zaś jest wariacją energii potencjalnej sił zewnętrznych  $W^A$ ; zamiast równania (2-28) można zatem napisać

$$d(U+W) = d\chi = 0, \quad (2-29)$$

gdzie wielkość  $\chi$  zwana jest całkowitą energią potencjalną.

Stwierdzenie powyższe oznacza, że dla spełnienia warunków równowagi całkowita energia potencjalna musi być stacjonarna przy wariacjach przeszczeń dozwolonych.

Równania elementów skończonych, wyprowadzone w poprzednich paragrafach (2-25), stanowią po prostu twierdzenia o tych wariacjach ze względu na przeszczenia wymuszone przy ograniczonej liczbie parametrów  $\{\delta\}$ ; można je zapisać w postaci

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\delta\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \delta_2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0. \quad (2-30)$$

Można wykazać, że w zagadnieniach sprężystości całkowita energia potencjalna jest nie tylko stacjonarna, lecz także minimalna w stanie równowagi [7]. *Metoda elementów skończonych jest zatem procesem poszukiwania takiego minimum przy wymuszeniu założonej siatki przeszczeń.*

Im większa jest liczba stopni swobody układu, tym uzyskane rozwiązanie bliższe będzie rozwiązaniu poprawnemu, całkowicie uwzględniającemu warunki równowagi, przy założeniu, że rzeczywiste przeszczenia mogły być znalezione jako granica przybliżeń. Można zatem wyprowadzić niezbędne warunki zbieżności dla metody elementów skończonych. Omówienie tego znajduje się w dalszych rozdziałach.

Warto odnotować, że o ile poprawne spełnienie warunków równowagi wymaga absolutnego minimum całkowitej energii potencjalnej  $\chi$ , to przybliżone rozwiązanie za pomocą elementów skończonych przy zastosowaniu metody przeszczeń zawsze doprowadzi do przybliżonej wartości  $\chi$ , większej od tego minimum. *Zatem granica wartości całkowitej energii potencjalnej jest zawsze osiągalna.*

<sup>1)</sup> Zakłada się, że siły zewnętrzne są stałe lub też dadzą się wyprowadzić z potencjału jako wyrażenia będące różniczkami zupełnymi.

Jeśli funkcja  $\chi$  może być wyrażona a priori, wtedy równania elementów skończonych można wyprowadzić bezpośrednio przez różniczkowanie równań (2-30).

Podstawiając do równania (2-28) związki fizyczne sprężystości (2-3) i zakładając, że obciążenia nie zmieniają się wraz z przeszczeniami, można je scałkować względem przeszczeń i odkształceń, tj.

$$\left[ \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV - \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon_0\} dV + \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma_0\} dV \right] - \left[ \{\delta\}^T \{R\} + \int_V \{f\}^T \{p\} dV + \int_S \{f\}^T \{g\} dS \right] = 0. \quad (2-31)$$

W równaniu tym pierwszy wyraz w nawiasach przedstawia  $U$ , drugi zaś  $W$ . Istotnie, wyrażenia na całkowitą energię potencjalną mogą być napisane bezpośrednio; stosując więc metodę elementów skończonych często bywa dogodniej zacząć obliczenie właśnie od tego. Proponuje się Czytelnikowi, jako ćwiczenie, wyprowadzić explicite wyrażenia dla elementów skończonych z poprzednich paragrafów, wychodząc z równania (2-31) i różniczkując je względem układu przeszczeń zadanego przez równanie (2-19).

Dobrze znane postępowanie *Rayleigha-Ritza* [8], [9], często stosowane w zagadnieniach sprężystości, opiera się właśnie na takiej metodzie. Formuluje się wyrażenie na całkowitą energię potencjalną oraz zakłada się układ przeszczeń, który może zmieniać się w zależności od skończonej liczby nieznanych parametrów. Następnie przez podstawienie wymienionych parametrów i zróżniczkowanie otrzymuje się układ równocześnie spełnionych równań, minimalizujący całkowitą energię potencjalną.

Postępowanie za pomocą elementów skończonych można więc określić jako identyczne z postępowaniem *Rayleigha-Ritza*. Różnica polega jedynie na sposobie zadawania przeszczeń. W metodzie *Ritza* są one zadawane jako wyrażenia ważne w całym obszarze, prowadzą więc do równocześnie spełnionego układu równań, w którym nie występują więzi i macierz współczynników jest pełna. W metodzie elementów skończonych przeszczenia zadanego są „odcinkowo”; każdy parametr w węźle wpływa tylko na zbliżające się w nim elementy, skąd zazwyczaj otrzymuje się macierz typu pasmowego.

Z istoty swej postępowanie *Ritza* jest na ogół ograniczone do dość prostych kształtów geometrycznych obszaru, podczas gdy w metodzie elementów skończonych ograniczenie to dotyczy wyłącznie kształtu samych elementów. To zaś pozwala na rozpatrywanie złożonych, bliskich do rzeczywistości kształtów obszaru, wychodząc z prostych kształtów elementów.

Metodę elementów skończonych wyróżnia również to, że zamiast nieoznaczonych bliżej parametrów stosuje się po prostu poszczególne przeszczenia obranych węzłów. Pozwala to na prostą fizyczną interpretację, niezwykle cenną dla inżyniera. Niewątpliwie, główny powód popularności metody elementów skończonych wynika z tego właśnie faktu.

## 2.5. Kryteria zbieżności

Założone funkcje kształtu uwzględniają tylko część z nieskończonej liczby stopni swobody układu; rzeczywista wartość minimum energii nie może być zatem nigdy osiągnięta, niezależnie od zagęszczenia podziału. Aby więc zabezpieczyć zbieżność do wyniku poprawnego, muszą być spełnione pewne proste wymagania. Oczywiście jest, że funkcja przemieszczenia powinna przedstawiać rzeczywisty rozkład przemieszczeń tak dokładnie, jak to jest możliwe. Można dowiedzieć, że mimo to brak jest zbieżności, jeżeli przyjęte funkcje powodują stan napięcia elementu, gdy ten przemieszcza się jako ciało sztywne. Stąd pierwsze kryterium dla funkcji przemieszczeń musi brzmieć następująco.

*Kryterium 1. Funkcje przemieszczeń powinny być tak obrane, aby nie pozwalały na wytworzenie się stanu napięcia w elemencie, jeśli przemieszczenia węzłów powodują jedynie ruch elementu jako ciała sztywnego.*

Kryterium to może być łatwo naruszone przy zastosowaniu niewłaściwych rodzajów funkcji kształtu; stąd przy doborze tych funkcji musi być zachowana ostrożność.

Drugie kryterium wynika z wyżej podanych wymagań. Oczywiście jest, że gdy zmniejszamy wymiary elementu, maleją również różnice odkształceń w poszczególnych jego punktach. Jeśli istnieją warunki stałego odkształcenia, byłoby najbardziej pożądane z punktu widzenia dokładności, aby w skończonym elemencie odtworzyć je ściśle. Otóż możliwy jest dobór takich funkcji, które spełniając pierwsze kryterium, zakładają zmienność naprężeń w elemencie, przy równoczesnej zgodności przemieszczeń węzłów z warunkiem stałego odkształcenia. Funkcje takie ogólnie biorąc nie będą wykazywać zadowalającej zbieżności do rozwiązania poprawnego i nie mogą, nawet w granicy, przedstawiać poprawnego stanu odkształceń. Dlatego należy sformułować drugie kryterium.

*Kryterium 2. Funkcja przemieszczeń musi mieć taką postać, aby przy zgodności przemieszczeń węzłów z warunkiem stałych odkształceń można było otrzymać te stałe odkształcenia. (W tym kontekście rozumie się znów „uogólniony” stan odkształcenia).*

Można zauważyć, że kryterium 2 faktycznie obejmuje wymagania kryterium 1, ponieważ przemieszczenia ciała sztywnego są szczególnym przypadkiem stałych odkształceń — równych zeru. Kryterium to zostało sformułowane przez Bazyleya i innych [10] w 1965 r.

Wreszcie (jak wspomniano już w p. 2.3) zakłada się w podanych powyżej wywodach, że w pracy wirtualnej nie występuje udział czynników na granicy pomiędzy elementami. Wynika stąd konieczność wprowadzenia jeszcze jednego kryterium.

*Kryterium 3. Funkcje przemieszczeń powinny być obrane tak, aby odkształcenia na granicach między sąsiednimi elementami były skończone (choć mogą nie być określone).*

Kryterium to implikuje określony rodzaj ciągłości przemieszczeń pomiędzy elementami. W przypadku, gdy odkształcenia zdefiniowane są jako pierwsze

pochodne, jak to omówiono dla zadania płaskich, tylko przemieszczenia muszą być ciągle. Jeśli jednak, jak to ma miejsce w płytach i powłokach, „odkształcenia” są reprezentowane przez drugie pochodne ugięć, należy żądać także ciągłości pierwszych pochodnych przemieszczeń.

Kryteria powyższe matematycznie włączone są w twierdzenie o „funkcjonalnej kompletności”; Czytelnik może zapoznać się z wyczerpującą dyskusją matematyczną zagadnienia w pracach [11] ÷ [15]. „Heurystyczna” kontrola wymagań zbieżności, przytoczona powyżej, jest wystarczająca dla celów praktyki we wszystkich przypadkach (z wyjątkiem może przypadków szczególnie „patologicznych”).

## 2.6. Funkcje przemieszczeń z nieciągłością pomiędzy elementami

W pewnych przypadkach napotyka się na znaczne trudności przy poszukiwaniu funkcji przemieszczeń, które były by automatycznie ciągłe na całym obwodzie pomiędzy sąsiednimi elementami.

Jak zaznaczono, nieciągłość przemieszczeń spowoduje nieograniczone odkształcenia wzdłuż linii podziału; czynnik ten pomijano w omówionych dotąd sformułowaniach, ponieważ udział energii ograniczono do samych elementów.

Gdy jednak siatka podziału maleje, wówczas w granicy ciągłość zostanie przywrócona i sformułowanie nasze doprowadzi do poprawnych wyników. Warunek ten często można osiągnąć, jeżeli:

a) warunek stałych odkształceń automatycznie zapewnia ciągłość przemieszczeń,

b) kryterium stałych odkształceń (patrz p. 2.5) jest spełnione.

W pewnych zagadnieniach omawianych w niniejszej książce są stosowane funkcje przemieszczeń o tym typie „nieciągłości”. Jednakże używanie ich do określania funkcjonału nie jest już wówczas dopuszczalne.

## 2.7. Granice energii sprężystej w metodzie przemieszczeń

Ponieważ przybliżenie otrzymane za pomocą metody elementów skończonych zawsze daje nadmiar w stosunku do poprawnej wartości  $\chi$  całkowitej energii potencjalnej (absolutne minimum odpowiadające poprawnemu rozwiązaniu), zatem taką wartość  $\chi$  nie jest bezpośrednio przydatna dla praktyki. W poszczególnych przypadkach jest jednak możliwe uzyskanie lepszych przybliżeń.

Rozpatrzmy na przykład problem, w którym nie ma ani naprężeń, ani odkształceń początkowych. Z zasady zachowania energii wynika wówczas, że energia odkształcenia powinna być równa pracy sił zewnętrznych wzrastających monotonicznie od zera [16]. Praca ta wynosi  $\frac{1}{2}W$ , gdzie  $W$  jest energią potencjalną obciążenia.

$$U + \frac{1}{2}W = 0, \quad (2-32)$$

lub

$$\chi = U + W = -U, \quad (2-33)$$

zarówno dla poprawnych jak i dla przybliżonych wartości przemieszczeń.

W tym więc przypadku rozwiązanie przybliżone zawsze jest *poniżej* poprawnej wartości  $U$ , a uzyskane przemieszczenia stanowią *dolną granicę rozwiązania*.

Gdy istnieje jedna tylko zewnętrzna siła skupiona  $R$ , wtedy wyrażenie na graniczną wartość energii odkształcenia informuje nas, że ugięcie pod tą siłą będzie mniejsze od rzeczywistego (ponieważ  $U = \frac{1}{2}W = \frac{1}{2}R\delta$ ). W bardziej złożonych przypadkach obciążenia użyteczność tego wyrażenia jest mała, gdyż ani odkształcenie ani naprężenia, tj. wielkości interesujących inżyniera, nie można od siebie niezależnie uzależniać.

Należy pamiętać, że omawiane „ograniczenie” energii odkształcenia ma miejsce tylko przy braku naprężeń i odkształceń początkowych.

Wyrażenie na  $U$  w tym przypadku można otrzymać z równania (2-31)

$$U = \int \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV,$$

które przy wykorzystaniu zależności (2-2) przyjmuje postać

$$U = \{\delta\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{\delta\} = \{\delta\}^T [K] \{\delta\}.$$

Jest to forma kwadratowa, w której  $[K]$  oznacza macierz sztywności omawianą poprzednio.

Powyższe wyrażenie na energię jest zawsze dodatnie, co wynika z rozważań fizycznych. Zatem macierz  $[K]$  występująca we wszystkich układach metody elementów skończonych jest nie tylko symetryczna, lecz także określona dodatnio (właśność wynikająca stąd, że forma kwadratowa musi być zawsze większa lub co najmniej równa zeru).

Ta okoliczność ma znaczenie, gdy rozwiązanie numeryczne układu równań jest rozpatrywane jako uproszczenie, występujące w przypadku „symetrycznych, dodatnio określonych” równań.

## 2.8. Minimalizacja bezpośrednia

Fakt, że przybliżenie za pomocą elementów skończonych sprowadza się do problemu minimalizacji całkowitej energii potencjalnej  $\chi$ , określonej jako funkcja skończonej liczby parametrów węzłowych, doprowadziła nas do zestawienia układu równań, przytoczonego symbolicznie w (2-30). Jest to najbardziej użyteczne i wygodne postępowanie, szczególnie w zagadnieniach liniowych;

można jednak dla określenia najmniejszej wartości  $\chi$  zastosować postępowanie odmienne, opracowane obecnie dobrze dla problemów optymalizacji.

W dalszym ciągu stosować będziemy nadal postępowanie za pomocą układu równań; Czytelnikowi, który interesuje się innymi możliwościami, proponujemy prace [17], [18].

## Cytowane publikacje

- [1] R. W. Clough: The finite element in plane stress analysis, Proc. Wyd. 2. A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., wrzesień 1960.
- [2] R. W. Clough: The finite element method in structural mechanics, Chapter 7 of Stress Analysis, ed. O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister, Wiley, 1965.
- [3] J. Samelner: The energy method of networks of arbitrary shape in problems of the theory of elasticity, Proc. I.U.T.A.M., Symposium on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, ed. by W. Olszak, Pergamon Press, 1959.
- [4] R. Courant: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, Bull. Am. Math. Soc. 49, s. 1-23, 1943.
- [5] W. Prager, J. L. Synge: Approximation in Elasticity based on the concept of function space, Quart. Appl. Math. 5, s. 241-69, 1947.
- [6] S. Timoshenko, J. H. Goodier: Theory of Elasticity, Wyd. 2, ed., McGraw-Hill, 1951. Książka ta ukazała się w polskim wydaniu: Teoria sprężystości. Arkady, Warszawa 1962.
- [7] K. Washizu: Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, 1968
- [8] J. W. Strutt (Lord Rayleigh): On the theory of resonance, Trans. Roy. Soc. (London), A. 161, s. 77-118, 1870.
- [9] W. Ritz: Über eine Methode zur Lösung gewissen Variations-Probleme der mathematischen Physik, J. Reine und Angew. Math., 135, s. 1-61, 1909.
- [10] G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Air Force Inst. Techn. Wright Patterson A. F. Base Ohio 1965.
- [11] S. G. Mikhailin: The problem of the minimum of a quadratic functional, Holden-Day, 1966.
- [12] R. W. McLay: An investigation into the theory of displacement method of analysis for linear elasticity, Ph. D. thesis Univ. of Wisconsin, 1963.
- [13] S. W. Key: A convergence investigation of the direct stiffness method, Ph. D. thesis Univ. of Washington 1966.
- [14] T. H. H. Pian, Ping Tong: The convergence of finite element method in solving linear elastic problems, Int. J. Solids Struct. 3, s. 865-880, 1967.
- [15] E. R. de Arrantes e Oliveira: Theoretical foundations of the finite element method, Int. J. Solids Struct. 4, s. 929-952, 1968.
- [16] H. Fraeijts de Veubeke: Displacement and equilibrium models in the finite element method, Chapter 9 of Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Wiley, 1965.
- [17] R. L. Fox i E. L. Stanton: Developments in structural analysis by direct energy minimization. Jn A.I.A.A. nr 6, s. 1036-44, 1968.
- [18] F. R. Bogen, R. H. Molllet, M. D. Minich i L. A. Schmit: Development and evaluation of energy search methods in non-linear structural analysis. Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. Techn., Wright Patterson A.E. Base, Ohio, 1965.

### 3. Uogólnienie koncepcji elementów skończonych

#### 3.1. Ogólne problemy wariacyjne

Problemy fizyki stosowanej występujące w technice można badać jednym z dwu sposobów [1]. W pierwszym zadane są równania różniczkowe opisujące zachowanie się typowego nieskończonego małego obszaru. W drugim postuluje się ważność w całym badanym obszarze wariacyjnej zasady ekstremalnej; poprawnym rozwiązaniem problemu jest takie rozwiązanie, które minimalizuje pewną wielkość  $\chi$ , zdefiniowaną przez odpowiednie całkowanie poszukiwanych wielkości po całym obszarze. Taka wielkość całkowita  $\chi$ , będąca funkcją nieznanymi funkcji, nosi nazwę funkcjonału.

Oba te sposoby są matematycznie równoważne; dokładne rozwiązanie jednego zagadnienia jest rozwiązaniem drugiego. Każde z nich można uważać za podstawowe sformułowanie problemu, aczkolwiek sformułowanie za pomocą równania różniczkowego prawdopodobnie jest bardziej użyteczne. Możliwe jest też czysto-matematyczne formalne przejście od jednego sformułowania do drugiego; stanowi to przedmiot wielu prac na temat metod wariacyjnych [2], [3], [4].

Różnice występują w przypadku rozwiązywania przybliżonego. Podczas gdy jedne metody, jak np. metoda różnic skończonych [5], [6], aproksymują rozwiązanie równania różniczkowego bezpośrednio, poprzez dyskretyzację, inne, jak np. metoda *Ritz* i jej odmiana — metoda elementów skończonych — raczej dokonują bezpośrednio przybliżonej minimalizacji funkcjonału.

W rozdziale 2 podano w jaki sposób zagadnienie określenia przemieszczeń można oszacować poprzez minimalizację całkowitej energii potencjalnej, zdefiniowanej jako funkcjonał na tychże przemieszczeniach. Pokazano także, że metoda elementów skończonych jest równoważna owej przybliżonej minimalizacji w zastosowaniu do przemieszczeń węzłów. Poniżej problem ten rozpatrzmy w sposób ogólny.

Załóżmy, że fizyczne (lub czysto-matematyczne) sformułowanie zadania wymaga minimalizacji funkcjonału  $\chi$  w pewnym obszarze.  $\chi$  jest zdefiniowane jako pewna całka w obszarze  $V$  i na części jego brzegu  $S$ , w których istnieje nieznaną



funkcja  $\{\phi\}$  lub jej pochodno, tj.

$$\chi = \int_V f\left(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\phi\}, \dots\right) dV + \int_S g\left(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\phi\}, \dots\right) dS. \quad (3-1)$$

Podzielmy obszar na mniejsze części (podobszary), które nazwiemy elementami, i nich funkcja, którą chcemy znaleźć, będzie w każdym elemencie opisana przez

$$\{\phi\} = [N]\{\Phi\}^e. \quad (3-2)$$

W równaniu tym  $\{\Phi\}^e$  może być zbiorem wartości w węzłach funkcji związanej z elementem lub po prostu zbiorem pewnych jego charakterystycznych parametrów. Oznaczenie nieznannej funkcji ujęto w klamry aby zaznaczyć, że może ona być wektorem (jak to było w przypadku omawianym w rozdz. 2).  $[N]$ , jak poprzednio, jest zestawieniem funkcji kształtu, będących funkcjami tylko współrzędnych.

Aby zminimalizować funkcjonal  $\chi$  względem wszystkich parametrów  $\{\Phi\}$  występujących w całym obszarze, należy napisać układ równań

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0. \quad (3-3)$$

Jeżeli prawdziwe jest twierdzenie, że całkowity funkcjonal jest sumą składników pochodzących od poszczególnych elementów, tj.

$$\chi = \Sigma \chi^e, \quad (3-4)$$

wówczas typowe równanie przybiera postać

$$\frac{\partial \chi}{\partial \Phi_n} = \sum \frac{\partial \chi^e}{\partial \Phi_n}, \quad (3-5)$$

gdzie sumowanie należy rozciągnąć na wszystkie elementy.

W ten sposób otrzymujemy regułę budowania całego minimalizującego układu równań.

W szczególnym przypadku, gdy  $\chi$  jest funkcjonalem formy kwadratowej od  $\{\phi\}$  i jej pochodnych, możemy zawsze zapisać pochodne dla określonego elementu  $e$  jako

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\Phi\}^e} = [k]^e \{\Phi\}^e + \{F\}^e, \quad (3-6)$$

gdzie:  $[k]^e$  i  $\{F\}^e$  — macierze stałych. Minimalizujący układ równań możemy zatem zapisać jako

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = [K]\{\Phi\} + \{F\}, \quad (3-7)$$

gdzie:

$$[K_{ij}] = \sum [k_{ij}]^e, \quad (3-8)$$

$$\{F_i\} = \sum \{F_i\}^e. \quad (3-9)$$

Sumowanie obejmuje wszystkie elementy, dokładnie tak samo jak w standardowym procesie budowania układu równań z rozdz. 1 i 2.

### 3.2. Kryteria zbieżności

Aby uzyskać zbieżność wyników do dokładnych przy zwiększaniu gęstości podziału na elementy, aproksymacja funkcyjna wg równania (3-1) musi spełniać pewne warunki kompletności.

Po pierwsze, gdy maleją wymiary elementu, funkcje  $f$  i  $g$  z równania (3-1) muszą pozostawać jednoznaczne i ciągłe. Dlatego niezbędne jest spełnienie następującego kryterium.

**Kryterium 1.** *Funkcje kształtu elementu  $[N]$  powinny być takie, aby przy odpowiednim doborze  $\{\Phi\}^e$  można było uzyskać każdą stałą wartość  $\{\phi\}$  lub jej pochodnej, występującą w funkcjonale  $\chi$ , jeżeli wymiary elementu dążą do zera.*

Po drugie należy zachować ważność definicji sumowania wg (3-4). Jeżeli więc nie występują całki powierzchniowe na granicach między elementami [7], należy upewnić się, że wyrażenia takie jak  $f$  i  $g$  pozostają na tych granicach skończone. Jest to spełnione, gdy najwyższe pochodne  $\phi$  występujące w tych wyrażeniach są skończone, co prowadzi do następującego kryterium.

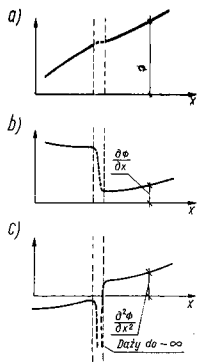
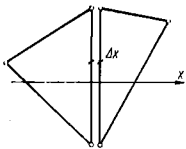
**Kryterium 2.** *Funkcje kształtu elementu  $[N]$  powinny być dobrane tak, aby na powierzchniach styku elementów zarówno  $\{\phi\}$  jak i jej pochodne o rząd niższe od występujących w funkcjach  $f$  i  $g$ , określających funkcjonal, były ciągłe.*

Łatwo uzmysłowić sobie to kryterium jeśli rozważy się elementy oddzielone od siebie cienką warstewką, którą należy włączyć do całek definiujących funkcjonal  $\chi$  i w której zachodzi gładkie przejście nieznannej funkcji  $\phi$  od wartości danej w jednym elemencie do wartości w sąsiednim. Jeżeli grubość tej warstewki dąży do zera, to jej wpływ na funkcjonal  $\chi$  zanika i równanie (3-4) jest prawdziwe.

Na rysunku 3.1 pokazana jest taka wyimaginowana warstwa przejściowa między dwoma elementami. Załóżmy, że funkcja skalarna  $\phi$  jest zdefiniowana tak, że na powierzchni granicznej wartości jej, otrzymane z każdego z elementów, są takie same. Rysunek 3.1a przedstawia przypadek, kiedy przy ciągłości funkcji jej pierwsza pochodna (nachylenie) jest z obu stron różna. Mimo to skok pierwszej pochodnej w strefie przejściowej jest skończony (rys. 3.1b).

Kreśląc podobnie drugą pochodną zauważamy, że przyjmuje ona w strefie przejściowej wartość bardzo dużą (rys. 3.1c) i gdy szerokość tej strefy maleje — zmierza do nieskończoności.

Wynika stąd, że jeżeli definicja funkcjonala obejmuje tylko funkcję  $\phi$  i jej pierwszą pochodną, wówczas w wartości  $\chi$  zapewniony jest brak udziału warstwy



Rys. 3.1. Strefa między elementami pokazująca jak ciągłość funkcji może prowadzić do ciągłości jej pierwszej pochodnej, lecz nieciągłości drugiej pochodnej, gdy  $\Delta x \rightarrow 0$  (opis w tekście)

między elementami. Jeśli jednak w definicji funkcjonalu zawiera się także druga pochodna  $\phi$ , pojawi się nieokreślony udział tej pochodnej (będący wynikiem nieokreślenia dużej wartości pochodnej pomnożonej przez nieskończenie małą szerokość strefy) i nie można już zagwarantować ważności równania (3-4). Przedstawione tu dwa kryteria są uogólnieniem kryteriów szczegółowych, podanych w p. 2.5.

W powyższym omówieniu zakładaliśmy, że dla zapewnienia zbieżności muszą zanikać błędy w określeniu prawdziwego  $\chi$ , gdy wymiary elementów stają się znikomo małe. Jednakże warto zauważyć, że stopień przybliżenia zależy od rodzaju układu siatki. W przypadku wyznaczania  $\chi$  stwierdzenie to jest słuszne wówczas, gdy postać funkcji zdefiniowanej dla pierwszej siatki (3-1) jest taka, że *obejmuje wszystkie kształty* drugiej siatki. Ogólnie więc przypadek ten ma miejsce wówczas, jeżeli elementy pierwszej siatki pochodzą z podziału elementów siatki grubszej. W takim przypadku istnieje monotoniczna zbieżność  $\chi$ . Zasadę tę sformułował Melosh [8] w 1963 r.

### 3.3. Zmienne pozawęzłowe

Przypomnijmy, że definiując funkcję kształtu elementu (3-1) stwierdziliśmy iż  $\{\Phi\}^e$  oznacza albo wartości nieznanymi funkcji w węzłach, albo *niektóre parametry* związane z omawianym elementem.

Aby zapewnić ciągłość funkcji między sąsiednimi elementami, jak wymaga tego kryterium 2, i aby podkreślić fizyczne znaczenie poszukiwanej funkcji  $\phi$ , koncentrujemy zwykle uwagę na wartościach węzłowych. Zawsze można ustalić taką zmienność funkcji, że ciągłość jej nie zostanie zakłócona, np. przez przyjęcie wartości zerowych w węzłach lub na granicy elementów, a następnie pomnożyć ją przez pewien parametr, względem którego ma być minimalizowany funkcjonal.

Takie „parametry pozawęzłowe” poprawiają czasem dokładność odwzorowania i mogą być użyteczne [9].

Ponieważ, ogólnie biorąc, parametry takie związane są tylko z jednym elementem, można zminimalizować je przed zbudowaniem równań i wyeliminować z macierzy elementów.

Szczególną postacią zmiennych pozawęzłowych jest znany ogólnie mnożnik *Lagrange'a* [3]. Stosujemy go wówczas, gdy na funkcję  $\phi$  nałożone jest pewne ograniczenie dodatkowe, nie wynikające ani z warunków granicznych, ani z proponowanej funkcji kształtu. Niech tym ograniczeniem będzie

$$G(\{\phi\}) = 0. \quad (3-10)$$

Rozwiązanie wymaga teraz minimalizacji postaci<sup>1)</sup>

$$\chi^* = \chi + \lambda G, \quad (3-11)$$

gdzie  $\lambda$  jest typowym parametrem dodatkowym. Jeżeli założymy istnienie szeregu takich warunków, wówczas minimalizujemy

$$\chi^* = \chi + \sum_{i=1}^s \lambda_i G_i \quad (3-12)$$

gdzie  $\lambda_i$  są dodatkowymi parametrami zagadnienia, które mogą być związane albo z elementami albo z powierzchniami między elementami. Sposób stosowania takich mnożników *Lagrange'a* podany jest dalej.

Warto przy okazji rozpatrzyć postać równań — otrzymywanych w przypadku typowym, gdy funkcjonal zbudowany jest na formie kwadratowej (por. p. 3.1) i mnożniki *Lagrange'a* przyjęte zostały w postaci szeregu liniowych w węzłach  $\Phi$ . Możemy teraz napisać ogólnie

$$\chi = \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [K] \{\Phi\} + \{F\}^T \{\Phi\}, \quad (3-13)$$

gdzie  $\chi$  jest funkcją parametrów węzłowych, zaś  $[K]$  macierzą symetryczną.

Liniowe siły w węzłach można teraz wyrazić w równaniu (3-1) w postaci macierzowej

$$[G] \{\Phi\} = 0, \quad (3-14)$$

gdzie  $[G]$  jest macierzą stałych. Wprowadzając mnożniki *Lagrange'a*  $\{\lambda\}$  jako wektor o liczbie wierszy równej liczbie kolumn w macierzy  $[G]$  (tj. równej liczbie wł w węzłach), mamy

$$\lambda = \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [K] \{\Phi\} + \{F\}^T \{\Phi\} + ([G] \{\Phi\})^T \{\lambda\}. \quad (3-15)$$

<sup>1)</sup> Dowód powyższego przytaczany jest w podręcznikach rachunku wariacyjnego. Ponieważ  $\partial \chi^* / \partial \lambda = G$ , zatem ograniczenie otrzymuje się jako warunek minimalizacji. Następnie  $\chi^* = \chi$  w ekstremum, gdy  $G = 0$ . Fizyczne znaczenie  $\lambda$  można często otrzymać jako  $\lambda = \frac{\partial \chi^*}{\partial G}$ .

Podstawiając układ równań minimalizujących jak w równaniu (3-6), lecz uwzględniając oba układy niewiadomych, otrzymujemy

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \{\lambda\}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K], [G]^T \\ [G], 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{F\} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-16)$$

Należy odnotować dwie rzeczy. Po pierwsze, układ równań pozostaje symetryczny — własność bardzo pożądana w obecnie stosowanych sposobach rozwiązywania (rozdz. 20). Po drugie, zera pojawiają się i na przekątnej głównej, co czasem powoduje trudności w rozwiązywaniu.

W niniejszej książce będziemy raczej rzadko używać mnożników *Lagrange'a* w jawnej postaci, jednak zastosowanie ich będzie potrzebne w przypadkach, gdy wprowadza się siły w węzłach. Typowym przykładem może być takie sformułowanie zadania w elementach skończonych, gdy nie zostały spełnione warunki ciągłości. Te ostatnie można wówczas wprowadzić w postaci sił w węzłach przy parametrach i uzyskać poprawne rozwiązanie. Jest zastanawiające, że takie siły w węzłach pozornie wprowadzają zwiększoną liczbę parametrów.

### 3.4. Odmienne sposoby formułowania metody elementów skończonych

Aczkolwiek przybliżona minimalizacja funkcjonału jest najogólniej uznanym sposobem przedstawiania metody elementów skończonych, nie jest ona jednak jedynym możliwym sposobem. W pierwszych opracowaniach typu konstrukcyjnego opierano się na przykład na modelu fizycznym. Choć można mieć czysto-matematyczne zastrzeżenia co do ważności niektórych chwytów, to trzeba stwierdzić, że otrzymywano jednak dobre inżynierskie rozwiązania.

Niezależnie od tych prób można dojść do sformułowania istoty metody elementów skończonych na drodze matematycznej, wychodząc z *równań różniczkowych opisujących zagadnienie*. Poniżej przedstawiamy taki sposób; do jego zalet należy to, że

- nie jest konieczne poszukiwanie funkcjonału równoważnego znanemu równaniu różniczkowemu zagadnienia,
- sposób ten można zastosować do wielu zagadnień, dla których funkcjonał bądź nie istnieje, bądź nie został sformułowany [10].

Rozważmy na przykład zagadnienie przybliżonego rozwiązania układu równań różniczkowych, które musi spełniać nieznaną funkcję  $\{\phi\}$  w obszarze  $V$ . Zapiszmy równanie problemu w postaci

$$A(\{\phi\}) = 0, \quad (3-17)$$

a jego warunki brzegowe w postaci

$$C(\{\phi\}) = 0. \quad (3-18)$$

Warunki te mają być spełnione na powierzchni  $S$ .

Jeżeli funkcja „próbna”, spełniająca te same warunki brzegowe, może być zapisana w postaci ogólnej

$$\{\phi\}_a = [N]\{\Phi\}, \quad (3-19)$$

gdzie  $[N]$  jak poprzednio jest zadaną funkcją współrzędnych,  $\{\Phi\}$  zaś układem  $n$  parametrów, wtedy w ogólności

$$A(\{\phi\}_a) = R \neq 0. \quad (3-20)$$

Najdokładniejszym rozwiązaniem będzie takie, które redukuje resztę  $R$  do najmniejszej wartości we wszystkich punktach  $V$  [1].

Najprościej można tego dokonać przez wykorzystanie faktu, że jeśli  $R$  jest wszędzie tożsamościowo równe zeru, to

$$\int_V WR dV = 0, \quad (3-21)$$

gdzie  $W$ -dowolna funkcja współrzędnych. Jeżeli liczba nieznanymi parametrów  $\{\Phi\}$  wynosi  $n$  oraz gdy wybierzemy  $n$  niezależnych liniowo funkcji  $W_i$ , to możemy napisać odpowiednią liczbę równań

$$\int_V W_i R dV = \int_V W_i A([N]\{\Phi\}) dV = 0, \quad (3-22)$$

z których wyznaczmy  $\{\Phi\}$ .

Takie postępowanie znane jest pod nazwą *ważonej metody reszidualnej*.  $W_i$  jest funkcją wagi. Zależnie od wyboru funkcji wagi wyróżnić można różne odmiany.

a. **Rozmieszczenie punktowe:**  $W_i = 1$  w pewnym punkcie  $i$  oraz  $W_i = 0$  w pozostałych. Jest to równoznaczne ze spełnieniem głównego równania różniczkowego w  $n$  oddzielnych punktach obszaru.

b. **Zbiór podobszarów:**  $W_i = 1$  w pewnym szczególnym podobszarze oraz  $W_i = 0$  w pozostałych. Jest to równoważne zerowaniu całki po pewnej liczbie podobszarów, wystarczającej do ułożenia odpowiedniej liczby równań.

c. **Metoda Galerkin:**  $W_i = N_i$ , tj. funkcja wagi jest równa funkcji kształtu, definiującej przybliżenie poprzez podział na elementy. Proces ten prowadzi w ogólności do najlepszego przybliżenia.

Stosując którykolwiek z omówionych sposobów do równania (3-19) definiującego rozwiązanie przybliżone, element po elemencie, dostrzeżemy od razu charakterystyczne cechy metody elementów skończonych.

Po pierwsze poszczególne równania będą powiązane, gdyż wpływ każdego parametru rozciąga się tylko na elementy sąsiadujące z rozpatrywanym węzłem. Po drugie można obliczyć całki (zakładając, jak poprzednio, brak „wkładki” między elementami) po każdym elemencie oddzielnie, a następnie zsumować je w celu otrzymania całkowitego udziału węzła.

Reguły zbierania współczynników są oczywiście takie same jak w opisywanych poprzednio układach konstrukcyjnych, jeżeli operator  $A$  jest liniowy (patrz równanie 1-14).

Ze sformułowania tu przedstawionego wynika jednak pewna niedogodność. W całkach ważonego procesu residualnego występuje bezpośrednio operator różniczkowy  $A$ , a w nim istnieją operatory różniczkowania wyższych rzędów; operatory te pozostają zatem w funkcjonałe  $\chi$ . Aby więc uniknąć wpływu obszarów międzyelementowych (3-2), należy przy definiowaniu funkcji kształtu łączyć w niej wyższy stopień ciągłości. Jest to kwestia zasadnicza, gdyż wybór funkcji kształtu w ten sposób zostaje mocno ograniczony i może przysparzać niepokonalnych trudności.<sup>1)</sup> Czasem udaje się uniknąć tej trudności przez przekształcenie całki ze związku (3-22) i całkowanie przez części (albo bardziej ogólnych postaci takiego całkowania — funkcji Greena lub Stokesa). Jeśli zastosuje się takie przekształcenie do postaci ogólnej, wówczas nie wprowadza się żadnych ograniczeń, jeżeli zaś pojawią się przy tym całki niższego rzędu, wystarcza spełnić dla nich warunki ciągłości.

W poprzednim przykładzie założono, że wybrane przybliżenie nieznannej funkcji (3-19) automatycznie spełnia warunki brzegowe. Lepiej jest jednak pominąć to założenie i sformułować równanie w ogólnej postaci, zadając warunki brzegowe dopiero w końcowym stadium, podobnie jak na przykład określone siły i przemieszczenia zadaje się konstrukcji dopiero po zebraniu wszystkich danych dotyczących sztywności.

### 3.5. Przykład — równanie Poissona

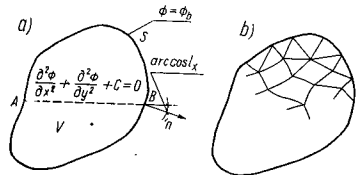
Aby podsumować idee omówione poprzednio, rozpatrzmy czysto matematyczny problem rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + C = 0 \quad (3-23)$$

w pewnym obszarze  $V$  przy zadanych wartościach  $\phi = \phi_b$  na granicy (rys. 3.2a).

Można wykazać, że matematycznie jest to równoważne znalezienie funkcji  $\phi$  spełniającej warunki graniczne i minimalizującej całkę

$$\chi = \iint_V \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - C \phi \right] dx dy. \quad (3-24)$$



Rys. 3.2. Przybliżenie do równania różniczkowego (opis w tekście)

<sup>1)</sup> Pokażemy później, jak bardzo ogranicza się wybór funkcji, jeśli oprócz spełnienia ciągłości zmienianej żądamy dodatkowo ciągłości pierwszej pochodnej (nachylenia). Ciągłość drugiej pochodnej jest możliwa tylko w bardzo nielicznych przypadkach.

Dla rozwiązania przybliżonego podzielimy nasz obszar na skończone elementy (rys. 3.2b); w każdym z nich jest

$$\phi = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N] \{\phi\}^e, \quad (3-25)$$

gdzie  $\{\phi\}^e$  przedstawia zbiór parametrów, będących w tym przypadku po prostu wartościami  $\phi$  w węzłach elementów.

**3.5.1. Minimalizacja funkcjonału.** Zakładając, że  $[N]$  jest zdefiniowane w taki sposób, iż zapewnia się ciągłość na stykach pomiędzy elementami, równanie (3-4) będzie wówczas spełnione. Możemy teraz rozpatrzeć typowy element.

Podstawiając (3-25) do (3-24) i całkując po powierzchni elementu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^e}{\partial \phi_i} &= \iint_{V^e} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - C \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} \right] dx dy = \\ &= \iint_{V^e} \left[ \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j + \dots \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j + \dots \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} - CN_i \right] dx dy, \end{aligned} \quad (3-26)$$

lub

$$\frac{\partial \chi^e}{\{\partial \phi\}^e} = [k]^e \{\phi\}^e + \{F\}^e,$$

gdzie:

$$k_{ij} = \iint_{V^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3-27)$$

$$F_i = - \iint_{V^e} CN_i dx dy. \quad (3-28)$$

Przy zadanym kształcie elementu i funkcjach kształtu można obliczyć powyższe współczynniki oraz określić zebrany układ równań, podobnie jak w przypadku równań (3-7)÷(3-9). Następnym po podstawieniu warunków granicznych rozwiązuje się liniowy układ równań, otrzymując żądany wynik.

**3.5.2. Ważone procesy residualne.** Typowym wyrażeniem, w którym mamy tuż do czynienia, jest zgodnie z (3-22) i (3-23)

$$\iint_V W_i \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + C \right] dx dy, \quad (3-29)$$

gdzie  $\phi$  jest zadane przez (3-25). W podanej powyżej postaci całka wymaga ciągłości pierwszych pochodnych we wszystkich obszarach między elementami, aby uniknąć nieskończonych wartości drugich pochodnych. Jeśli chcemy ominąć to ograniczenie, możemy dokonać przekształcenia poprzez całkowanie przez części.

Wtedy np.

$$\iint_V W_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy - \int_S \left| W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_n dy = \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x dS - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy, \quad (3-30)$$

gdzie  $l_x$  jest kosinusem kierunkowym normalnej zewnętrznej względem osi  $x$  (rys. 3.2), zaś całka  $S$  brana jest po całym brzegu obszaru. Stosując taki sam sposób całkowania drugiego wyrazu, wyrażenie (3-29) można teraz zapisać w postaci

$$\iint_V \left[ \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - W_i C \right] dx dy - \int_S W_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y \right) dS. \quad (3-31)$$

Granica całkowania po  $V$  nie zawiera udziału części międzyelementowej od  $\phi$ , o ile jest ona ciągła. Trzeba jednak nałożyć ograniczenie na funkcję wagi  $W_i$ . Funkcja ta musi być zawsze ciągła; nie można więc zastosować jej postaci dla punktów lub dla podobszarów<sup>1)</sup>. Dozwolone jest jednak postępowanie *Galerkina* lub jakiegokolwiek inne, gdzie  $W_i$  jest ciągłe. Kontynuując nasz przykład stosujemy proces *Galerkina*

$$W_i = N_i, \quad (3-32)$$

a udział elementu w całce (3-31) zapiszemy bezpośrednio, wykorzystując związek

$$\sum_{i=0}^n k_{ij} \phi_j + \{F_i\} - \int_S N_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y \right) dS. \quad (3-33)$$

W powyższym wyrażeniu  $k_{ij}$  i  $F_i$  są identyczne z wyrażeniami (3-28) użytymi w procesie wariacyjnym. Przy sumowaniu udziałów wszystkich elementów otrzymuje się taki sam układ równań jak poprzednio, z wyjątkiem całki branej po obwodzie zewnętrznym. Pokażemy, że całka ta nie wnosi nic do równań dla punktów leżących wewnątrz obszaru (tj. wtedy, gdy punkt  $t$  nie leży na granicy obszaru). Gdy punkt  $i$  znajduje się na jego granicy, na której zadano wartość  $\phi_n$ , całka ta nie jest znana, natomiast zadane warunki brzegowe pozwalają uzyskać rozwiązanie dla wszystkich węzłowych wartości.

W przykładzie naszym otrzymano identyczne wyniki przy zastosowaniu dwu metod: ważonej residualnej i wariacyjnej [11]. Gdyby jednak zastosować różne funkcje wagi, identyczność ta prawdopodobnie by nie występowała. Sam fakt, że podejście bezpośrednie (nie wymagające znajomości rachunku wariacyjnego) prowadzi do tego samego wyniku końcowego, może być interesujący dla Czytelnika, dostarczając wygodnego sposobu postępowania.

Trzeba zauważyć, że całka powierzchniowa w wyrażeniu (3-31) ma pewien sens fizyczny. Przedstawia ona w rzeczywistości ważoną całkę po brzegu z przepływu  $\partial \phi / \partial n$ , ponieważ

$$\int_S W_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y \right) dS = \int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \quad (3-34)$$

<sup>1)</sup> Por. p. 3.4. (przyp. tłum.)

Warunki brzegowe często określają raczej przepływ niż aktualną wartość  $\phi_n$ . W takich przypadkach bezpośrednie zastosowanie postępowania *Galerkina* prowadzić będzie nadal do poprawnego wyniku, jednak potencjał musi być zmodyfikowany poprzez dodanie pewnych członów granicznych (patrz rozdz. 15).

### 3.6. Przykład — równanie przepływu lepkiego

Operator równania ogólnego (3-17) może dotyczyć nie tylko jednej zmiennej. Podobnie można przedstawić układ równań różniczkowych. Rozważmy dla przykładu równanie płaskiego przepływu lepkiego nieściśliwego płynu w stanie ustalonym przy pominięciu członów bezwładnościowych. Niewiadome: ciśnienie  $p$  i składowe prędkości  $u$ ,  $v$ , odpowiednio w kierunkach  $x$  i  $y$  związane są dwoma równaniami przepływu (równanie *Stokesa*, wynikające z bardziej ogólnych równań *Naviera-Stokesa* [12])

$$\begin{aligned} X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3-35)$$

gdzie:  $X, Y$  — siły masowe wywołane lepkością.

Trzeciego związku między trzema zmiennymi dostarcza warunek ciągłości

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3-36)$$

Napiszmy, posługując się parametrami węzłowymi:

$$p = [N]\{p\}, \quad u = [N]\{u\}, \quad v = [N]\{v\}, \quad (3-37)$$

gdzie  $[N]$  — funkcje kształtu gwarantujące jedynie ciągłość zmiennych. Stosując postępowanie ważonej residualnej *Galerkina* możemy napisać dla punktu  $i$  trzy układy równań. Pierwsze z nich ma postać

$$\int_V N_i \left[ X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dV = 0. \quad (3-38)$$

Całkując przez części ostatnie dwa człony, podobnie jak w (3-30) itd., powyższe równanie redukuje się do postaci

$$\int_V \left[ N_i \left( X - \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dV + \int_S \mu N_i \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \quad (3-39)$$

Podstawiając tu parametry (3-37) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_V \left[ N_i X - N_i \frac{\partial [N]}{\partial x} \{p\} - \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{u\} \right] dV + \\ + \int_S \mu N_i \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u\} dS = 0. \end{aligned} \quad (3-40)$$

Drugie równanie ma podobną postać; wynik otrzymujemy więc poprzez zamianę  $x$  na  $y$  i  $u$  na  $v$ .

Ostatnie równanie, wynikające z warunku ciągłości (3-36) zapisujemy po prostu

$$\int_V N_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = \int_V \left[ N_i \left( \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u\} + \frac{\partial [N]}{\partial y} \{v\} \right) \right] dV = 0. \quad (3-41)$$

Grupując wszystkie zmienne odnoszące się do punktu  $i$  w postaci

$$\{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} p_i \\ u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (3-42)$$

otrzymamy standardową postać zbioru równań

$$[K] \{\Phi\} + \{F\} = 0, \quad (3-43)$$

gdzie rozpatrując udział każdego elementu, mamy

$$[k_{ij}]_e = \int_V \begin{bmatrix} -N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & -\mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) & 0 \\ -N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & -\mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \\ 0 & N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} dV + \int_S \begin{bmatrix} 0 & \mu N_i \frac{\partial N_j}{\partial n} & 0 \\ 0 & 0 & \mu N_i \frac{\partial N_j}{\partial n} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dS, \quad (3-44)$$

podczas gdy

$$\{F_i\}_e = \int_V N_i \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{Bmatrix} dV. \quad (3-45)$$

W powyższym całka powierzchniowa brana jest tylko po zewnętrznych brzegach, gdzie znane są  $\partial u / \partial n$  lub  $\partial v / \partial n$ . Jeżeli na brzegu dane są  $u$  lub  $v$ , wówczas należy napisać równania dla punktów leżących na brzegu.

Aczkolwiek postać standardowa związków dla elementów skończonych znaleziona została w prosty sposób, należy zauważyć, że macierze sztywności elementów nie są już symetryczne. Komplikuje to procesy zapamiętywania i rozwiązywania przez maszyny cyfrowe, wskazuje też na fakt, że nie istnieje tutaj formy

wkwadratowe funkcjonalu. Nieco prostszy przypadek przybliżony, prowadzący jednak do takich nieasymetrycznych macierzy, był rozwiązany przez *Doctorsa* [13].

Równoważne potraktowanie powyższego problemu polega na wprowadzeniu koncepcji funkcji prądu. Jeśli założymy, że

$$u = -\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (3-46)$$

wówczas równanie (3-36) jest spełnione tożsamościowo i pozostaje do rozwiązania układ dwu równań

$$X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 \left( -\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0, \quad (3-47)$$

$$Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0,$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Różniczkując równanie pierwsze przez  $y$ , a drugie przez  $x$ , a następnie odejmując je, eliminujemy  $p$  i pozostaje tylko jedno równanie

$$\mu \nabla^2 \nabla^2 \theta + \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0. \quad (3-48)$$

Można teraz zastosować podobny sposób przybliżonego sformułowania, jak poprzednio. Czytelnik może wykonać to jako ćwiczenie. Zauważy On, że macierze elementów są teraz symetryczne i zagadnienie staje się podobne do omawianego w rozdziale 10. Funkcje kształtu będą musiały jednak spełniać warunek ciągłości pierwszych pochodnych między elementami, ponieważ w niektórych całkach wystąpią teraz pochodne drugiego rzędu. Problemy te w związku z zadaniem omiowo-symetrycznym badał *Atkinson* i inni [14].

Powyższe przykłady zostały przytoczone dla zilustrowania ogólnych możliwości stosowania metody elementów skończonych. Przykładowo rozpatrywane tu zrudanie stanowi bardzo interesujące zagadnienie inżynierskie. Wiele prac dotyczących rozwiązania równań *Naviera-Stokesa* jest obecnie w toku.

Dla przejrzystości, aby zlinearyzować równanie, opuszczono człony dynamiczne

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

odpowiednio w dwu równaniach (3-35). Pozostawienie ich jest oczywiście możliwe, lecz prowadzi do tego, że otrzymamy po przekształceniach równania w postaci ogólnej (3-38) nie są liniowe i mają  $[K]$  zależne od prędkości. Wywód jest zbyt złożony, aby omawiać go tutaj szczegółowo. Czytelnik mógłby rozważyć powyższy przypadek przy zastosowaniu rozszerzonej metody badania zagadnień nieliniowych, przedstawionej w rozdz. 19.

### 3.7. Uwagi końcowe

Oprócz uogólnienia koncepcji elementów skończonych na przybliżone rozwiązania problemów wariacyjnych przedstawiliśmy możliwość bezpośredniego badania tą metodą rozwiązań równań różniczkowych. Obie możliwości otwierają szerokie, dotąd nie wykorzystane perspektywy zastosowań. Kilka ogólnych przykładów takich rozwiązań podał *Oden* [15].

#### Cytowane publikacje

- [1] *S. H. Crandall*: Engineering Analysis, McGraw-Hill, 1956.
- [2] *K. Washizu*: Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, 1968.
- [3] *R. Weinstock*: Calculus of variations, McGraw-Hill, 1952.
- [4] *P. N. Berg*: Calculus of variations, in Handbook of Engineering Mechanics, Chapter 16, ed. W. Flügge, McGraw-Hill, 1962.
- [5] *R. V. Southwell*: Relaxation methods in theoretical physics, Oxford Univ. Press, 1946.
- [6] *G. E. Forsythe, W. R. Wasco*: Finite difference methods for partial differential equations, J. Wiley & Son, 1960.
- [7] *T. H. H. Pian, P. Tong*: Basis of finite element methods for solid continua, Int. J. Num. Meth. in Eng., 1, s. 3-28, 1969.
- [8] *R. Y. Melosh*: Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method, Int. A.I.A.A., 1, s. 1631-1637, 1963.
- [9] *T. H. H. Pian*: Derivation of Element Stiffness Matrices, Int. A.I.A.A., 2, s. 576-577, 1964.
- [10] *I. Stakgold*: Boundary value problems in Mathematics and Physics, Macmillan, N. Y., 1966.
- [11] *B. A. Szabo, G. C. Lee*: Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Galerkin method, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, s. 301-310, 1969.
- [12] *P. A. Lagerstrom, I. D. Chang*: Flow at low Reynolds numbers, Chapter 81, Handbook of Eng. Mech., ed. W. Flügge, McGraw-Hill, 1962.
- [13] *L. J. Doctors*: An Application of the finite element technique for boundary value problems of potential flow, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 1970.
- [14] *B. Atkinson, M. P. Broekbank, C. C. M. Card, J. M. Smith*: Low Reynolds number developing flows, A.I.Ch. Eng. J. 15, s. 548-553, 1969.
- [15] *J. T. Oden*: A general theory of finite elements: I Topological considerations s. 205-221; II Applications s. 247-260. Int. J. Num. Meth. Eng., 1, 1969.

## 4. Płaskie stany naprężenia i odkształcenia

### 4.1. Wstęp

Omawiane dotychczas dwuwymiarowe problemy sprężystości stanowiły przykłady skutecznego zastosowania metody elementów skończonych [1], [2]. W rozdziale 2 zostały wyprowadzone związki ogólne, tj. równania (2-1), (2-2), (2-3), (2-9), (2-10) i (2-16), które w celu łatwiejszego korzystania z nich zebrano i zamieszczone w Dodatku 2.

W rozdziale niniejszym przedstawione są bardziej szczegółowo podstawowe zależności omawianego problemu i zilustrowane odpowiednimi przykładami; tuk też będą przedstawiane zagadnienia w pozostałej części książki.

Czytelnikowi nie znającemu podstawowych definicji teorii sprężystości radzimy przestudiować odpowiednie podrozdziały, a w szczególności książkę [3], w której użyte oznaczenia są stosowane poniżej.

W obu problemach: płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia, pole przemieszczeń jest jednoznacznie określone przez przemieszczenia  $u$  i  $v$  w kierunkach  $x$  i  $y$  kartezjańskiego układu współrzędnych.

W obu problemach są rozważane tylko trzy składowe naprężeń i odkształceń w płaszczyźnie  $xy$ . W przypadku *płaskiego stanu naprężeń* wszystkie pozostałe składowe są z założenia zerami i dlatego nie występują w wyrażeniu na pracę wewnętrzną. W *płaskim stanie odkształcenia* naprężenie prostopadłe do płaszczyzny  $xy$  nie jest zerem, jednak z założenia zerowe jest odkształcenie w tym kierunku i dlatego naprężenie to nie wpływa na pracę wewnętrzną; w razie potrzeby można je obliczyć na podstawie wyznaczonych składowych naprężeń.

### 4.2. Charakterystyki elementu

**4.2.1. Funkcje przemieszczenia.** Rysunek 4.1 przedstawia typowy element trójkątny o węzłach  $i, j, m$  numerowanych odwrotnie do ruchu wskazówek zegara. Przemieszczenia węzłów mają składowe

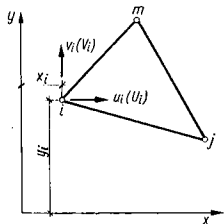
$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (4-1)$$

Sześć składowych przemieszczeniu elementu zapisujemy w postaci wektorowej

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (4-2)$$

Przemieszczenia wewnątrz elementu są jednoznacznie definiowane przez te sześć wartości. Najprostsze przedstawienie tych przemieszczeń można uzyskać za pomocą dwu wielomianów liniowych

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (4-3)$$



Rys. 4.1. Element w płaskim stanie naprężenia lub odkształcenia

Sześć stałych  $\alpha_k$  można wyznaczyć rozwiązując dwa układy trzech równocześnie spełnionych równań, które otrzymamy przez podstawienie do (4-3) współrzędnych i składowych przemieszczeń odpowiednich węzłów. Pisząc np.

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m, \end{aligned} \quad (4-4)$$

rozwiązujemy ten układ względem  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$  w zależności od przemieszeń węzłów  $u_i$ ,  $u_j$ ,  $u_m$  i znajdujemy przemieszczenie

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_1 + b_1 x + c_1 y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m], \quad (4-5a)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm}, \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj}, \end{aligned} \quad (4-5b)$$

pozostałe współczynniki otrzymuje się przez cykliczne przestawienie znaczków  $i, j, m$ , zaś

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad (4-5c)$$

przy czym  $\Delta$  oznacza pole trójkąta  $ijm$ .

Podobnie otrzymujemy równanie dla pionowego przemieszczenia  $v$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m]. \quad (4-6)$$

Chociaż w obecnej fazie rozważań nie jest to jeszcze konieczne, możemy zapisać równania (4-5a) i (4-6) w standardowej postaci (2-1)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e = [IN'_i, IN'_j, IN'_m] \{\delta\}^e, \quad (4-7)$$

gdzie  $I$  — kwadratowa macierz jednostkowa  $2 \times 2$ , zaś

$$N'_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta \text{ itd.} \dots \quad (4-8)$$

Uwaga: Jeśli początek współrzędnych obrano w środku elementu, wtedy

$$x_i + x_m + x_j = y_i + y_j + y_m = 0 \quad \text{oraz} \quad a_i = a_j = a_m = 2\Delta/3.$$

Obrane funkcje przemieszczeń automatycznie gwarantują ciągłość przemieszczeń na granicach z sąsiednimi elementami, gdyż zmieniają się one liniowo wzdłuż każdego boku trójkąta, a przy tych samych przemieszczeniach w węzłach muszą oczywiście istnieć te same przemieszczenia pomiędzy węzłami.

**4.2.2. Odkształcenia (całkowite).** Całkowite odkształcenie w każdym punkcie elementu definiuje się przez trzy składowe, występujące w wyrażeniu na pracę w wewnętrznych

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4-9)$$

Wykorzystując (4-7) lub (4-5a) i (4-6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial y} & \frac{\partial N'_i}{\partial x} & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & \frac{\partial N'_m}{\partial y} & \frac{\partial N'_m}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}^e, \end{aligned} \quad (4-10)$$

co całkowicie określa macierz  $[B]$  z równania (2-2).

Zauważmy, że w tym przypadku macierz  $[B]$  nie zależy od położenia rozważanego punktu wewnątrz elementu, stąd odkształcenia wewnątrz elementu pozno-



stają stałe. Kryterium stałego odkształcenia podane w rozdz. 2 jest tu zatem spełnione.

**4.2.3. Odkształcenia początkowe (odkształcenia termiczne).** Tak zwane początkowe odkształcenia, tj. odkształcenia niezależne od aktualnego obciążenia, mogą być spowodowane różnymi przyczynami. Skurcz, pęcznienie kryształów lub najczęściej zmiany temperatury, ogólnie biorąc, wywołują wektor początkowych odkształceń

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (4-11)$$

Aczkolwiek odkształcenia te mogą na ogół zależeć od położenia punktu wewnątrz elementu, to z reguły definiuje się je poprzez średnie, stałe wartości. Jest to istotne, jeśli warunki stałego odkształcenia dla zadanych funkcji mają być spełnione.

Stąd dla przypadku *płaskiego stanu naprężenia* w elemencie izotropowym podanym wzrostowi temperatury  $\theta^e$  przy współczynniku rozszerzalności cieplnej  $\alpha$  otrzymamy (dla przykładu)

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-12)$$

ponieważ rozszerzenie cieplne nie wywołuje odkształceń postaciowych.

W *płaskim stanie odkształcenia* sytuacja jest bardziej złożona. Założenie płaskiego stanu odkształcenia oznacza, że naprężenia prostopadłe do płaszczyzny  $xy$  występują przy rozszerzeniu cieplnym także i wtedy, gdy mamy tylko trzy składowe odkształcenia; odkształcenie początkowe będzie zatem zależeć od stałych sprężystych.

Można wykazać, że w takim przypadku

$$\{\varepsilon_0\} = (1+\nu) \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-13)$$

gdzie  $\nu$  — współczynnik *Poissona*.

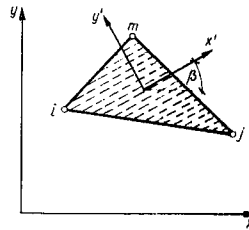
Materiały anizotropowe przysparzają dodatkowych problemów, ponieważ współczynniki rozszerzalności cieplnej mogą zmieniać się z kierunkiem. Niech  $x'$  i  $y'$  na rys. 4.2 oznaczają głównie kierunki w materiale. Odkształcenia początkowe wskutek rozszerzalności cieplnej, w odniesieniu do płaskiego stanu naprężeń, można zapisać w tych współrzędnych następująco

$$\{\varepsilon_0\}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'0} \\ \varepsilon_{y'0} \\ \gamma_{x'y'0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1\theta^e \\ \alpha_2\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-14)$$

gdzie:  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  — współczynniki rozszerzalności cieplnej odniesione do  $x'$  i  $y'$ .

Aby otrzymać wyrażenie na odkształcenia w kierunkach osi  $x$  i  $y$ , należy zastosować odpowiednią macierz transformacji układu  $[T]$ . Zatem

$$\{\varepsilon_0\} = [T]^T \{\varepsilon_0\}'. \quad (4-15)$$



Rys. 4.2. Element z materiału uwarstwionego (poprzecznie izotropowego)

Definiując kąt  $\beta$  jak na rys. 4.2, łatwo sprawdzić, że

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin^2\beta & -2\sin\beta\cos\beta \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 2\sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & -\sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta \end{bmatrix}$$

W ten sposób z łatwością wyznacza się  $\{\varepsilon_0\}$ . Należy dodać, że składowa  $\gamma_{xy0}$  związana z posunięciem w układzie  $xy$  nie jest już równa zeru.

**4.2.4. Macierz sprężystości.** Macierz  $[D]$  ze związku (2-3)

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \{\varepsilon_0\} \right) \quad (4-16)$$

można dokładnie wyznaczyć dla każdego materiału.

a. *Płaski stan naprężenia — materiał izotropowy.* W tym przypadku mamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \varepsilon_{x0}, \\ \varepsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E + \varepsilon_{y0}, \\ \gamma_{xy} &= 2(1+\nu)\tau_{xy}/E + \varepsilon_{xy0}. \end{aligned} \quad (4-17)$$

Rozwiązując powyższe względem naprężeń, otrzymujemy macierz  $[D]$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

gdzie:  $E$  — moduł *Younga*,  $\nu$  — współczynnik *Poissona*.

b. *Płaski stan odkształcenia — materiał izotropowy.* Poza poprzednio wymienionymi naprężeniami występuje tu jeszcze  $\sigma_z$ . W przypadku uwzględnienia wpływu termicznego mamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e, \\ \varepsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e, \\ \gamma_{xy} &= 2(1+\nu)\tau_{xy}/E, \end{aligned} \quad (4-19)$$

a ponadto

$$\varepsilon_z = 0 \quad -\nu\sigma_x/E \quad \nu\sigma_y/E \quad \sigma_z/E \quad | \quad \alpha\theta^0.$$

Eliminując  $\sigma_z$  i rozwiązując układ względem pozostałych naprężeń, otrzymamy równanie (4-13), a porównując z (4-16) znajdziemy  $[D]$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(1-\nu) & 0 \\ \nu(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

c. *Materiały anizotropowe.* Aby dla materiału całkowicie anizotropowego jednoznacznie określić związki pomiędzy naprężeniami a odkształceniami, potrzeba jest 21 niezależnych stałych sprężystości [4], [5].

W problemach dwuwymiarowych przy istnieniu symetrii własności fizycznych materiału anizotropowego największa liczba stałych nie może przekraczać 6. Wtedy dla najbardziej ogólnego przypadku można napisać

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ & (\text{sym}) & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

(Niezbędna symetria macierzy  $[D]$  wynika z uogólnionego odwrotnego twierdzenia Betti-Maxwella i jest konsekwencją niezmienniczości energii, niezależnie od drogi, na jakiej został osiągnięty zadany stan odkształceń).

Szczególnym przypadkiem, ważnym dla praktyki, jest przypadek „warstwowego” lub poprzecznie izotropowego materiału, w którym istnieje obrotowa symetria własności w płaszczyznach warstw. Taki materiał określa się tylko pięcioma niezależnymi stałymi sprężystości.

Równania fizyczne dają w tym przypadku, używając oznaczeń *Lechnickiego* [4] i przyjmując oś  $y$  prostopadle do warstw (przy pominięciu odkształceń początkowych), rys. 4.3:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 - \nu_1\sigma_z/E_1, \\ \varepsilon_y &= -\nu_2\sigma_x/E_2 + \sigma_y/E_2 - \nu_2\sigma_z/E_2, \\ \varepsilon_z &= -\nu_1\sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 + \sigma_z/E_1, \\ \gamma_{xz} &= \{2(1+\nu_1)/E_1\}\tau_{xz}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_2}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_2}\tau_{yz}, \end{aligned} \quad (4-22)$$

gdzie stałe  $E_1, \nu_1$  ( $G_1$  zależy od  $E_1$  i  $\nu_1$ ) dotyczą własności materiału w płaszczyźnie warstw, a  $E_2, \nu_2$  i  $G_2$  — własności w kierunku normalnym do warstw.

Macierz  $[D]$  w tych warunkach po wprowadzeniu

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{oraz} \quad \frac{G_2}{E_2} = m$$

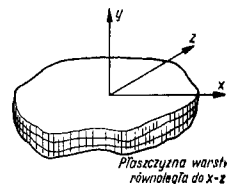
ma następującą postać:

dla płaskiego stanu naprężenia

$$[D] = \frac{E_2}{(1-m\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-m\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

— dla płaskiego stanu odkształcenia

$$[D] = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2m\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n(1-m\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & (1-\nu_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2m\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (4-24)$$



rys. 4.3. Materiał uwarstwiony (poprzecznie izotropowy)

Jeżeli kierunek warstw jest nachylony do osi  $x$ , jak na rys. 4.2, to aby otrzymać macierz  $[D]$  we współrzędnych niezależnych od kierunków anizotropii, należy dokonać transformacji. Jeśli więc  $[D']$  oznacza związek fizyczny w nachylonym układzie  $x'y'$ , to łatwo dowiedzieć, że

$$[D] = [T][D'] [T]^T, \quad (4-25)$$

gdzie  $[T]$  podane jest w równaniu (4-15).

U w a g a: Powyższe wynika z tego, że praca  $\{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \{\sigma\}^T [T] [T]^T \{\varepsilon\}$  nie zależy od wyboru układu współrzędnych.

**4.2.5. Macierz sztywności.** Macierz ta dla elementu  $ijm$  została zdefiniowana poprzez związek (2-10) jako

$$[k] = \int [B]^T [D] [B] t dx dy, \quad (4-26)$$

gdzie  $t$  — grubość elementu. Całkowanie należy rozciągnąć na całą powierzchnię elementu. Przyjmując grubość  $t$  stałą, otrzymujemy

$$[k] = [B]^T [D] [B] t A \quad (4-27)$$

(ponieważ żadna z macierzy nie zawiera  $x$  lub  $y$ ), gdzie  $A$  — pole trójkątnego elementu; por. (4-5). Forma ta jest dość dogodna do obliczeń, gdyż operacje macierzowe łatwo wykonuje się na maszynach matematycznych.

U w a g a: Macierz  $[B]$  zdefiniowana w (4-10) może być zapisana następująco

$$[B] = [B_i, B_j, B_m], \quad \text{gdzie} \quad [B_i] = \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} / 2A, \text{ itd.} \quad (4-28)$$

Macierza sztywności przyjmuje zatem postać

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{1j} & k_{1m} \\ k_{j1} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{m1} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

w której podmacierze wymiaru  $2 \times 2$  mają budowę

$$[k_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] t \Delta. \quad (4-30)$$

Postać ta jest wygodna do obliczeń.

**4.2.6. Siły węzłowe wywołane odkształceniem początkowym.** Siły te wyrażone są zależnością (2-12), po scałkowaniu której otrzymujemy

$$\{F\}_e^0 = -[B]^T [D] [\varepsilon_0] t \Delta \text{ itd.} \quad (4-31)$$

Przypisując je do odpowiednich węzłów, można zapisać także

$$\{F_i\}_e = -[B_i]^T [D] [\varepsilon_0] t \Delta \text{ itd.} \quad (4-32)$$

Te siły od „odkształcenia początkowego” działają w węzłach elementów w różny sposób i muszą być dokładnie określone<sup>1)</sup>.

**4.2.7. Siły objętościowe.** W ogólnym przypadku płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia każdy element o jednostkowych wymiarach w płaszczyźnie  $xy$  poddany jest działaniu sił

$$\{\hat{p}\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

w kierunkach odpowiednich osi.

Zgodnie z (2-11) udział tych sił w siłach węzłowych dany jest poprzez związek

$$\{F\}_e^0 = - \int [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx dy,$$

lub wg (4-7)

$$\{F_i\}_e = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int N_i dx dy \quad (4-33)$$

o ile siły  $X$  i  $Y$  są stałe. Jeśli siły  $N_i$  nie są stałe, wyrażenie powyższe należy scałkować. Niektóre wzory ogólne dla całkowania po powierzchni trójkąta podane są w dodatku 3.

Obliczenia upraszczają się w przypadku, gdy środek układu współrzędnych leży w środku elementu; wtedy

$$\int x dx dy = \int y dx dy = 0$$

i wobec zależności (4-8)

$$\{F_i\}_e = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} a_i dx dy / 2 \Delta = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} a_i / 2$$

<sup>1)</sup> Podobno wyrażenia można wyprowadzić dla naprężeń początkowych.

lub

$$\{F_i\}_e = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3 \cdot \{F_j\}_e \cdot \{F_m\}_e. \quad (4-34)$$

Ostatecznie więc dla całego elementu

$$\{F\}_e^0 = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3, \quad (4-35)$$

co oznacza, że całkowite siły objętościowe działające w kierunkach  $x$  i  $y$  są rozdzielone na węzły w równych częściach. Rozkład ten odpowiada intuicji fizycznej i często przyjmuje się go jako założenie.

**4.2.8. Potencjał sił objętościowych.** W wielu przypadkach siły objętościowe  $\hat{p}$  definiowane jako funkcje potencjału  $\phi$

$$X = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad Y = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4-36)$$

zadanego w rozważanym obszarze (a więc określonego także i w węzłach). Jeśli  $\{\phi\}_e$  stanowi zbiór trzech wartości potencjału w węzłach elementu, tj.

$$\{\phi\}_e = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{Bmatrix} \quad (4-37)$$

to ma odpowiadać stałym wartościom  $X$  i  $Y$ , wówczas  $\phi$  wewnątrz elementu musi zmieniać się liniowo. Funkcje kształtu muszą być oczywiście zadane za pomocą wyrażeń identycznych z wyrażeniami stosowanymi przy wyprowadzeniu (4-4) ÷ (4-6), czyli

$$\phi = [N_i', N_j', N_m'] \{\phi\}_e. \quad (4-38)$$

A zatem:

$$X = - \frac{\partial \phi}{\partial x} = - [b_i, b_j, b_m] \{\phi\}_e / 2 \Delta, \quad (4-39)$$

$$Y = - \frac{\partial \phi}{\partial y} = - [c_i, c_j, c_m] \{\phi\}_e / 2 \Delta.$$

Wektor sił węzłowych wywołanych siłami objętościowymi wg (4-35) ma teraz postać

$$\{F_i\}_e = - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \{\phi\}_e. \quad (4-40)$$

4.2.9. **Wyznaczenie naprężeń.** Podstawowe powyżej wzory pozwalają ułożyć jedną macierz sztywności dla konstrukcji i uzyskać rozwiązanie dla przemieszczeń.

Macierz naprężeń, napisaną ogólnie w postaci (2-16), otrzymuje się przez podstawienie obliczonych przemieszczeń odpowiednio dla każdego elementu.

Naprężenia, zgodnie z podstawowym założeniem, są stałe wewnątrz elementu. Dlatego wydaje się korzystne odnosić je do środków poszczególnych elementów (uczyniono to w większości przytoczonych przykładów). Można też wyznaczać naprężenia w węzłach poprzez obliczenie wartości średnich dla sąsiadujących elementów (takie „wyważanie” bywa też stosowane, lecz jego zalety wydają się niewielkie).

Program dla maszyny powinien być ułożony tak, aby dla każdego elementu można było wyznaczać także naprężenia główne i ich kierunki.

### 4.3. Przykłady. Ocena dokładności

Przedstawione powyżej rozwiązanie płaskich problemów sprężystości zdąży, przy zagęszczeniu podziału, do rozwiązania ścisłego. Jednak na każdym etapie zagęszczenia otrzymuje się rozwiązanie przybliżone, podobnie jak na przykład w szeregach *Fouriera* przy ograniczonej liczbie wyrazów.

Jak wspomniano w rozdz. 2, wartość całkowitej energii odkształcenia otrzymana na każdym kolejnym etapie zagęszczenia podziału leży poniżej wartości rzeczywistej. W praktyce będzie to oznaczać, że dla całego obszaru przemieszczenia i siły są obliczone z niedomiarem. Lecz nie oznacza to, że jest to słuszne dla każdego punktu obszaru; stąd i wartość praktyczna takiego ograniczenia jest niewielka.

Zasadnicze znaczenie dla inżyniera ma znajomość stopnia dokładności uzyskiwanego w rozwiązaniach typowych przy określonym podziale na elementy. W poszczególnych przypadkach błąd może być znaleziony przez porównanie ze znanym ścisłym rozwiązaniem albo przez badanie zbieżności przy zastosowaniu dwu- lub więcej krotnego zagęszczenia podziału.

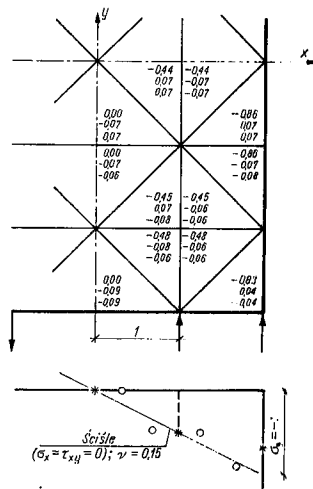
W miarę zdobywania doświadczenia inżynier jest w stanie a priori ocenić rzęd przybliżenia, jaki można osiągnąć w rozważanych zadaniach przy założonej gęstości podziału. Pewne pojęcie o tym można będzie chyba uzyskać po przeanalizowaniu przytoczonych w niniejszej książce przykładów.

Na początek rozpatrzmy kilka najprostszych przykładów, dla których znane są rozwiązania ścisłe.

a. **Jednorodne pole naprężeń.** Jeśli w wyniku rozwiązania ścisłego otrzymuje się równomierny rozkład naprężeń, to przy dowolnym podziale na elementy rozwiązanie powinno dać wyniki ścisłe. Jest to oczywiste, tym niemniej trzeba o tym pamiętać; powyższe może służyć jako sprawdzenie programu napisanego dla maszyny.

b. **Liniowo zmienny rozkład naprężeń.** Podstawowe założenie o stałości naprężeń wewnątrz elementu powoduje, że rozwiązanie w tym przypadku będzie tylko

przybliżone. Na rym. 4.4 przedstawiono prosty przykład belki zginanej widuć, że rozwiązanie przybliżone „osycjuje” wokół rozwiązania ścisłego, przy czym najlepsza zgodność wyników występuje dla naprężeń w kierunku osi obojętnej ( $\sigma_y$ ). Naprężenia  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$  odbiegają od wartości ścisłych, które powinny być równe zero; jednak „osycylują” one w pobliżu zera.



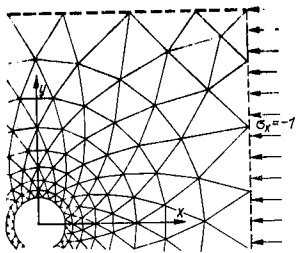
rys. 4.4. Przykład obliczenia belki zginanej na pomocą podziału na elementy trójkątne (wartości  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$  wyszczególnione w podanej kolejności)

\* Średnie węzłowe  
○ Wartości w środkach trójkątów

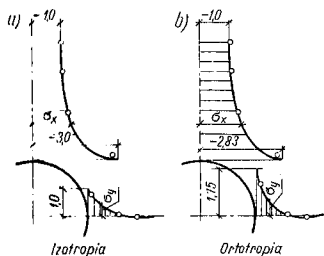
Jeśli wyznaczyć średnią z naprężeń elementów otaczających węzeł wewnętrzny, okaże się, że przybliżenie do wartości ścisłej jest bardzo dobre. Jednakże średnia na powierzchni zewnętrznej nie stanowi tak dobrego wyniku. Wymienione postępowanie określania naprężeń w węzłach przez wartości średnie z otoczenia, jak pokazano na rys. 4.4, często bywa stosowane w praktyce do polepszania przybliżeń.

W celu zwiększenia dokładności można obliczać wartości średnie w pobliżu powierzchni konstrukcji. Nie uważając tego za bezwzględnie konieczne, zaleca się — gdy wymagana jest większa dokładność — stosować po prostu gęstszą siatkę podziału.

c. **Koncentracja naprężeń.** Bardziej konkretne zagadnienie przedstawiono na rys. 4.5 i 4.6. Rozważany jest rozkład naprężeń wokół kolowego otworu w izotropowym i anizotropowo-uwarstwionym materiale, gdy warunki brzegowe dla naprężeń są jednorodne [6]. Zastosowano stopniowy podział na coraz drobniejsze elementy, aby dokładniej zbadać rozkład w obszarze większych gradientów na-



Rys. 4.5. Otwór kołowy w tarczy poddanej jednorodnemu stanowi naprężenia: a) materiał izotropowy, b) materiał uwarstwiony (ortotropowy);  $E_x = E_1 = 1$ ,  $E_y = E_2 = 3$ ,  $\nu_1 = 0,1$ ,  $\nu_2 = 0$ ,  $G_{xy} = 0,43$



Rys. 4.6. Porównanie wyników rozwiązania teoretycznego i rozwiązania za pomocą metody elementów skończonych dla przypadków a) i b) z rys. 4.5 — rozwiązanie ścisłe; o — o wyniki rozwiązania metodą elementów skończonych

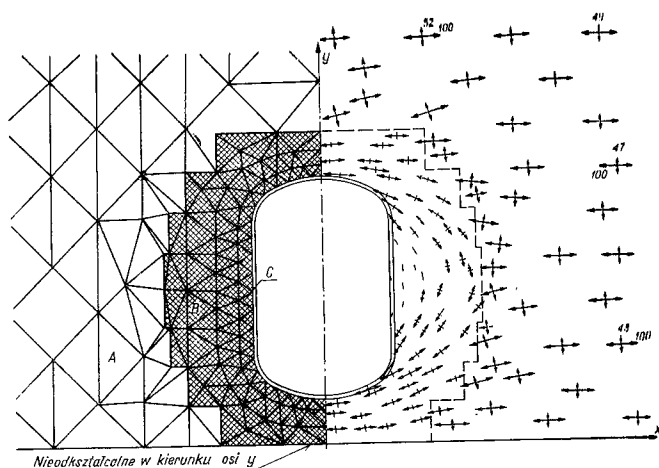
przezeń. Wysoki stopień dokładności, jaki można w ten sposób uzyskać, widać z rys. 4.6, gdzie niektóre wyniki porównano z rozwiązaniem ścisłym [3], [7].

#### 4.4. Niektóre zastosowania praktyczne

Zakres stosowania w praktyce inżynierskiej metody elementów skończonych jest bardzo szeroki; w chwili obecnej metoda ta wypiera badania modelowe dla problemów płaskich, z uwagi na swą wysoką dokładność, mały koszt i operatywność. Łatwość uwzględniania anizotropii materiału, naprężeń termicznych i sił masowych zwiększa jeszcze jej zalety.

Kilka przykładów aktualnych zastosowań tej metody do rozwiązywania złożonych problemów praktyki inżynierskiej podano poniżej.

a. *Rozkład naprężeń wokół wzmocnionego otworu* (rys. 4.7). W stalowych naczyńach ciśnieniowych lub w konstrukcjach lotniczych krawędzie otworu poddane są stanowi napięcia powierzchniowego. Wprowadzony w otwór przewód sam stanowi pewne wzmocnienie krawędzi; ponadto zaś krawędzie otworu są pogrubione, aby zredukować wokół niego wpływ koncentracji naprężeń.



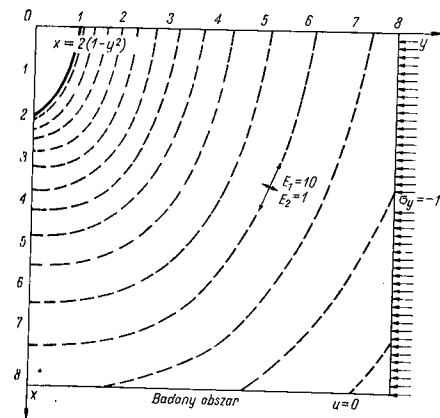
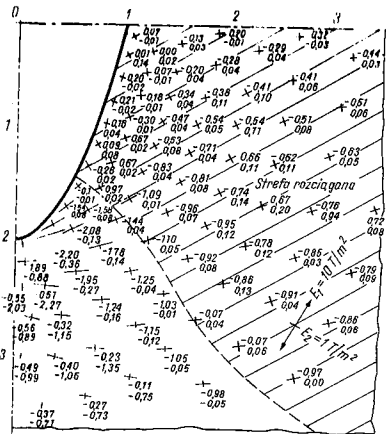
Rys. 4.7. Wzmocniony otwór w płycie. Jednorodne pole naprężeń w znacznej odległości od otworu:  $\sigma_x = 100$ ,  $\sigma_y = 50$ ; stosunek grubości płyty w obszarach A, B i C wynosi 1:3:23

Rozwiązanie takich przypadków w płaskim stanie naprężenia nie sprawia trudności. Elementy skończone wybiera się tak, aby odpowiadały zmianom grubości, po czym wyznacza się dla każdego z nich odpowiednią wartość grubości.

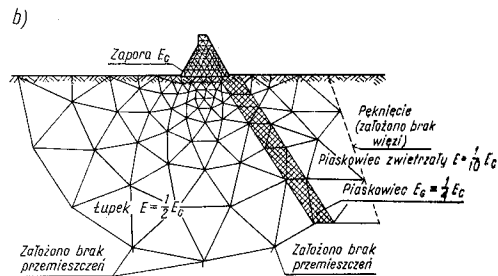
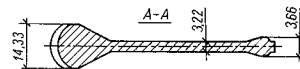
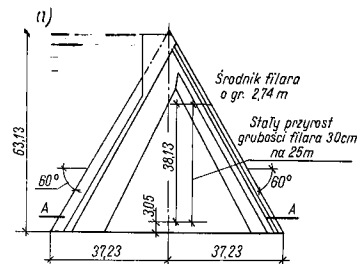
Wąskie pogrubione obrzeże wokół otworu można przedstawić albo za pomocą pewnego rodzaju elementów typu belki, albo, co znacznie upraszcza programowanie, w postaci cienkich trójkątnych elementów o odpowiednio dobranej grubości. Ten ostatni sposób stosowano dla zadania przedstawionego na rys. 4.8. Na rysunku tym podano też pewne wyniki obliczenia naprężeń w pobliżu otworu. Warto zauważyć, że do obliczeń wprowadzono dość znaczny obszar wokół otworu i dość duże zróżnicowanie elementów.

b. *Dolina o strukturze anizotropowej podlegająca wpływowi sił tektonicznych* (rys. 4.8) [6]. Treść zadania stanowi symetryczna dolina poddana działaniu równomiernie rozłożonych naprężeń poziomych. Materiał jest uwarstwiony, a więc jest „poprzecznie izotropowy”, a kierunek warstw zmienia się od punktu do punktu. Na rysunku zaznaczono strefę, gdzie występują rozciągania. Zadanie to ma istotne znaczenie dla geologów i inżynierów zajmujących się mechaniką skal.

c. *Zapora poddana działaniu zewnętrznego i wewnętrznego ciśnienia wody* (rys. 4.9) [8], [9]. Filar zapory posadowiony jest na dość skomplikowanym podłożu skalnym. Niejednorodny obszar posadowienia rozważany jest w płaskim stanie odkształcenia, podczas gdy sam filar zapory traktowany jako tarcza o zmiennej grubości — w płaskim stanie naprężenia.



Rys. 4.8. Dolina o zakrzywionym utwarstwie podłoża, poddana działaniu poziomego naprężenia tektonicznego (stan płaski odkształcenia, 170 węzłów, 298 elementów)



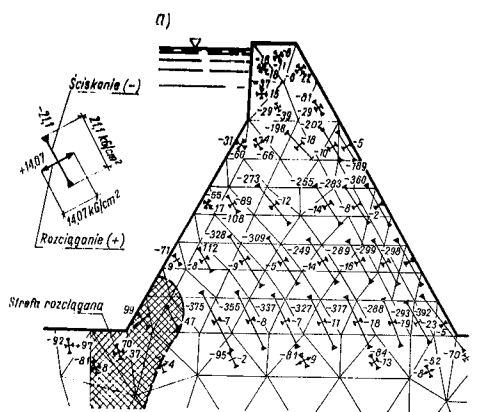
Rys. 4.9. Analiza stanu naprężenia w filarze zapory. Założono płaski stan naprężenia dla zapory, a płaski stan odkształceń dla podłoża: a) przyjęty do obliczeń przekrój filara, b) przyjęty do obliczeń obszar posadowienia i podział na elementy skończone

Rozwiązanie zapory przy uwzględnieniu ciężaru własnego i obciążenia zewnętrznego nie stwarza większych trudności. Warto jednak dodać, że „zautomatyzowano” tu obliczenie sił w węzłach siatki od ciężaru własnego.

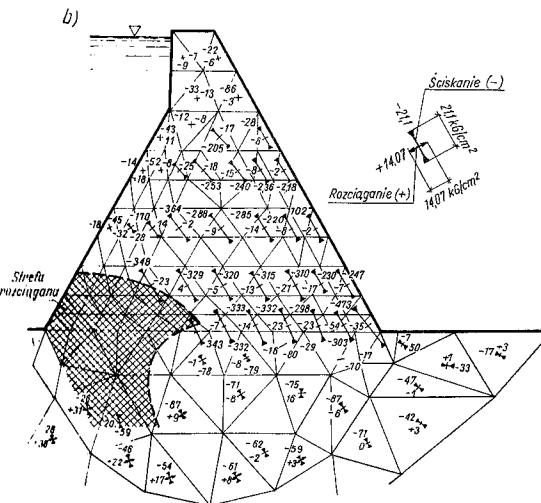
Gdy uwzględnić się ciśnienie wody w porach, sytuacja może wymagać pewnych wyjaśnień.

Ogólnie wiadomo, że w materiale porowatym ciśnienie wody przekazuje się na budowlę jako *siła masowa* o wielkości

$$X = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial p}{\partial y}$$



Poniżej fundamentu należy dodać naprężenia naturalne w skale



Rys. 4.10. Badanie naprężeń w filarze zapory przedstawionej na rys. 4.9. Naprężeni główne od obciążenia ciężarem własnym i ciśnieniem wody, przyjętym jako: a) siły zewnętrzne, b) siły masowe, wywołane ciśnieniem filtracyjnym wody w porach

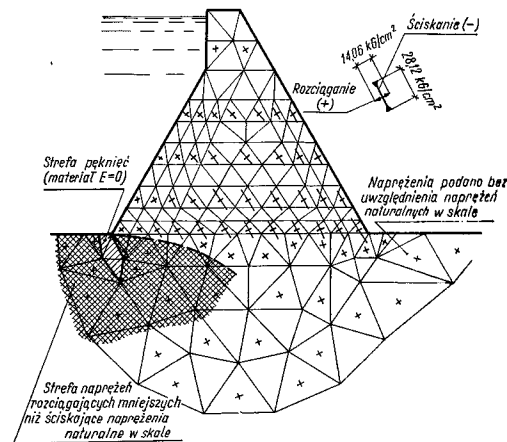
i parcia zewnętrznego wudy nie potrzeba wówczas uwzględniać. Ciśnienie wody w porach  $p$  jest w istocie potencjałem sił objętościowych, zdefiniowanym przez równania (4-36). Rysunek 4.10 przedstawia podział na elementy samej zapory i jej otoczenia.

Na rysunku 4.10a i b podano wartości naprężeń od ciężaru działającego tylko na zapórę oraz od ciśnienia wody potraktowanego albo jako obciążenie zewnętrzne, albo jako siła objętościowa (ciśnienie wody w porach). Oba rozwiązania wykazują istnienie znacznej strefy rozciągania, przy czym drugie założenie prowadzi do znacznego wzrostu naprężeń w stosunku do pierwszego.

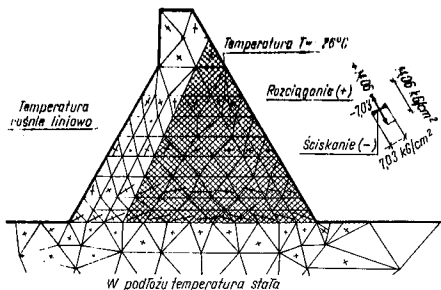
d. **Zarysowanie.** Naprężenia rozciągające z poprzedniego przykładu niewątpliwie mogą spowodować pęknięcia w skale. Jeżeli zostaje utrzymana stateczność mimo wystąpienia takich pęknięć, wówczas zapórę można traktować jako bezpieczną.

„Pęknięcia” można wprowadzić do rozważań w bardzo prosty sposób, przyjmując, że wartość modułu sprężystości w badanym miejscu równa jest zeru. Analiza przypadku pęknięcia w narożu rozwartym pokazana jest na rys. 4.11, skąd też widać, że przy założeniu pęknięć nie występują rozciągania wewnątrz samej zapory.

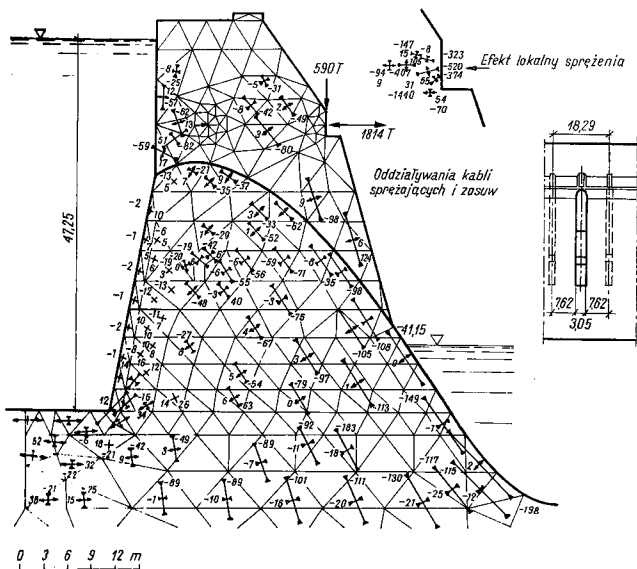
Bardziej dokładne rozważania dla przypadku rozszerzania się pęknięć i wynikającej stąd zmiany rozkładu naprężeń (przegrupowywania się naprężeń) omówione są w rozdz. 18.



Rys. 4.11. Naprężenia w filarze zapory; wprowadzenie „pęknięcia” modyfikuje rozkład naprężeń (obciążenia jak na rys. 4.10b)



Rys. 4.12. Badania naprężeń w filarze zapory. Naprężenia termiczne spowodowane ochłodzeniem zakreskowanego pola do temperatury  $-26^{\circ}\text{C}$  ( $E = 2,2 \cdot 10^9 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}$ )



Rys. 4.13. Zapora ciężka z filarami i kablami sprężającymi

e. *Naprężenia termiczne*. Obliczenia naprężeń termicznych dla tej samej zapory dokonano przykładowo przy założeniu prostego rozkładu temperatury; wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4.12.

f. *Zapory ciężkie*. Masywna zapora jest przykładem możliwości zastosowania metody elementów skończonych. Inne typy zapór, jak np. zapory ciężkie z filarami lub bez, traktuje się podobnie. Na rys. 4.13 przedstawiono analizę masywnej zapory z filarami i drogą na koronie.

W tym przypadku traktowanie zadania jako dwuwymiarowego w otoczeniu miejsca nagłej zmiany przekroju, tj. w miejscu, gdzie filar łączy się z masą zapory, jest oczywiście niesłuszne; prowadzi to tylko do lokalnych zakłóceń.

Warto podkreślić sposób w jaki — w przypadku prostego rozwiązania — założono rozmieszczenie i zróżnicowanie wymiarów elementów, co umożliwiło dokładne zbadanie koncentracji naprężeń w otoczeniu zakotwień kabli oraz przebiegu rozkładu naprężeń w zaporzce i w posadowieniu. Liniowy stosunek wymiarów elementów skończonych (największego i najmniejszego) jest rzędu 30:1; (największe elementy w posadowieniu nie zostały pokazane na rysunku).

Nietrudno pokazać inne liczne zastosowania metody do rozwiązania praktycznych zadań inżynierskich.

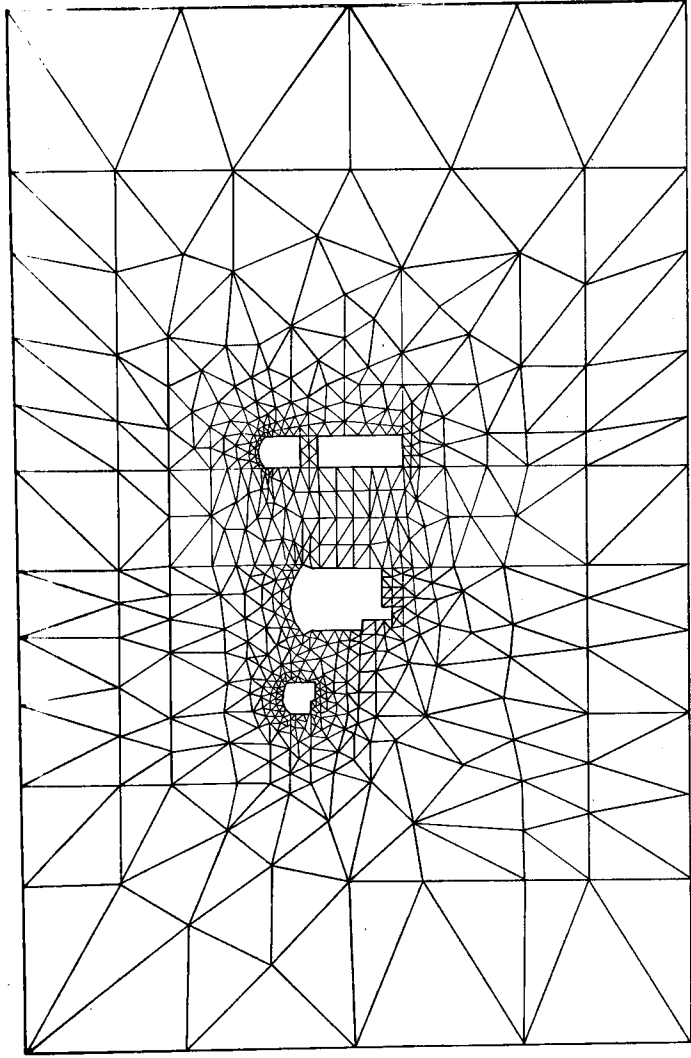
g. *Podziemna siłownia*. Przykład przedstawiony na rys. 4.14 i 4.15 przedstawia interesujące zastosowanie metody do rozwiązania poważnego problemu. Tutaj linie naprężeń głównych były rysowane automatycznie. W obliczeniach uwzględnione zostały liczne warianty stanów naprężeń początkowych  $\{\sigma_0\}$ , z uwagi na małą znajomość warunków geologicznych w rozważanym miejscu. Szybkie rozwiązanie i graficzne przedstawienie licznych danych umożliwiło wybór wyników odpowiednich do praktycznych zastosowań.

## 4.5. Specjalne traktowanie płaskiego stanu odkształcenia w nieściśliwym materiale

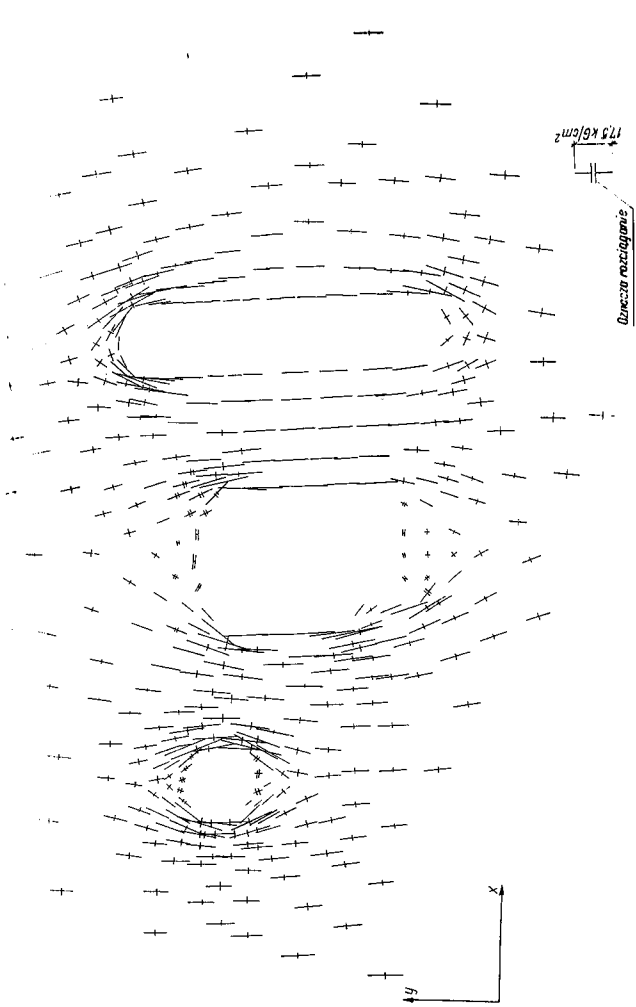
Należy zaznaczyć, że związek (4-20) definiujący macierz sprężystości  $[D]$  dla materiałów izotropowych zawodzi, gdy współczynnik *Poissona* osiąga wartość 0,5, ponieważ czynnik w nawiasach przybiera wówczas wartość nieskończenie wielką. Najprostszy sposób ominięcia tej trudności polega na wprowadzeniu wartości współczynnika *Poissona* bliskiej 0,5, lecz nie równej tej wartości. Doświadczenie wskazuje jednak, że jeśli to zrobimy, psuje się zgodność rozwiązania wg metody elementów skończonych z rozwiązaniem ściślym (pogarsza się przybliżenie).

Odmienny sposób postępowania w tym przypadku, polegający na zastosowaniu sformułowań wariacyjnych, podaje *Herrman* w pracy [10]. Czytelnika odsyła się do pracy oryginalnej.





Rys. 4.14. Podziałka siłownia. Siatka zastosowana do obliczeń



Rys. 4.15. Anomaryczne wykonany rysunek wartości naprężenia głównych dla układu z rys. 4.15; materiał anizotropowy:  $\sigma_x, \sigma_y = 0.3, \epsilon_{xy} = 0$

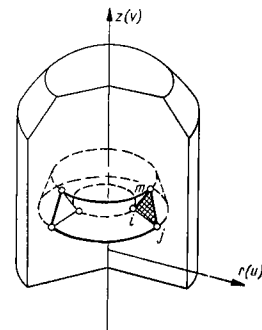
- [1] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topps: Stiffness and deflection analysis of complex structures, *J. Aero. Sci.*, 23, s. 805-23, 1956.
- [2] R. W. Clough: The finite element in plane stress analysis, *Proc. Wydz. 2, A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation*, Pittsburg, Pa., verzeień 1960.
- [3] S. Timoshenko, L. N. Goodier: *Theory of Elasticity*, Wydz. 2, ed. McGraw-Hill, 1951. Książka ta ukazała się w polskim wydaniu: *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
- [4] S. G. Lekhnitski: *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, tłum. z ros. przez P. Fern, Holden Day, San Francisco, 1963.
- [5] R. F. S. Hearman: *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity*, Oxford Univ. Press, 1961.
- [6] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung, K. G. Stagg: Stresses in Anisotropic Media with particular reference to problems of rockmechanics, *J. Strain Analysis*, 1, s. 172-82, 1966.
- [7] G. N. Savin: *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press 1961. (tłum. z ros.).
- [8] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: Buttress Dams on Complex rock foundations, *Water Power*, 16, s. 193, 1964.
- [9] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: Stresses in Buttress Dams, *Water Power*, 17, s. 69, 1965.
- [10] L. R. Herrman: Elasticity equations for incompressible, or nearly incompressible materials by a variational theorem, *J.A.I.A.A.*, 3, s. 1896, 1965.

## 5. Analiza osiowo-symetrycznego stanu naprężenia

### 5.1. Wstęp

Problem określenia rozkładu naprężeń w ciałach obrotowych (ciała osiowo-symetryczne) pod osiowo-symetrycznym obciążeniem ma poważne znaczenie praktyczne. Matematycznie zagadnienie to jest bardzo podobne do zagadnienia płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia, gdyż znów jest to przypadek dwuwymiarowy [1], [2]. Wskutek symetrii, w każdym punkcie przekroju poprowadzonego wzdłuż osi symetrii dwie składowe definiują całkowicie stan odkształcenia, a zatem i stan naprężenia (rys. 5.1). Jeżeli  $r$  i  $z$  oznaczają odpowiednio współrzędną promieniową i osiową punktu, a  $u$  i  $v$  są odpowiadającymi tym współrzędnym przemieszczeniami, łatwo zauważyć, że dokładnie te same funkcje przemieszczeń, których użyto w rozdz. 3, można zastosować do zdefiniowania przemieszczeń elementu trójściennego  $i, j, m$ , pokazanego na rysunku.

Objętość materiału, związaną z „elementem”, rozumiemy teraz jako objętość ciała obrotowego wskazanego na rys. 5.1; wszystkie całkowania należy przeprowadzać względem tej właśnie objętości.



Rys. 5.1. Element ciała osiowo-symetrycznego

W problemach płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia wykazano, że praca wewnętrzna związana jest z trzema składowymi odkształcenia w płaszczyźnie współrzędnych, składowa zaś naprężenia prostopadła do tej płaszczyzny nie odgrywa żadnej roli, ponieważ albo naprężenia, albo odkształcenia równe są zeru.

W stanie osiowej symetrii każde przemieszczenie promieniowe automatycznie wywołuje odkształcenie obwodowe, ponieważ zaś naprężenia obwodowe nie są równe zeru, należy uwzględnić ten czwarty składnik stanu odkształcenia i odpowiadający mu składnik naprężenia. Na tym polega najistotniejsza różnica w traktowaniu stanów osiowo-symetrycznych i stanów płaskich.

Czytelnik dostrzeże, że aparat matematyczny zastosowany w niniejszym rozdziale jest bardziej pracochłonny niż w poprzednim, lecz w zasadzie obejmuje on operacje oparte na regułach podanych w rozdz. 2.

## 5.2. Charakterystyki elementu

**5.2.1. Funkcja przemieszczeń.** Stosując trójsienny kształt elementu (rys. 5.1) o węzłach  $i, j, m$ , numerowanych w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, definiujemy przemieszczenie węzła przez dwie jego składowe

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (5-1)$$

przemieszczenie zaś elementu przez wektor

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (5-2)$$

Oczywiście, jak w p. 4.2.1, dla zdefiniowania stanu przemieszczenia wewnątrz elementu stosujemy liniowy rozkład wg współrzędnych. Nie powtarzamy tutaj rachunku identycznego z zastosowanym w rozdz. 4. Pole przemieszczeń jest teraz dane przez równanie (4-7)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [IN'_i, IN'_j, IN'_m] \{\delta\}^e,$$

gdzie

$$N'_i = (a_i + b_i r + c_i z) / 2A \quad \text{itd.}, \quad (5-3)$$

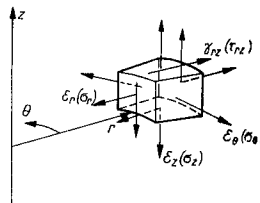
$I$  zaś jest macierzą jednostkową rzędu  $2 \times 2$ .

Ponadto

$$\begin{aligned} a_i &= r_j z_m - r_m z_j, \\ b_i &= z_j - z_m = z_{jm}, \\ c_i &= r_m - r_j = r_{mj} \end{aligned} \quad (5-4)$$

i cyklicznie dalej,  $A$  zaś oznacza pole elementarnego trójkąta.

**5.2.2. Odkształcenia (całkowite).** Jak już wspomniano, należy rozpatrzyć cztery składowe odkształcenia. W istocie są to wszystkie możliwe, różne od zera, składowe odkształcenia w stanie osiowo-symetrycznym. Na rys. 5.2 pokazano te odkształcenia i przynależne im naprężenia.



Rys. 5.2. Odkształcenia i naprężenia w stanie symetrii osiowej

Podany poniżej wektor odkształcenia zawiera składowe odkształcenia i definiuje je jako funkcje przemieszczeń punktu. Wyrażenia na składowe są znane i nie będą tutaj wyprowadzane. Interesujący się ich wyprowadzeniem Czytelnik znajdzie odpowiedni materiał w podręcznikach teorii sprężystości [3]. Mamy zatem

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix} \quad (5-5)$$

Stosując funkcje przemieszczeń określone za pomocą równań (5-3) i (5-4) mamy

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e = [B_i, B_j, B_m] \{\delta\}^e,$$

gdzie

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} N'_i & 0 \\ \frac{\partial N'_i}{\partial z} & \frac{\partial N'_i}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & c_i \\ a_i/r + b_i + c_i z/r & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad \text{itd.} \quad (5-6)$$

Ponieważ macierz  $[B_i]$  zawiera teraz współrzędne  $r$  i  $z$ , odkształcenia nie są stałe wewnątrz elementu jak w przypadku stanu płaskiego. Ta zmienność odkształceń dana jest przez wyraz  $\varepsilon_\theta$ . Jeśli zadane przemieszczenia węzłów są takie,

że  $u$  jest proporcjonalne do  $r$ , wówczas w ściance wszystkie odkształcenia stają się stałymi w płaszczyźnie przekroju. Ponieważ jest to jedyny stan przenieszczeń pokrywający się z warunkiem stałego odkształcenia, jest oczywiste, że funkcja przenieszczeń w tym zakresie spełnia podstawowe warunki podane w rozdz. 2.

**5.2.3. Odkształcenia początkowe (odkształcenia termiczne).** Ogólnie należy rozpatrywać cztery składowe wektora odkształcenia

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z0} \\ \varepsilon_{r0} \\ \varepsilon_{\theta 0} \\ \gamma_{rz0} \end{Bmatrix} \quad (5-7)$$

Aczkolwiek mogą one w ogólnym przypadku być zmienne wewnątrz elementu, wygodniej będzie przyjąć, że odkształcenia początkowe są w nim stałe. Takie założenie przyjmuje się w przypadku odkształceń termicznych. Dla materiału izotropowego mamy

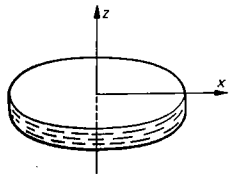
$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-8)$$

gdzie  $\theta^e$  jest średnim przyrostem temperatury działającym w elemencie,  $\alpha$  zaś — współczynnikiem rozszerzalności cieplnej.

Ogólny przypadek anizotropii nie może być tutaj rozważany, ponieważ w takich warunkach nie jest możliwy stan osiowej symetrii. Przypadkiem mającym sens praktyczny jest przypadek materiału „uwarstwionego”, podobnego do rozważanego w rozdz. 2, w którym płaszczyzna izotropii jest normalna do osi symetrii (rys. 5.3). Tutaj możliwe są dwa współczynniki rozszerzalności: jeden  $\alpha_z$  w kierunku osi symetrii i drugi  $\alpha_r$  w płaszczyźnie do niej prostopadłej. Początkowe odkształcenia cieplne są teraz równe

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha_z \theta^e \\ \alpha_r \theta^e \\ \alpha_r \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-9)$$

Praktyczne przypadki takiej anizotropii często występują w elementach wykonanych z materiałów uwarstwionych albo włóknistych.



Rys. 5.3. Materiał uwarstwiony osiowo-symetrycznie

**5.2.4. Macierze sprężystości [D]** wiążąca odkształcenia  $\{\varepsilon\}$  i naprężenia  $\{\sigma\}$  w następujący sposób

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})$$

stanowiąc będzie przedmiot dalszych rozważań.

Najpierw rozpatrzmy materiał anizotropowy „uwarstwiony”, gdyż materiał izotropowy stanowi jego szczególnie przypadek.

a. *Anizotropowy materiał uwarstwiony* (rys. 5.3). Oś  $z$  reprezentuje normalną do płaszczyzn warstw. Równania (4-22), pomijając dla uproszczenia odkształcenia początkowe, można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \sigma_z/E_2 - \nu_2 \sigma_r/E_2 - \nu_2 \sigma_\theta/E_2, \\ \varepsilon_r &= -\nu_2 \sigma_z/E_2 + \sigma_r/E_1 - \nu_1 \sigma_\theta/E_1, \\ \varepsilon_\theta &= -\nu_2 \sigma_z/E_2 - \nu_1 \sigma_r/E_1 + \sigma_\theta/E_1, \\ \gamma_{rz} &= \tau_{rz}/G_2. \end{aligned} \quad (5-10)$$

Oznaczając

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{oraz} \quad \frac{G_2}{E_2} = m$$

i rozwiązując powyższe względem naprężeń otrzymujemy

$$D = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2m\nu_1^2)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu_1^2 & m\nu_2(1+\nu_1) & m\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n(1-m\nu_2^2) & \nu_1+m\nu_2^2 & \nu_1+m\nu_2^2 & 0 \\ (\text{sym}) & n(1-m\nu_2^2) & n(1-m\nu_2^2) & 0 \\ & & & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2m\nu_1^2) \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

b. *Materiał izotropowy.* Dla tego przypadku podstawiając  $E_1 = E_2 = E$ , czyli  $n = 1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , uwzględniając związek między  $E$  a  $G$

$$\frac{G_2}{E_2} = \frac{G}{E} = m = \frac{1}{2(1+\nu)}$$

oraz podstawiając go do (5-11) znajdujemy

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ (\text{sym}) & & 1 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

**5.2.5. Macierze**  $[B]$  i  $[D]$  dla elementu  $i, j$ ,  $m$  można wyznaczyć podobnie jak to wykonano w przypadku równania (2-10). Przypominając, że całka powinna być brana po objętości całego pierścienia, znajdujemy

$$[k]^e = 2\pi \int [B]^T [D] [B] r dr dz, \quad (5-13)$$

gdzie  $[B]$  dana jest przez (5-6),  $[D]$  zaś przez (5-11) lub (5-12) w zależności od rodzaju materiału.

Całkowanie nie może być wykonane tak prosto, jak to było w przypadku problemu płaskiego, ponieważ  $[B]$  zależy od współrzędnych. Istnieją dwie możliwości: pierwsza — całkowanie numeryczne, druga — mnożenie macierzy i całkowanie wyraz po wyrazie.

Najprostsze przybliżone postępowanie polega na wyznaczeniu  $[\bar{B}]$  dla środka ciężkości elementu

$$\bar{r} = (r_i + r_j + r_m)/3 \quad \text{i} \quad \bar{z} = (z_i + z_j + z_m)/3.$$

W tym przypadku otrzymujemy po prostu jako pierwsze przybliżenie

$$[k] = 2\pi [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] \bar{r} \Delta, \quad (5-14)$$

gdzie  $\Delta$  jest polem trójkąta.

Bardziej dokładne całkowanie numeryczne należy stosować dla obliczenia całki w poszczególnych punktach trójkąta. Metody te będą dyskutowane szczegółowo w rozdz. 8.

Można jednak wykazać, że przy zagęszczaniu podziału całkowanie numeryczne jest tak dokładne, że rozwiązanie zmierza do dokładnego [4]. „Jednopunktowe całkowanie” proponowane tutaj jest właśnie tego typu, wiadomo bowiem dobrze, że objętość ciała obrotowego jest dokładnie iloczynem pola przekroju i obwodu koła zatoczonego przez środek ciężkości tego pola. Stosując omawiane tutaj proste elementy trójkątne, drobny podział nie jest w żadnym przypadku konieczny dla uzyskania dużej dokładności; w większości opracowywanych dla praktyki programów stosuje się proste przybliżenie, które — co może być zaskakujące — czasem jest górną granicą całkowania ścisłego. Powodem jest obecność członów logarytmicznych w dokładnym sformułowaniu. Zawierają one stosunki typu  $r_j/r_m$  i jeśli element znajduje się w większej odległości od osi obrotu, wyrazy te dążą do jedności, a wówczas wyznaczenie logarytmu staje się niedokładne.

Jeśli wymagana jest większa dokładność, postępuje się zwykle w następujący sposób.

Jak poprzednio, dzielimy macierz sztywności na odpowiednie podmacierze o wymiarze  $2 \times 2$

$$[k_{rs}] = 2\pi \int [B_r]^T [D] [B_s] r dr dz \quad (5-15)$$

jak to wykonano w (4-28) do (4-30). Na tym etapie dobrze jest podzielić podmacierze  $[B]$  na części stałe i zmienną. Tak więc, dla przykładu, możemy napisać

$$[B] = [\bar{B}] + [B']_i, \quad (5-16)$$

gdzie  $[B]$  jest wartościową  $[B]$  dla elementu centralnego, jak podano w (5-14), natomiast drugi wyraz wyznaczamy jako wariancję tej wartości. Łatwo zauważyć, że można go zapisać w postaci

$$[B']_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{ (a_i + c_i z)/r - (a_i + c_i \bar{z})/\bar{r} \} / 2\Delta. \quad (5-17)$$

Podstawiając powyższe do (5-15) i pamiętając, że

$$\int [B']_i r dr dz = [0],$$

mamy

$$[k_{rs}] = [\bar{k}_{rs}] + [k'_{rs}], \quad (5-18)$$

gdzie pierwszy wyraz jest właśnie wyrażony przez (5-14), a drugi jest wyrazem korygującym, który można otrzymać jak niej

$$[k'_{rs}] = \frac{2\pi}{(2\Delta)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \int \{ (a_r + c_r z)/r - (a_r + c_r \bar{z})/\bar{r} \} \{ (a_s + c_s z)/r - (a_s + c_s \bar{z})/\bar{r} \} r dr dz. \quad (5-19)$$

Jeśli zmienne całki zapisać w skróconej postaci

$$\int \frac{1}{r} dr dz = \Delta \cdot I_1, \\ \int \frac{z}{r} dr dz = \Delta \cdot I_2, \\ \int \frac{z^2}{r} dr dz = \Delta \cdot I_3, \quad (5-20)$$

to możemy uzyskać proste wyrażenie na składnik korygujący.

$$[k'_{rs}] = \frac{\pi}{2\Delta} \begin{bmatrix} D_{33} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{ a_r a_s (I_1 - 1/r) + (a_r c_s + a_s c_r) (I_2 - \bar{z}/r) + c_r c_s (I_3 - \bar{z}^2/r) \}. \quad (5-21)$$

Całki  $I_1$  do  $I_3$  można określić explicite w zależności od współrzędnych węzłów. Poniżej podano naj pewne szczegóły tych całkowań, które przy pierwszym studiowaniu mogą być pominięte.

**5.2.6. Siły zewnętrzne w węzłach.** W przypadku zagadnień dwuwymiarowych omówionych w poprzednim rozdziale kwestia wyznaczenia obciążeń zewnętrznych była na tyle prosta, że nie wymagała komentarzy. Obecnie jednak istotne jest ustalenie sił zewnętrznych w węzłach tak, aby reprezentowały one łączny efekt sił działających na całym obwodzie kół, tworzących „węzły” elementu. To właśnie zostało uwzględnione już przy całkowaniu wyrażen dla sztywności elementu, gdzie całkowanie wykonywano na całym obwodzie pierścienia.

Jeżeli zatem  $\bar{R}$  przedstawia składową promieniową siły na jednostkę długości obwodu „węzła” o promieniu  $r$ , siła zewnętrzna, którą należy wprowadzić do ruchunku, jest  $2\pi r \bar{R}$ . Podobnie w kierunku osi musimy przyjąć siłę  $2\pi r Z$ , aby przedstawić działanie sił równoległych do osi symetrii.

**5.2.7. Siły węzłowe od odkształceń początkowych.** Znów, stosując równania (2-9) mamy

$$\{F\}_0^* = -2\pi \int [B]^T [D] \{\epsilon_0\} r dr dz \quad (5-22)$$

lub po uporządkowaniu i uwzględnieniu  $\{\epsilon_0\} = \text{const}$

$$\{F_i\}_{\epsilon_0} = -2\pi \int [B_i]^T r dr dz [D] \{\epsilon_0\}. \quad (5-23)$$

Całkować należy w taki sam sposób, jaki stosowano przy wyznaczaniu macierzy sztywności.

Łatwo stwierdzić, że znów można zastosować wyrażenie przybliżone

$$\{\bar{F}_i\} = -2\pi [\bar{B}_i]^T [D] \{\epsilon_0\} \bar{r} \Delta, \quad (5-24)$$

jednakże z członem korygującym, czyli

$$\{F_i\} = \{\bar{F}_i\} + \{F_i'\}. \quad (5-25)$$

Człon korygujący jest równy zeru, ponieważ

$$\{F_i'\} = 2\pi \int [B_i']^T r dr dz [D] \{\epsilon_0\} = 0,$$

wyrażenie (5-24) jest zatem ściśle równe<sup>1</sup>

$$\{F\}^{\epsilon_0} = -2\pi [\bar{B}]^T [D] \{\epsilon_0\} \bar{r} \Delta. \quad (5-26)$$

**5.2.8. Rozłożone siły masowe.** Siły te, takie jak siła ciężkości (jeśli działa wzdłuż osi  $x$ ), siła odśrodkowa w obracających się elementach maszyn, ciśnienie w porach (w przypadku ciał porowatych) często występują w zagadnieniach osiowo-symetrycznych. Oznaczmy te siły przez

$$\hat{p} = \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix} \quad (5-27)$$

na jednostkę objętości materiału odpowiednio w kierunkach  $r$  lub  $z$ . Z równania (2-9) mamy wektor

$$\{F\}_p^* = -2\pi \int [N]^T \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix} r dr dz$$

lub jego składowe

$$\{F_i\}_p = -2\pi \int \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix} N_i r dr dz \quad (5-28)$$

<sup>1</sup> Siły od naprężeń początkowych można wyznaczać w taki sam sposób.

Odnosząc początek układu do środka elementu, jak w p. 4.2.7, łatwo zauważyć, że pierwsze przybliżenie w przypadku stałych sił masowych prowadzi do wyrażenia

$$\{\bar{F}_i\}_p = \{\bar{F}_i\}_p = \{\bar{F}_m\}_p = -2\pi \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix} \bar{r} \Delta / 3. \quad (5-29)$$

Chociaż nie jest to wyrażenie ściśle, okazuje się, że błąd maleje przy zmniejszaniu boków elementu, a ponadto siły te wzajemnie się równoważą; dlatego nie powodują większych nieścisłości. Oczywiście, możliwe jest tutaj całkowanie ściśle.

Jeśli siły masowe są potencjalnymi, to podobnie jak w p. 4.2.9

$$R = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad Z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (5-30)$$

i jeśli potencjał jest określony liniowo poprzez jego wartości w węzłach, można użyć wyrażenia podobnego do (4-40), uzyskując taki sam stopień przybliżenia.

W wielu zastosowaniach siły masowe zmieniają się proporcjonalnie do  $r$ . Na przykład dla sił odśrodkowych w częściach wirujących

$$R = \omega^2 \rho r, \quad (5-31)$$

gdzie:  $\omega$  — prędkość kątowa,  $\rho$  — gęstość masy obracającego się elementu.

W tym przypadku przybliżenie wskazane w (5-29) zawodzi i najlepiej jest przeprowadzić całkowanie w sposób ścisły.

**5.2.9. Wyznaczanie naprężeń.** Teraz naprężenia zmieniają się w całym elemencie, jak to wynika z (5-5) i (5-6). Dogodnie jest wyznaczyć najpierw naprężenia średnie w „środku” elementu. Macierz naprężeń wynikająca z (5-6) i (2-3) jest teraz

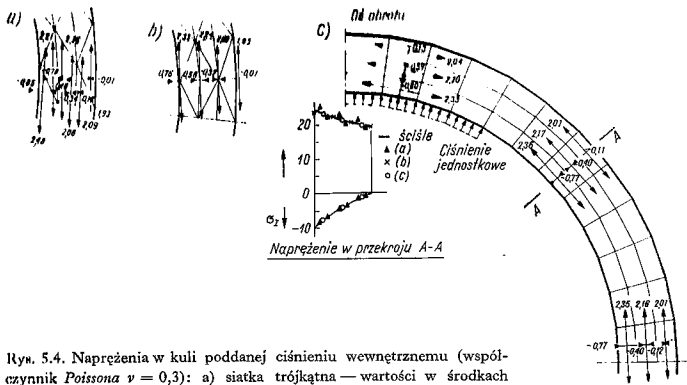
$$\{\bar{\sigma}\}^e = [D][\bar{B}]\{\delta\}^e - [D]\{\epsilon_0\},$$

Stwierdzono, że zachodzi pewna oscylacja wartości naprężeń w elementach zbiegających się w węzle, toteż lepsze przybliżenie otrzymuje się poprzez określenie średnich wartości naprężeń węzłowych.

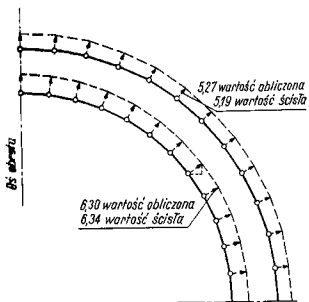
### 5.3. Kilka przykładów rozwiązań

Rozwiązanie problemu walca pod stałym osiowym lub promieniowym ciśnieniem za pomocą metody elementów skończonych wskazuje w istocie, że otrzymane wyniki odpowiadają ścisłym. Jest to naturalnym skutkiem założenia funkcji przecniczych spełniających warunki stałych odkształceń.

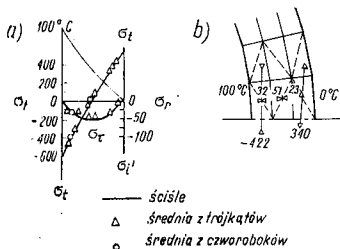
Przykładem zagadnienia, dla którego otrzymano rozwiązanie ściśle i w którym uchodzi prawie liniowy gradient naprężeń, jest zagadnienie kuli poddanej ciśnieniu



Rys. 5.4. Naprężenia w kuli poddanej ciśnieniu wewnętrznemu (współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ ): a) siatka trójkątna — wartości w środkach elementu, b) siatka trójkątna — wartości w węzłach, c) siatka czworoboczna otrzymana przez uśrednienie przyległych trójkątów



Rys. 5.5. Przemieszczenia wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni kuli pod obciążeniem podanym na rys. 5.4



Rys. 5.6. Stacjonarny przepływ ciepła w kuli; temperatura zewnętrzna  $0^{\circ}\text{C}$ , wewnętrzna  $100^{\circ}\text{C}$ : a) średnie z czworoboków, b) zmiany temperatury i naprężenia w przekroju promieniowym

niu wewnętrznemu. Wynunek 5.4 przedstawia naprężenia dośrodkowe, otrzymane przy zastosowaniu rzadkiej siatki; muszą zatem w tym rozwiązaniu występować odchylenia od wartości ścisłych (odchylenia te stają się wyraźniejsze przy większych wartościach współczynnika Poissona, chociaż rozwiązanie ścisłe od niego nie zależy). Na rysunkach 5.4b i 5.4c pokazano znacznie lepsze przybliżenie otrzymane przy określaniu wartości średnich w węzłach.

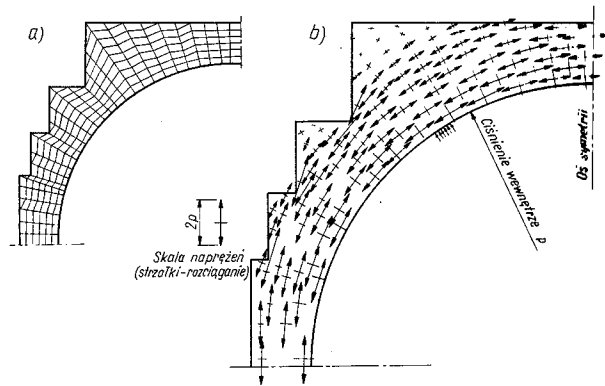
Dobra zgodność z rozwiązaniem ścisłym, nawet przy dość rzadkiej siatce podziału, wskazuje na możliwość uzyskania dużej dokładności w stosowanej metodzie. Wartości przemieszczeń w węzłach, porównane z wartościami ścisłymi, pokazano na rys. 5.5.

Na rysunku 5.6 pokazano rozkład naprężeń cieplnych dla tej samej kuli dla ustalonego stanu zmiany temperatury. Znow można zauważyć dobrą zgodność z rozwiązaniem ścisłym.

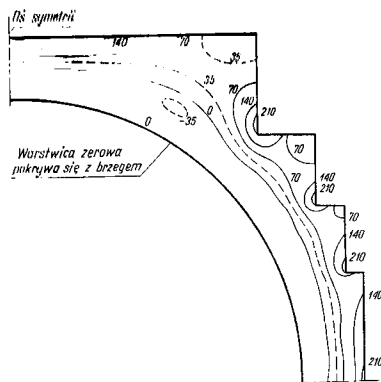
## 5.4. Zastosowania praktyczne

Poniżej przedstawiono dwa przykłady zastosowania metody elementów skończonych do programów służących do wyznaczania naprężeń w układach osiowo-symetrycznych.

a. *Sprężony żelbetowy zbiornik ciśnieniowy reaktora.* Rysunek 5.7 przedstawia rozkład naprężeń w stosunkowo prostym typie zbiornika ciśnieniowego.



Rys. 5.7. Zbiornik ciśnieniowy reaktora: a) siatka czworoboczna, użyta do obliczeń; była ona generowana automatycznie w maszynie cyfrowej, b) obraz naprężeń wywołanych równomiernym ciśnieniem wewnętrznym  $p$  (wykonany przez automat kreślący); rozwiązanie oparto na średnich z czworoboków; współczynnik Poissona  $\nu = 0,15$



Rys. 5.8. Naprężenia termiczne spowodowane stacjonarnym przepływem ciepła w zbiorniku ciśnieniowym reaktora; izobary większego naprężenia głównego podano w  $\text{kg/cm}^2$  (temperatura wewnętrzna  $400^\circ\text{C}$ , zewnętrzna  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E = 1 \cdot 81 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0,15$ )

Wskutek symetrii analizowana była tylko połowa zbiornika; przedstawione wyniki dotyczą składowych naprężenia wywołanego ciśnieniem wewnętrznym. Podobne wyniki, wywołane efektem działania kabli sprężających, łatwo uzyskać przedstawiając odpowiednie obciążenia węzłów.

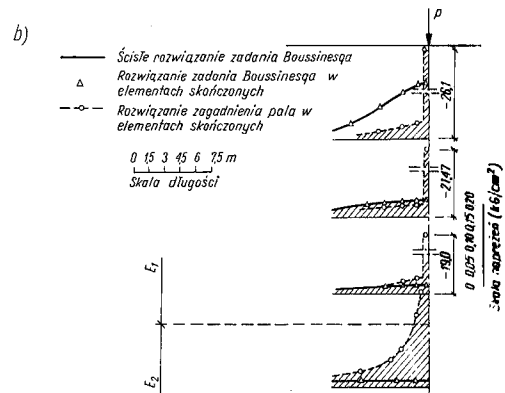
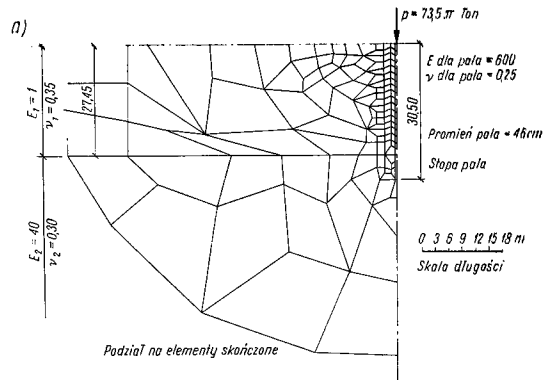
Na rysunku 5.8 pokazano trajektorie naprężeń głównych (większych) wywołane działaniem temperatury. Stan temperatury dany jest przez stacjonarny przepływ ciepła; obliczenia wykonano w sposób opisany w rozdz. 10.

b. *Fundament na palach w gruncie uwarstwionym.* Na rysunku 5.9 pokazano rozkład naprężeń wokół pala fundamentowego przechodzącego przez dwie różne warstwy. Ta niejednorodność nie przedstawia trudności i problem rozwiązywany jest za pomocą programu standardowego.

## 5.5. Obciążenie niesymetryczne

Opisana w niniejszym rozdziale metoda może być rozciągnięta na przypadek obciążenia niesymetrycznego. Jeżeli obciążenie obwodu może być przedstawiane w postaci szeregu harmonicznego, wówczas zawsze można ograniczyć rozwiązanie do sekcji osiowej, aczkolwiek liczba stopni swobody wzrasta teraz do trzech.

Pewne szczegóły tego postępowania opisane będą w rozdz. 12. Pełny opis postępowania znajduje się w [5].



Rys. 5.9. Pal w podłożu uwarstwionym: a) siatka nieregularna i dane do obliczeń, b) wykresy naprężeń pionowych w przekrojach poziomych; dla porównania wysowno także wyniki rozwiązania ścisłego wg Boussinesq'a przy  $E_1 = E_2 = E_{\text{pala}}$  oraz wyniki rozwiązania zadania Boussinesq'a za pomocą elementów skończonych



- [1] R. W. Clough: Stress Analysis, Chapter 7, ed. O. C. Zienkiewicz and G. M. Holister, Wiley, 1965.
- [2] R. W. Clough, Y. Rashid: Finite element analysis of anti-symmetric solids. Proc. A.S.C.E., 91, EM, 1, s. 71, 1965.
- [3] S. Timoshenko, J. N. Goodier: Theory of Elasticity, Wyl. 2, ed. Motiaw-11111, 1951. Książka ta ukazała się w polskim wydaniu: Teoria sprężystości. Arkady, Warszawa, 1962.
- [4] H. M. Irons: Comment on Stiffness matrices for sector element by I. R. Raju and A. K. Rao. J.A.I.A.A. 7, s. 156-157, 1969.
- [5] E. L. Wilson: Structural analysis of axisymmetric solids. J.A.I.A.A. 3, s. 2269-2274, 1965.

## 6. Analiza trójwymiarowego stanu naprężeń

### 6.1. Wstęp

Trójwymiarowy stan naprężeń występuje bodaj we wszystkich praktycznych przypadkach, chociaż w niektórych z nich można zastosować takie lub inne przybliżenie dwuwymiarowe, prowadzące do prawie równorzędnego, lecz bardziej ekonomicznego rachunku.

Najprostszym płaskim elementem w kontinuum dwuwymiarowym jest trójkąt. W przestrzeni trójwymiarowej odpowiada mu czworościan, tj. element o czterech węzłach; zajmiemy się zatem zasadniczymi sformułowaniami dla takiego elementu. Równocześnie wykazane zostaną trudności, których nie brano poprzednio pod uwagę. Jedną z nich jest porządek numeracji węzłów, będący w istocie zagadnieniem właściwego opisu ciała, podzielonego na takie elementy.

Pierwsza sugestia co do stosowania tetraedrycznych elementów pochodzi od *Gallaghery* i in. [1] i *Melosa* [2]. *Argyris* [3], [4] rozwinął ten temat dalej, *Rashid* [5] zaś pokazał, że przy użyciu największych ówczesnych maszyn cyfrowych takie sformułowanie można było zawsze stosować do problemów praktycznych.

Z powyższego wynika od razu fakt, że liczba prostych elementów tetraedrycznych, którą należy zastosować dla uzyskania rozwiązania z dostateczną praktycznie dokładnością, musi być bardzo wielka. Prowadzi to oczywiście w zagadnieniach praktycznych do układów bardzo wielu równań, co oznacza poważne ograniczenia przy stosowaniu metody w praktyce. Również szerokość pasma w macierzy układu równań staje się duża, co stawia poważne wymagania odnośnie do pojemności pamięci maszyny.

Aby uświadomić sobie rząd wielkości przedstawianego problemu, załóżmy, że chcemy mieć przy rozwiązywaniu dwuwymiarowych zagadnień za pomocą trójkątów taką samą dokładność jak w problemach trójwymiarowych. Dla uzyskania poprawnego wyznaczenia naprężeń w dwuwymiarowym obszarze niech będzie niezbędna siatka  $20 \times 20 = 400$  węzłów. Całkowita liczba równań w układzie wynosi w takim przypadku ok. 800 (zakładając dwie składowe przemieszczenia w węźle). Jest to przykład dość realistyczny. Szerokość pasma macierzy zawiera 20 punktów (patrz rozdział o obliczeniach), czyli 40 zmiennych.

W równoważnym zagadnieniu trójwymiarowym mamy do czynienia z  $20 \times 20 \times$

$\times 20$  8000 węzłów. Całkowita liczba równań jest teraz około 24 000, jako że każde przemieszczenie ma trzy składowe. Dalej, szerokość pasma macierzy zawiera teraz  $20 \times 20 = 400$  punktów, czyli 1200 zmiennych.

Zakładając, że przy stosowanych obecnie metodach obliczeń obciążenie maszyny jest mniej więcej proporcjonalne do liczby równań i do kwadratu szerokości pasma, można oszacować rząd wielkości problemu. Nic można się więc dziwić temu, że wysiłek badaczy w kierunku zwiększenia dokładności przez stosowanie bardziej dogodnych kształtów elementów był największy właśnie w zagadnieniach trójwymiarowych. Praktyczne stosowanie takich elementów będzie opisane w następnych rozdziałach.

Tym niemniej treść niniejszego rozdziału wynikająca bezpośrednio z poprzednich rozwiązań daje wszelkie niezbędne podstawy do formułowania trójwymiarowych zagadnień sprężystych. Przejście z elementów prostych na bardziej złożone będzie po jego przestudiowaniu bardziej oczywiste.

## 6.2. Charakterystyki elementu czworościennego

**6.2.1. Funkcje przemieszczeń.** Rysunek 6.1 przedstawia element czworościenny  $i, j, m, p$  w przestrzeni określonej współrzędnymi  $x, y, z$ . Stan przemieszczeń dowolnego punktu określają trzy składowe  $u, v$  i  $w$  odpowiednio w kierunkach  $x, y$  i  $z$ . Mamy zatem

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (6-1)$$

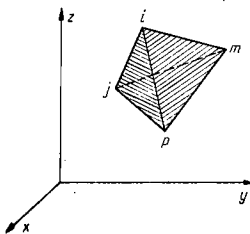
Tak samo jak w płaskim trójkącie, gdzie liniowa zmiana wielkości była określana przez jej trzy wartości węzłowe, tutaj liniowa zmiana będzie określana przez cztery wartości węzłowe. Analogicznie więc do (4-3) można np. napisać

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (6-2)$$

Wprowadzając przemieszczenia węzłowe otrzymujemy cztery równania typu

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \quad \text{itd.}, \quad (6-3)$$

z których dadzą się określić stałe  $\alpha_1$  do  $\alpha_4$ .



Rys. 6.1. Element czworościenny (należy przestrzegać konsekwentnie porządku numerowania, np. zaczynając od  $p$  numerować dalsze węzły w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara tj.  $p, i, j, m$ )

Dalej można napisać to rozwiązanie w postaci podobnej do (4-5) stosując formę wyznacznikową, tj.

$$u = \frac{1}{6V} \left\{ (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) u_j + \right. \\ \left. + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) u_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) u_p \right\}, \quad (6-4)$$

gdzie:  $V$  — objętość czworościanu wyrażająca się wyznacznikiem czwartego rzędu, zaś  $a_i, b_i, c_i, d_i$  — wielkości będące minorami tego wyznacznika. Wszystkie je można zapisać w następujący sposób

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (6-5a)$$

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}$$

$$b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (6-5b)$$

$$c_i = \det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}$$

$$d_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix}$$

Pozostałe wartości otrzymuje się przez cykliczną zamianę indeksów  $p, i, j, m$ .

Porządek numerów węzłów  $p, i, j, m$  musi być przyjęty zgodnie z regułą prawej ręki (rys. 6.1). Gdy patrzymy na ostatni numer, pierwsze trzy węzły numerowane są w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Przemieszczenie elementu zdefiniowane jest przez dwanaście składowych w węzłach

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_p \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad \text{itd.} \quad (6-6)$$

Stosując użyte już poprzednio oznaczenia możemy zapisać przemieszczenie w dowolnym punkcie jako

$$\{f\} = [IN'_i, IN'_j, IN'_m, IN'_p] \{\delta\}^e, \quad (6-7)$$

gdzie wielkości skalarne  $N'_i$  zdefiniowano są następująco

$$N'_i = (a_i | b_i x | c_i y | d_i z) / 6V \quad \text{itd.}, \quad (6-8)$$

I zaś jest macierzą jednostkową  $3 \times 3$ .

Takie funkcje przemieszczeń czynią znów zadość wymaganiu ciągłości przemieszczeń na płaszczyznach zetknięcia się różnych elementów. Fakt ten stoi w bezpośrednim związku z założonym liniowym charakterem zmian przemieszczeń.

**6.2.2. Macierz odkształceń.** Sześć składowych odkształcenia określonych jest według liniowej teorii odkształceń. Macierz odkształceń definiujemy teraz jako

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (6-9)$$

zgodnie z oznaczeniami przyjętymi np. w teorii sprężystości *Timoshenki*. Stosując równania (6-4) ÷ (6-7) łatwo sprawdzić, że

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e = [B_i, B_j, B_m, B_p] \{\delta\}^e, \quad (6-10)$$

gdzie

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial y} & \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial z} & \frac{\partial N'_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad (6-11)$$

pozostałe zaś macierze otrzymuje się w podobny sposób przez zamianę indeksów.

Odkształcenia początkowe, jak np. odkształcenia spowodowane zmianą temperatury, można zapisać w postaci wektora o sześciu współrzędnych (dla materiału izotropowego)

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6-12)$$

gdzie:  $\alpha$  — współczynnik rozszerzalności,  $\theta^e$  — średni przyrost temperatury w elemencie.

**6.2.3. Macierz sprężystości.** W przypadku całkowitej anizotropii macierz  $[D]$  wiążąca sześć składowych naprężeń i sześć składowych odkształcenia może zawierać 21 niezależnych stałych (por. p. 4.2.4).

Ogólnie zatem

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}). \quad (6-13)$$

Aczkolwiek obliczenie w przypadku takich materiałów nie sprawia zasadniczych trudności, wygodniej jest oprzeć rozważania na materiale izotropowym. Stosując znane stałe sprężystości:  $E$  (moduł *Younga*) i  $\nu$  (współczynnik *Poissona*), mamy

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & (1-2\nu) \\ & & & & & & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{sym}) \quad (6-14)$$

**6.2.4. Macierze sztywności, naprężeń i obciążeń.** Macierz sztywności, zdefiniowana ogólnie przez równanie (2-10), może być łatwo scałkowana, ponieważ składowe odkształcenia i naprężenia są stałe wewnątrz elementu.

Ogólny element  $k_{rs}$ , macierzy sztywności definiuje się jako podmacierz wymiaru  $3 \times 3$

$$[k_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] V, \quad (6-15)$$

gdzie  $V$  oznacza objętość czworościanu.

Wektor sił węzłowych wywołanych początkowym odkształceniem jest podobnie jak (4-31)

$$\{F\}_{e_0}^e = -[B]^T [D] \{\epsilon_0\} V, \quad (6-16)$$

natomiast jego składowe określone są następująco<sup>1)</sup>

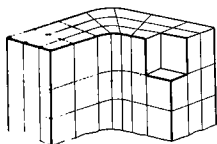
$$\{F_i\}_{e_0} = -[B_i]^T [D] \{\epsilon_0\} V.$$

Podobieństwo między wyrażeniami i wynikami podanymi tutaj a przytoczonymi w rozdz. 4 jest tak znaczne, że nie są potrzebne dalsze szczegółowe wywody. Czytelnik potrafi, powtarzając dokładnie rozumowanie z rozdz. 4, znaleźć bez trudności inne sformułowania, niezbędne do obliczeń na maszynie.

Sily rozłożone mogą znów być wyrażone poprzez składowe  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  lub też w postaci funkcji potencjału. Nic też dziwnego, że jeśli siły masowe są stałe, składowe wypadkowej sił masowych rozkładają się [por. (4-4)] na cztery równe części.

### 6.3. Elementy o ośmiu węzłach

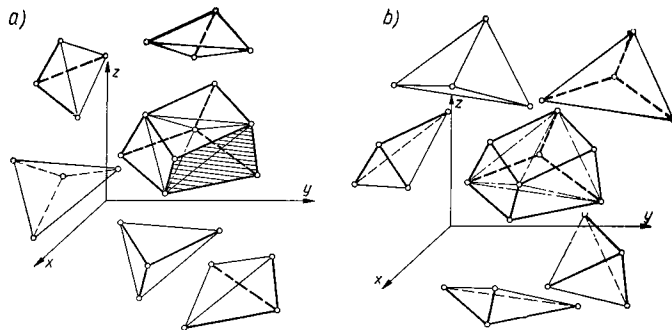
Podział przestrzeni na pojedyncze czworościany powoduje czasem zaciemnienie obrazu siatki i może łatwo prowadzić do omyłek przy numerowaniu węzłów itd. Bardzo dogodny podział to podział przestrzeni na bloki w postaci podobnej do cegieł. Rozcinając ciało trójwymiarowe przekrojami równoległymi można je narysować i dzieląc każdy z nich na czworościany można uzyskać systematyczną metodę definiowania elementów, jak na rys. 6.2.



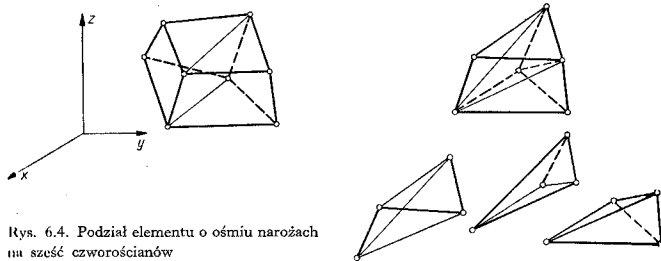
Rys. 6.2. Podział obiektu trójwymiarowego na elementy sześciennie (cegiełki)

Takie bloki mogą być składane automatycznie z poszczególnych czworościanów; proces zaś tworzenia czworościanów prowadzi do prostego programu logicznego. Na przykład na rys. 6.3 pokazano jak taki typowy blok można podzielić na 5 czworościanów dwoma i tylko dwoma różnymi sposobami. Istotnie, przy uśrednieniu tych dwu sposobów podziału można uzyskać niewielkie polepszenie do-

<sup>1)</sup> Składowe od naprężeń początkowych otrzymuje się w podobny sposób.



Rys. 6.3. Złożony element o ośmiu węzłach: a) jego dalszy podział na pięć czworościanów, b) odmienny podział na czworościany



Rys. 6.4. Podział elementu o ośmiu narożach na sześć czworościanów

kładności. Naprężenia średnie z poszczególnych elementów można przyjąć jako dostatecznie dobre dla całego bloku.

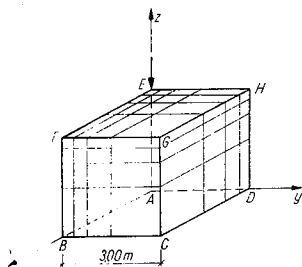
Na rysunku 6.4 pokazano inny alternatywny podział na sześć elementów czworościennych. Oczywiście, w tym przypadku liczba możliwości jest bardzo duża.

W dalszych rozdziałach będzie wykazane, jak podział na takie podstawowe bloki można bardzo skutecznie wykorzystać przy złożonych typach elementów.

### 6.4. Przykłady i uwagi końcowe

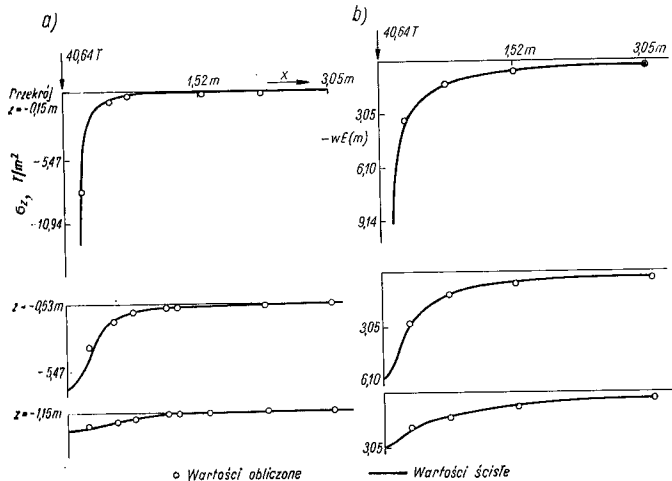
Prostym, dobrze ilustrującym zagadnienie przykładem zastosowania podziału na elementy czworościenne jest przykład pokazany na rys. 6.5 i 6.6. Jest to dobrze znane zadanie *Boussinesqa* dla półprzestrzeni sprężystej obciążonej pionową siłą skupioną. Półprzestrzeń zastąpiono obszarem sześciennym. Wykorzystując sy-

metrię zredukowano wymiary zadania; warunki brzegowe zadano jak na rys. 6.5 [11]. Jako zerowe przyjęto przemieszczenia w skończonej odległości od siły. Z tego powodu wprowadzono poprawki przed wykonaniem pokazanych na rys. 6.6 wykresów. Porównanie zarówno naprężeń jak i przemieszczeń wskazuje na dobre przybliżenie, chociaż podział był dość rzadki. Jednakże nawet ten prosty

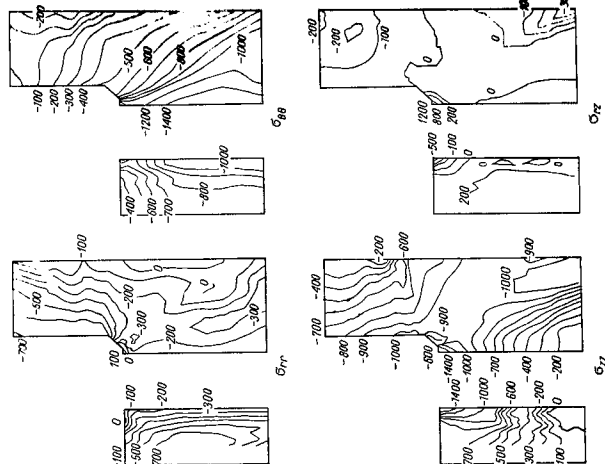


Warunki brzegowe  
 $u = v = w = 0$  na ABCD  
 $u = 0$  na AEHD } Symetria  
 $v = 0$  na AEFB }  
 pozostałe brzozy swobodne

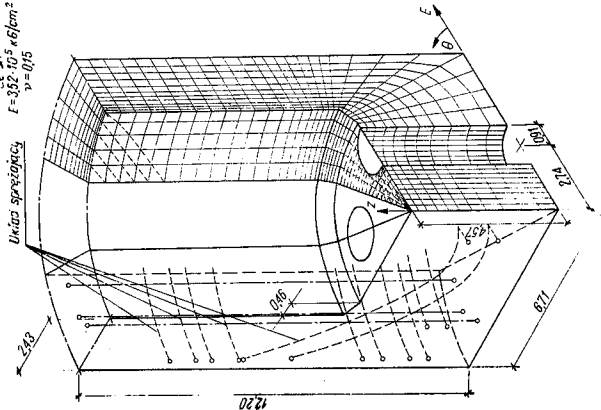
Rys. 6.5. Zadanie Boussinesqa jako przykład zastosowania trójwymiarowego określenia naprężeń



Rys. 6.6. Zadanie Boussinesqa: a) naprężenie pionowe  $\sigma_x$ , b) przemieszczenie pionowe  $w$



$E = 352 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$   
 $\nu = 0.15$



Rys. 6.7. Wycinek zbiornika ciśnieniowego reaktora obliczonego przy zastosowaniu prostych czworokątnych elementów [5]; geometria i niektóre wyniki

problem wymagał rozwiązania aż 375 równań. Bardziej złożone zagadnienia rozwiązane za pomocą prostych czworościanów podane są w pracach [5] i [11]. Na rys. 6.7, wykonanym wg pierwszej z tych prac, przedstawiono obliczenie grubościennego zbiornika ciśnieniowego. Przy tym obliczeniu uwzględniono blisko 10 000 stopni swobody. W rozdziale 9 będzie pokazane jak w podobnym zadaniu można stosując złożone elementy wykonać dostatecznie dokładne obliczenia przy znacznie mniejszej liczbie stopni swobody.

#### Cytowane publikacje

- [1] R. H. Gallagher, J. Padlog, P. P. Bijlaard: Stress analysis of heated complex shapes. — A. R. S. Journal, s. 700-7, 1962.
- [2] R. J. Melosh: Structural analysis of solids, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., S.T.4, s. 205-23, sierpień 1963.
- [3] J. H. Argyris: Matrix analysis of three-dimensional elastic media-small and large displacements, J. A.I.A.A. nr 3, s. 45-51, styczeń 1965.
- [4] J. H. Argyris: Three-dimensional anisotropic and inhomogeneous media-matrix analysis for small and large displacements, — Ingenieur Archiv., nr 34, s. 33-55, 1965.
- [5] Y. R. Rashid and W. Rothenhauser: Pressure vessel analysis by finite element techniques. Proc. Conf. on Prestressed Concrete Pressure Vessels, Inst. Civ. Eng., 1968.
- [6] J. H. Argyris: Continua and Discontinua, Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, październik 1965.
- [7] B. M. Irons: Numerical integration applied to finite element methods, Conf. on Use of digital computers in Structural Engineering, Univ. of Newcastle, lipiec 1966.
- [8] J. Bratoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Three dimensional analysis of arch dams and their foundations, Proc. Symp. Arch Dams, Inst. Civ. Eng., 1968.
- [9] J. H. Argyris, J. C. Redshaw: Three dimensional analysis of two arch dams by a finite element method, Proc. Symp. Arch Dams, Inst. Civ. Eng., 1968.
- [10] S. Field: Three dimensional theory of elastics, Proc. Conf. Fin. Element methods in Stress Analysis, ed. I. Høland and K. Bell, Techn. Univ. of Norway, 1969.
- [11] J. Oliveira Pedro: Thesis 1967, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon.

## 7. Funkcje kształtu elementów – pewne uogólnienia

### 7.1. Wstęp

W trzech poprzednich rozdziałach przedstawiono jak można formułować i rozwiązywać niektóre problemy sprężystości przy użyciu elementów o najprostszych kształtach. Aczkolwiek rachunek szczegółowy opierał się na funkcjach kształtu, odniesionych do trójkątów i czworościanów, jest oczywiste, że równie dobrze można stosować elementy o innych kształtach. Istotnie, gdy tylko zostanie określony kształt elementu i odpowiadająca mu funkcja, dalsze operacje są dokonywane według standardowego, dokładnie określonego schematu i można je powierzyć rachmistrzowi, nawet nie obeznanemu z merytorycznymi aspektami zagadnienia. Dalej będzie pokazane, że istotnie możliwe jest układanie programu na maszynie dla szerokiego wachlarza problemów, jeśli tylko zdefiniowana zostanie funkcja kształtu. Wybór jednak tej funkcji jest zadaniem, do którego niezbędna jest inwencja twórcza. W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną pewne zasady tworzenia niektórych rodzin jedno-, dwu- i trójwymiarowych elementów.

W zagadnieniach sprężystości przedstawionych w rozdziałach 4, 5 i 6 przemieszczenie było wektorem o dwu lub trzech składowych, a funkcje kształtu zapisane były w postaci macierzowej. Były one jednak wyprowadzane dla każdej składowej oddzielnie i w istocie wyrażenie macierzowe powstawało poprzez mnożenie funkcji skalarnej przez macierz jednostkową, np. równania (4-7), (5-3) i (6-7). Skupimy więc tutaj uwagę na skalarnych funkcjach kształtu, opuszczając znaczek prim i zapisując je po prostu jako  $N_i$ .

Funkcje kształtu stosowane w sformułowaniu przemieszczeniowym problemów sprężystości były takie, że spełniały kryteria podane w rozdz. 2 i 3:

a) pomiędzy elementami należy zachować tylko ciągłość przemieszczeń liniowych (tzn. nie wymaga się ciągłości pochodnych),

b) możliwa jest dowolna postać liniowa funkcji dobrana tak, aby było spełnione kryterium stałego odkształcenia (stałej pierwszej pochodnej).

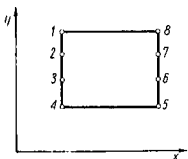
Funkcje kształtu opisane w niniejszym rozdziale będą spełniać tylko te dwa kryteria. Będą więc one przydatne do rozwiązywania zarówno tych zagadnień, które były omówione w poprzednich rozdziałach, jak i innych, dla których wy-

starczą tylko te kryteria. Na przykład wszystkie podane w rozdz. 15 można rozwiązać za pomocą takich funkcji. Istotnie, są one przydatne do rozwiązywania wszelkich zagadnień, w których funkcjonal  $\chi$  (por. rozdz. 3) jest określony tylko przez pierwsze pochodne.

Omawiane rodziny elementów będą stopniowo mieć coraz większą liczbę stopni swobody. Powstaje kwestia, do jakich granic zwiększenie liczby tych stopni ma sens ekonomiczny. Odpowiedź nie jest łatwa, chociaż jako zasadę ogólną można przyjąć, że przy wzroście rzędu elementu całkowita liczba niewiadomych może być zmniejszona przy utrzymaniu żądanej dokładności. Jednak ze względu na ekonomiczność wymagana jest redukcja całkowitej liczby danych wejściowych i operacji, a to nie następuje automatycznie wraz z redukcją całkowitej liczby niewiadomych, gdyż — chociaż czas rozwiązania może być zredukowany — wzrasta czas niezbędny do opisu elementu.

## 7.2. Elementy dwuwymiarowe

**7.2.1. Elementy prostokątne — rozważania wstępne.** Konceptyjnie najprostszą postacią elementu jest prostokąt o bokach równoległych do osi  $x$  i  $y$  (szczególnie gdy Czytelnik przyzwyczajony jest do myślenia w kartezjańskim układzie współrzędnych). Rozpatrzmy np. prostokąt pokazany na rys. 7.1, o punktach węzłowych od 1 do 8, w których wartości nieznannej funkcji  $\phi$  tworzą zespół parametrów elementu. Jak można określić funkcję kształtu właściwą dla tego elementu?



Rys. 7.1. Element prostokątny

Załóżmy najpierw, że funkcja ta wyrażona jest w postaci wielomianu od  $x$  i  $y$ . Aby zapewnić ciągłość funkcji między elementami, wzdłuż górnej i dolnej krawędzi elementu zmienność funkcji musi być liniowa. Istnieją dwa punkty między elementami leżącymi powyżej lub poniżej, w których wartość funkcji jest ta sama, a ponieważ dwa punkty wyznaczają jednoznacznie funkcję liniową, jej identyczność dla elementów połączonych wzdłuż tych krawędzi jest zapewniona. Z tego faktu czyniliśmy już użytek przy określaniu liniowych wyrażeń dla trójkąta.

Podobnie, jeśli założymy zmienność sześcienną wzdłuż krawędzi pionowych, ciągłość będzie zapewniona, jako że cztery wartości definiują jednoznacznie funkcję sześcienną. Warunki więc dla spełnienia pierwszego kryterium mamy gotowe.

Aby zapewnić ciągłość funkcji pomiędzy elementami, wzdłuż górnej i dolnej krawędzi elementu, zmienność funkcji musi być liniowa. Istnieją dwa punkty między elementami leżącymi powyżej lub poniżej, w których wartość funkcji jest ta sama, a ponieważ dwa punkty wyznaczają jednoznacznie funkcję liniową, jej identyczność dla elementów połączonych wzdłuż tych krawędzi jest zapewniona. Z tego faktu czyniliśmy już użytek przy określaniu liniowych wyrażeń dla trójkąta.

Ostatecznie więc, ponieważ tylko osiem punktów ma jednoznacznie określić naszą funkcję, wystarczy tylko osiem współczynników stałych; możemy zatem napisać

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 y^3 + \alpha_8 xy^3 \quad (7-1)$$

Doboru wyrazów wielomianu można na ogół dokonać w sposób jednoznaczny poprzez pozostawienie wyrazów o najniższych potęgach, aczkolwiek w rozważanym przypadku nie jest to konieczne<sup>1)</sup>. Czytelnik łatwo sprawdzi, że wszystkie wymagania są przy takim wyborze spełnione.

Podstawiając współrzędne poszczególnych węzłów otrzymamy jednoznaczny układ równań do rozwiązania. Można to zapisać dokładnie w taki sam sposób, jak to podano dla trójkąta (por. równanie 4-4)

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & x_1, & y_1, & x_1 y_1, & y_1^2, & x_1 y_1^2, & y_1^3, & x_1 y_1^3 \\ \dots\dots\dots & \text{itd.} & \dots\dots\dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (7-2)$$

albo prościej jako

$$\{\phi\}^e = [C]\{\alpha\}, \quad (7-3)$$

Formalnie mamy więc

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{\phi\}^e, \quad (7-4)$$

a więc równanie (7-1) możemy zapisać jako

$$\phi = [P]\{\alpha\} = [P][C]^{-1}\{\phi\}^e, \quad (7-5)$$

gdzie

$$[P] = [1, x, y, xy, y^2, xy^2, y^3, xy^3]. \quad (7-6)$$

Tak więc funkcje kształtu dla elementu, określone przez

$$\phi = [N]\{\phi\}^e = [N_1, N_2, \dots, N_8]\{\phi\}^e, \quad (7-7)$$

można znaleźć z wyrażenia

$$[N] = [P][C]^{-1}. \quad (7-8)$$

Proces ten, często stosowany w praktyce jako wymagający najmniej pomysło-wości, ma jednak dostrzegalne niedogodności. Czasem np. może nie istnieć [2] odwrotność macierzy [C]; ponadto zaś zawsze występują trudności rachunkowe przy znajdowaniu odwrotności macierzy o wyrazach ogólnych, nadającej się do kulej geometrii elementu. Z tego powodu warto rozpatrzyć, w jaki sposób można znaleźć funkcje kształtu  $N_i(x, y)$  bezpośrednio. Zanim to pokażemy, wymieńmy kilka ogólnych własności tych funkcji.

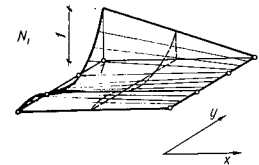
<sup>1)</sup> Pozostawienie wyrazów o wyższych potęgach z pominięciem choć jednego z niższych z reguły prowadzi do gorszej zbieżności, chociaż zbieżność ta nadal pozostaje [1].

Rozpatrzenie związku, definiującego (7-7), ujawnia od razu pewne ważne jego cechy. Po pierwsze, ponieważ wyrażenie to ważne jest dla dowolnych  $\{\phi\}$ , jest zatem  $N_i = 1$  w węźle  $i$  oraz  $N_i = 0$  we wszystkich pozostałych węzłach. Po drugie, zasadnicza postać zmienności wzdłuż brzegów dla zapewnienia ciągłości (np. liniowo w kierunku  $x$  i sześciennie w kierunku  $y$  w rozważanym przykładzie) musi być zachowana. Typowa postać funkcji kształtu dla rozważanych elementów jest zilustrowana izometrycznie na rys. 7.2 przez dwa typowe węzły. Jasne, że można to zapisać bezpośrednio jako iloczyn odpowiedniej funkcji liniowej względem  $x$  przez sześcienną względem  $y$ . Łatwe rozwiązanie tego przykładu nie jest zawsze oczywiste, lecz — przy odpowiedniej prostocie wyrażen — zawsze pożądane jest bezpośrednie wyprowadzenie funkcji kształtu.

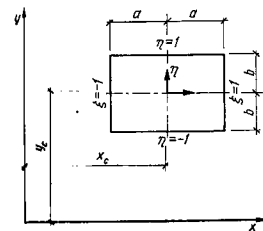
W dalszych rozważaniach celowe będzie wprowadzenie współrzędnych znormalizowanych. Współrzędne takie pokazano na rys. 7.3; są one tak dobrane, aby boki prostokąta miały wartości  $\pm 1$

$$\begin{aligned} \xi &= (x-x_c)/a, & d\xi &= dx/a; \\ \eta &= (y-y_c)/b, & d\eta &= dy/b. \end{aligned} \quad (7-9)$$

Jeżeli funkcje kształtu podane są we współrzędnych znormalizowanych, to zamiana na współrzędne zwyczajne albo transformacja różnych wyrażen, np. przy wyprowadzeniu sztywności, jest bardzo prosta.

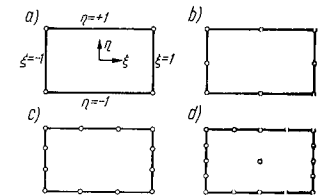


Rys. 7.2. Funkcje kształtu dla elementu z rys. 7.1



Rys. 7.3. Współrzędne znormalizowane dla prostokąta

7.2.2. Elementy prostokątne — rodzina serendipowska. Najdogodniej zwykle uzależniać funkcję od wartości w węzłach umieszczonych na brzegach elementu. Rozważmy np. pierwsze trzy elementy na rys. 7.4. W każdym z nich stopniowo rosnąca i jednakowa liczba węzłów umieszczona jest na ich brzegach. Zmienność funkcji w narożach dla zapewnienia ciągłości jest liniowa, paraboliczna lub sześcienna, w zależności od liczby węzłów.



Rys. 7.4. Prostokąty o węzłach na brzegach; rodzina serendipowska: a) liniowa, b) kwadratowa, c) sześcienna, d) czwartego stopnia

Aby uzyskać funkcję kształtu dla pierwszego elementu, zauważmy, że iloczyn

$$\frac{1}{4}(\xi+1)(\eta+1) \quad (7-10)$$

daje jedynkę w prawym górnym rogu, gdzie  $\xi = \eta = 1$  i zero we wszystkich pozostałych. Ponadto zachodzi liniowa zmienność funkcji kształtu na wszystkich bokach, ciągłość zatem jest zapewniona.

Wprowadzając nowe zmienne

$$\xi_0 = \xi\xi_i, \quad \eta_0 = \eta\eta_i \quad (7-11)$$

wyrażeniem

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0) \quad (7-12)$$

można zapisać wszystkie funkcje kształtu w jednolity sposób. Ponieważ liniowa kombinacja takich funkcji kształtu pozwala na dowolną zmienność liniową, tym samym drugie kryterium zbieżności jest spełnione (por. p. 7.1 b).

Wszystkie niezbędne kryteria dla kwadratowej i sześcienniej postaci spełniają następujące funkcje:

*Kwadratowa zmienność wzdłuż boków elementu*

Węzły narożne

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1). \quad (7-13)$$

Węzły pośrednie

$$\xi_i = 0, \quad N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0),$$

$$\eta_i = 0, \quad N_i = \frac{1}{2}(1+\xi_0)(1-\eta^2).$$



$$N_i = \frac{1}{32} (1 - \xi_0) (1 - \eta_0) [10 + 9(\xi_0^2 + \eta_0^2)]. \quad (7-14)$$

Węzły pośrednie

$$\xi_i = \pm 1 \quad N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi_0) (1 - \eta^2) (1 + 9\eta_0),$$

$$\eta_i = \pm \frac{1}{3}$$

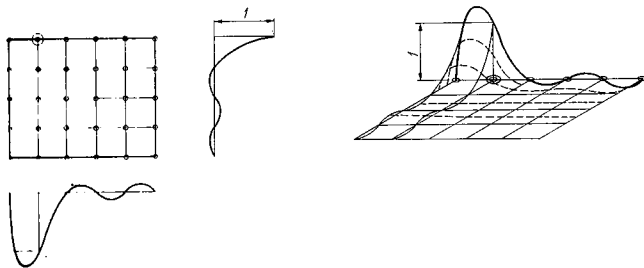
przy czym pozostałe węzły pośrednie opisywane są przez zamianę zmiennych.

W następnym, „kwadratkowym” elemencie tej rodziny wprowadzono węzeł centralny, tak że wszystkie wyrazy otrzymuje się z pełnego wielomianu czwartego stopnia. Z tytułu wprowadzenia węzła centralnego dochodzi do funkcji kształtu wyrażenie  $(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ , które równe jest zeru we wszystkich krawędziach.

Powyższe funkcje wyprowadzono po dokładnym zbadaniu i próbach; wprowadzenie zmienności wg wyższych potęg jest dość trudne i wymaga pomysłowości. Z tego powodu nazywa się tę rodzinę funkcji „serendipowską” od nazwiska księcia *Serendipa*, znanego ze swych dociekań nad grami hazardowymi (Horace Walpole, 1754).

W wielu praktycznych zadaniach pożądane jest obmyślenie elementów ze zmienną liczbą stopni swobody w kierunkach  $\xi$  i  $\eta$ . Mogą one być np. stosowane tam, gdzie (jak np. w belce) zmienia naprężen w pewnych kierunkach jest wymuszona, a w innych może być dowolna. Niektóre z takich funkcji są omawiane np. w pracy [2], lecz Czytelnik ma okazję wykazać tu własną pomysłowość.

**7.2.3. Elementy prostokątne — zastosowanie wielomianów Lagrange’a** [3], [6], [7]. Łatwa i systematyczna metoda tworzenia funkcji kształtu dowolnego stopnia polega na zwykłym mnożeniu odpowiednich wielomianów dwu zmiennych. Rozpatrzmy element pokazany na rys. 7.5, w którym węzły (zewewnętrzne i wewnętrzne) są rozmieszczone regularnie. Należy określić funkcję kształtu



Rys. 7.5. Typowa funkcja kształtu dla elementu lagranżowskiego

dla punktu oznaczonego większym kołem. Oczywiście iloczyn wielomianu 5 stopnia względem  $\xi$ , mający wartość 1 w punktach drugiej kolumny węzłów i zero w pozostałych, przez wielomian 4 stopnia względem  $\eta$ , mający wartość 1 dla współrzędnej odpowiadającej dolnemu szeregowi węzłów i zero wszędzie indziej, spełnia wszystkie wymagania ciągłości między elementami. Wielomiany względem jednej zmiennej, mające tę własność, zwane są wielomianami *Lagrange’a* i mogą być zapisane w postaci ogólnej jako

$$L_i^j = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{n-1})(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)}, \quad (7-15)$$

stąd, jeśli oznaczymy węzeł przez numery jego kolumny i wiersza

$$N_{ij} = L_i^j(\xi)L_j^m(\eta), \quad (7-16)$$

gdzie  $n$  i  $m$  oznaczają liczbę podziału w każdym kierunku.

Rys. 7.6. Trzy elementy rodziny lagranżowskiej: a) liniowy, b) kwadratowy, c) sześcienny

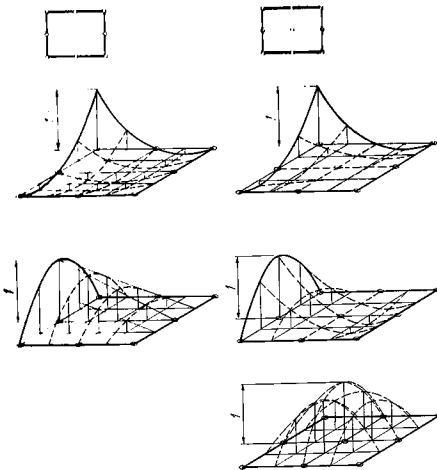


Rysunek 7.6 pokazuje niektóre elementy z tej rodziny. Chociaż łatwo ją tworzyć, pożyteczność tej rodziny funkcji jest ograniczona nie tylko wskutek obecności dużej liczby węzłów wewnętrznych, lecz również wskutek złej zdolności aproksymowania krzywoliniowych wyższych stopni. Trzeba też zaznaczyć, że wyrażeniu na funkcje kształtu mogą zawierać wyrazy wysokiego stopnia, równocześnie zaś może im brakować wyrazów stopni niższych.

**7.2.4. Węzły wewnętrzne i zmienne „bezwęzłowe”.** Warto odnotować, że zarówno serendipowskie jak i lagranżowskie elementy, pokazane na rys. 7.4 i 7.6, określane są za pomocą takich samych liniowych funkcji kształtu. Funkcje te różnią się przy istnieniu węzła wewnętrznego (mają postać kwadratową). Funkcje kształtu dla obu tych typów w postaci kwadratowej pokazano na rys. 7.7.

Na brzegach elementu funkcja jest określona jednoznacznie tylko przez węzły brzegowe, a zatem (choć wewnątrz obszaru funkcje te mają różne kształty) na brzegu obydwie (liniowa i kwadratowa) są identyczne. Dodatkowy stopień swobody w elementach lagranżowskich jest reprezentowany przez dodatkowe iloczyny, które na obwodzie równe są zeru. Parametrem w tych iloczynach jest w istocie wartość  $\phi$  w środkowym węźle.

Oczywiście można uzyskać dokładnie tę samą liczbę stopni swobody w typie serendipowskim elementu dodając uzupełniającą funkcję kształtu, której wartość na wszystkich brzegach elementu równa jest zeru i pomnożoną przez pewien parametr  $\phi^*$  związany z elementem. Wszystkie postacie możliwe do uzyskania w elemencie lagranżowskim można uzyskać i tutaj; teraz jednak mnożnik nie zależy od żadnej wartości węzłowej  $\phi$ ; można go nazwać zmienną „bezwęzłową”, przyporządkowaną elementowi.



Rys. 7.7. Funkcja kształtu elementów typu kwadratowego rodziny merendipowskiej i lagranżowskiej

Minimalizacja funkcjonału ze względu na tę zmienną może być dokonana do-  
kładnie w taki sam sposób, jak gdyby to była zmienna powiązana z węzłem, ale  
fizyczna interpretacja takich wielkości, jak siły węzłowe itd., nie jest teraz oczywi-  
sta. W miarę potrzeby można każdemu elementowi przyporządkować szereg  
takich zmiennych bezwęzłowych. Zazwyczaj nie odnosi się z tego wielkich ko-  
rzyści, ponieważ najsilniej na postać funkcji wpływają ograniczenia na brzegu.

W omawianych dotąd wyrażeniach stosowane były wyłącznie wielomiany. Ma  
to pewne zalety, m.in. fakt, że zawierają one wyrazy liniowe, niezbędne dla uzy-  
skania stałych pierwszych pochodnych. Jeśli jednak rozpatrujemy wyższe, dodat-  
kowe stopnie swobody, konieczność ta odpada. Na przykład wyrażenie

$$\cos \frac{\pi \xi}{2} \cdot \cos \frac{\pi \eta}{2} \quad (7-17)$$

można również zastosować do omawianego wyżej przypadku (funkcji bezwęzłowej), daje ono bowiem zero na wszystkich brzegach.

**7.2.5. Eliminacja zmiennych wewnętrznych przed ułożeniem równań —  
podpodziały.** Węzły wewnętrzne i zmienne pozawęzłowe prowadzą do opisu  
własności elementu w zwykły sposób (rozd. 2 i 3)

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} = [k^*] \{\phi\}^e + \{F^*\}^e \quad (7-18)$$

$\{\phi\}^e$  można podzielić na części:  $\{\bar{\phi}\}^e$  — wspólną z sąsiadującymi elementami  
oraz  $\{\hat{\phi}\}^e$  — przynależną tylko danemu elementowi. Dlatego można napisać

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\bar{\phi}\}^e} = \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\hat{\phi}\}^e} = 0$$

i wyeliminować tę część z dalszych rozważań. Pisząc powyższe w postaci rozwi-  
niętej mamy

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\bar{\phi}\}^e} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\hat{\phi}\}^e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\bar{\phi}\}^e} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{k}]^e, & [\hat{k}]^e \\ [\bar{k}]^{*e}, & [\bar{k}]^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\phi}\}^e \\ \{\hat{\phi}\}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{\bar{F}\}^e \\ \{\hat{F}\}^e \end{Bmatrix} \quad (7-19)$$

Z drugiego układu równań zapisanych powyżej można napisać

$$\{\bar{\phi}\}^e = -[\bar{k}]^{e-1} ([\hat{k}]^{*e} \{\hat{\phi}\}^e + \{\bar{F}\}^e), \quad (7-20)$$

co po podstawieniu daje

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\hat{\phi}\}^e} = [k^{**}]^e \{\hat{\phi}\}^e + \{F^{**}\}^e, \quad (7-21)$$

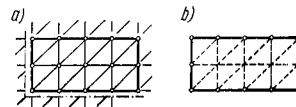
gdzie:

$$\begin{aligned} [k^{**}]^e &= [\bar{k}]^e - [\bar{k}]^e [\hat{k}]^e [\bar{k}]^{e-1} [\hat{k}]^{*e}, \\ \{F^{**}\}^e &= \{\bar{F}\}^e - [\bar{k}]^e [\bar{k}]^{e-1} \{\bar{F}\}^e. \end{aligned} \quad (7-22)$$

Następnie budujemy układ równań dla całego obszaru, przy czym rozpatrujemy  
tylko zmienne związane z brzegami elementów. Otrzymujemy istotną oszczędność  
na liczbie równań, w zamian za niewielkie utrudnienie, związane z opisem elemen-  
tów.

Byłoby może pożądane dać interpretację inżynierską tej eliminacji. To co zro-  
biliśmy jest przecież niczym innym, jak wydzieleniem części budowli z jej otoczenia  
i znalezieniem jej rozwiązania osobno dla każdego przemieszczenia zadanego na  
brzegach tej części.  $[k^{**}]^e$  jest tutaj ogólną sztywnością wydzielonej części budowli,  
 $\{F^{**}\}^e$  zaś — odpowiednim zbiorem sił węzłowych.

Jeżeli podział na trójkąty (rys. 7.8) zinterpretować jako zbiór przegubowo po-  
łączonych prętów, Czytelnik rozpozna natychmiast dobrze znany pomysł podziału  
na „sekcje”, często stosowany w mechanice budowli. Taka sekcja jest w istocie  
pewnym złożonym z części elementem, z którego usunięto wewnętrzne stopnie  
swobody.



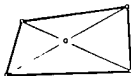
Rys. 7.8. Podpodział elementu złożonego  
(opis w tekście)

Bezpośrednio z tego wynika nowa możliwość obmyślenia bardziej rozbudowanych i, przypuszczalnie, bardziej dokładnych elementów.

Zinterpretujmy rys. 7.8a jako continuum, podzielone na elementy trójkątne. Zbieramy część tych elementów tworząc jeden złożony element z szeregiem węzłów na granicy (rys. 7.8b).

Jedyna różnica między takim elementem a elementami omawianymi poprzednio jest taka, że niewiadoma  $\phi$  nie jest teraz aproksymowana przez szereg gładkich funkcji kształtu, lecz przez szereg odcinkowych przybliżeń. Spowoduje to prawdopodobnie nieco gorszą aproksymację, może jednak stanowić dużą zaletę ekonomiczną przez zaoszczędzenie całkowitego czasu obliczeń takiego układu.

Podział na podukłady jest ważnym środkiem przy badaniu złożonych zagadnień, szczególnie zaś gdy występuje powtarzalność skomplikowanych składników.

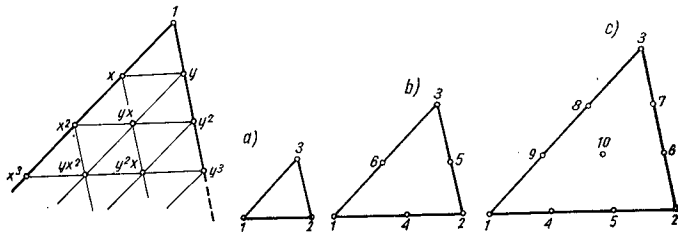


Rys. 7.9. Czworokąt zbudowany z czterech trójkątów

Przy rozwiązywaniu nawet stosunkowo niewielkich problemów najbardziej przydatne stosowanie elementów trójkątnych może być jeszcze ulepszone poprzez proste łączenie tych trójkątów (czy też tetraedrów). Na przykład czworoboki oparte na układzie czterech trójkątów, z których wyeliminowano węzeł środkowy, doprowadziły do bardziej ekonomicznego podziału niż podział na zwykłe trójkąty (rys. 7.9). Te i podobne podzbiory, oparte na trójkątach, są szczegółowo omawiane w pracy Wilsona [8].

**7.2.6. Rodzina elementów trójkątnych.** Zalety trójkątnej dowolnej siatki przy aproksymacji obszaru o dowolnym kształcie brzegów były już przedstawione w poprzednich rozdziałach. Jej oczywista wyższość nad siatką prostokątną nie wymaga dyskusji. Zagadnienie tworzenia bardziej rozbudowanych elementów jest nadal otwarte.

Rozpatrzmy układ trójkątów na siatce (rys. 7.10). Dla każdego elementu trójkątnego można, w zależności od liczby węzłów, dobrać wielomiany gwarantujące

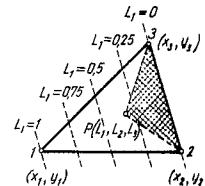


Rys. 7.10. Rodzina elementów trójkątnych: a) liniowa, b) kwadratowa, c) sześcienna

ciągłości przemieszczeń między elementami. Ta okoliczność stawia rodzinę elementów trójkątnych w szczególności uprzywilejowanym położeniu, gdyż odwrotność macierzy  $[C]$  [por. (7-3)] będzie zawsze istniała [2]. Jednakże i teraz najdogodniejsze byłoby bezpośrednie tworzenie funkcji kształtu; jak się okaże, jest to dość łatwe.

Zanim do tego przejdziemy, warto zdefiniować specjalną rodzinę znormalizowanych współrzędnych dla trójkątów.

**Współrzędne powierzchniowe.** Współrzędne kartezjańskie, równoległe do boków prostokąta, są dla tego kształtu elementu najbardziej naturalne, jednak nie jest tak już dla trójkątów.



Rys. 7.11. Współrzędne powierzchniowe

Wygodnym układem współrzędnych  $L_1, L_2, L_3$  dla trójkąta 1, 2, 3 (rys. 7.11) jest układ określony poprzez następującą liniową zależność między tymi współrzędnymi a współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{aligned}x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3, \\y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3, \\1 &= L_1 + L_2 + L_3.\end{aligned}\quad (7-23)$$

Dla każdej siatki  $L_1, L_2, L_3$  (która nie jest wzajemnie niezależna, lecz związana poprzez trzecie równanie) istnieje odpowiednia, jedyna siatka kartezjańska. W punkcie 1 jest  $L_1 = 1, L_2 = L_3 = 0$  itd. Liniowy związek między nowymi a kartezjańskimi współrzędnymi wskazuje, że miejscem geometrycznym dla  $L_1$  są proste równoległe do boku 2-3, dla którego  $L_1 = 0$ .

Łatwo też pokazać, że odmienna definicja współrzędnej  $L_1$  punktu  $P$  może być wyrażona przez stosunek pola zakreśwanego trójkąta do pola całego trójkąta

$$L_1 = \frac{\text{Pole } P, 2, 3}{\text{Pole } 1, 2, 3}, \quad (7-24)$$

Stąd pochodzi nazwa „współrzędne powierzchniowe”.

Rozwiązując (7-23) względem  $x$  i  $y$  otrzymamy

$$\begin{aligned}L_1 &= (a_1 + b_1 x + c_1 y) / 2A, \\L_2 &= (a_2 + b_2 x + c_2 y) / 2A, \\L_3 &= (a_3 + b_3 x + c_3 y) / 2A,\end{aligned}\quad (7-25)$$

gdzie

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{Pole } 1, 2, 3 \quad (7-26)$$

oraz

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

$$b_1 = y_2 - y_3,$$

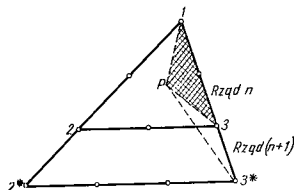
$$c_1 = x_3 - x_2.$$

Warto odnotować identyczność tych wyrażeń z podanymi wyrażeniami (4-5b,c) z rozdz. 4.

Funkcje kształtu. Dla pierwszego elementu zbioru (rys. 7.10a) funkcje kształtu są po prostu współrzędnymi powierzchniowymi. Zatem

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3. \quad (7-27)$$

Jest to oczywiste, gdyż przyjmują one wartość 1 w jednym z węzłów, zero w pozostałych i zmieniają się liniowo.



Rys. 7.12. Rekurencyjna konstrukcja funkcji kształtu dla trójkątów

Aby wyprowadzić funkcje kształtu dla każdego oddzielnego elementu, można zastosować prosty związek rekurencyjny [2]. Rozpatrzmy trójkąt rzędu  $n$ , dla którego dysponujemy funkcjami kształtu; jakie są funkcje kształtu dla trójkąta rzędu  $n+1$ ? Na rys. 7.12 pokazano takie dwa trójkąty o węzłach rozmieszczonych w równych odstępach zgodnie z siatką ogólną. Dla węzła  $i$  mamy znaną funkcję kształtu rzędu  $n$ , określoną we współrzędnych powierzchniowych trójkąta  $1, 2, 3$  w postaci

$$N_i^n(L_1^i, L_2^i, L_3^i). \quad (7-28)$$

Ta funkcja kształtu może być także określona we współrzędnych powierzchniowych większego trójkąta  $1, 2^*, 3^*$ ; będzie ona mieć wartość 1 w węźle  $i$  oraz zero w pozostałych węzłach, z wyjątkiem leżących na boku  $2^*, 2^*$ . Łatwo stwierdzić, że

$$N_i^{n+1} = c L_i^{n+1} N_i^n \quad (7-29)$$

będzie wymaganą funkcją kształtu, gdy przyjmujemy, że  $c$  jest tak dobrane, by dawało wartość 1 w węźle  $i$  oraz wartość zero wzdłuż podstawy większego trójkąta.

Współczynnik skali równy jest

$$c = \frac{n+1}{l}, \quad (7-30)$$

gdzie  $l$  jest numerem „warstwy”, w której leży nowa podstawa w stosunku do starej. Chociaż postępowanie powyższe nie prowadzi bezpośrednio do funkcji kształtu dla punktów na podstawie, to jednak funkcje te można otrzymać przez zwykłe przestawienie wskaźników.

Związek między dwiema siatkami współrzędnych można wyprowadzić w oparciu o rys. 7.12:

$$L_2^n = \frac{\text{Pole } P, 1, 3}{\text{Pole } 1, 2, 3}; \quad L_2^{n+1} = \frac{\text{Pole } P, 1, 3^*}{\text{Pole } 1, 2^*, 3^*},$$

zatem:

$$L_2^n = \frac{\text{Pole } P, 1, 3}{\text{Pole } P, 1, 3^*} \cdot \frac{\text{Pole } 1, 2^*, 3^*}{\text{Pole } 1, 2, 3} \cdot L_2^{n+1} = \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 L_2^{n+1} = \frac{n+1}{n} L_2^{n+1} \quad (7-31a)$$

i podobnie

$$L_3^n = \frac{n+1}{n} L_3^{n+1}, \quad (7-31b)$$

wreszcie, wobec tego że  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ , otrzymujemy

$$L_1^n = \frac{1}{n} [(n+1)L_1^{n+1} - 1]. \quad (7-31c)$$

Czytelnik może łatwo sprawdzić funkcje kształtu podane poniżej dla elementów drugiego i trzeciego rzędu i wyprowadzić je dla dowolnego rzędu wyższego.

Trójkąt drugiego rzędu (rys. 7.10b):

dla węzłów narożnych

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1 \quad \text{itd.} \quad (7-32)$$

dla węzłów na środkach boków

$$N_4 = 4L_1 L_3 \quad \text{itd.},$$

Trójkąt trzeciego rzędu (rys. 7.10c):

dla węzłów narożnych

$$N_1 = \frac{1}{2} (3L_1 - 1) (3L_1 - 2) L_1 \quad \text{itd.}$$

dla węzłów pośrednich na bokach

$$N_4 = \frac{9}{4} L_1 L_2 (3L_1 - 1) \quad \text{itd.} \quad (7-33)$$

i dla węzła w środku trójkąta

$$N_{10} = 27L_1 L_2 L_3$$

Ostatnia funkcja kształtu jest znów funkcją, dającą zero na wszystkich bokach trójkąta i będzie użyta w nieco odmiennym kontekście w kilku dalszych rozdziałach.

Trójkąty drugiego rzędu, wydaje się, po raz pierwszy omówił *Veubeke* [8], a zastosował je do obliczeń zadania płaskiego *Argyris* [10].

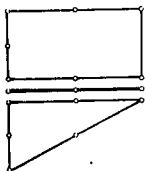
Jeśli elementy macierzy są już wyznaczone, zdarza się często, że zachodzi potrzeba całkowania wielkości oznaczonych we współrzędnych powierzchniowych na polu trójkąta. Korzystnie wówczas jest posługiwać się następującym wyrażeniem

$$\iint_{\Delta} L_1^a L_2^b L_3^c dx dy = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} \cdot 2\Delta$$

### 7.3. Elementy jednowymiarowe

**7.3.1. Elementy liniowe.** Dotychczas w niniejszej książce rozważane były kontinua dwu- lub trójwymiarowe. „Jednowymiarowe” elementy, dla których zwykle istnieją rozwiązania zamknięte, nie były badane pod kątem metody elementów skończonych. W wielu praktycznie ważnych dwu- i trójwymiarowych zagadnieniach elementy jednowymiarowe mogą jednak występować w połączeniu z elementami wielowymiarowymi i stąd potrzeba ich jednolitego traktowania. W przypadku analizy sprężystej takie elementy mogą przedstawiać linie zbrojenia (problemy płaskie i przestrzenne) albo warstwy cienkich włóknistych materiałów w ciałach osiowo-symetrycznych. W odniesieniu do problemów pola typu omawianego w rozdz. 15 są to np. linie drenów w osrodku porowatym o większej przewodności.

Gdy dla takiego elementu został obrany kształt funkcji, np. przemieszczeń, jego własności można określić, pamiętając jednak, że takie wielkości pochodne, jak np. odkształcenie, mogą być rozważane tylko w jednym wymiarze.



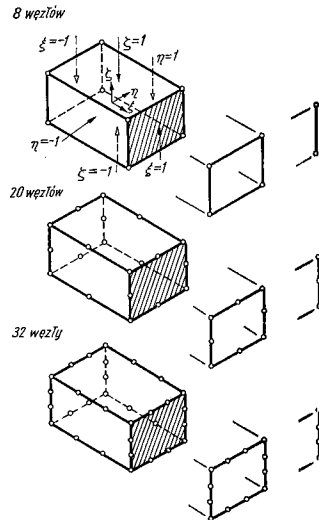
Rys. 7.13. Liniowy element „wstawiony” między dwa dwuwymiarowe elementy

Na rys. 7.13 pokazano taki element warstwowy między dwoma elementami przestrzennymi. Oczywiście dla zapewnienia ciągłości funkcji wystarczająca jest zbieżność zmiennosci jednej zmiennej  $\xi$ . Funkcje kształtu są zatem dane wprost przez wielomian *Lagrange'a* zapisany równaniem (7-15).

### 7.4. Elementy trójwymiarowe

**7.4.1. Prostopadłościany, rodzina serendipowska.** W sposób zupełnie podobny do podanego poprzednio dla elementów dwuwymiarowych można opisać równoważne elementy w przestrzeni trójwymiarowej.

Dla zapewnienia ciągłości między elementami należy teraz nieco zmodyfikować proste reguły podane poprzednio. Należy spełnić na całej powierzchni bocznej warunek, że wartości węzłowe definiują jednoznacznie zmiennosci nieznanymi funkcji. Stosując wielomiany niekompletne można to osiągnąć jedynie drogą prób.



Rys. 7.14. Prostopadłościennie elementy brzegowe (rodzina serendipowska) z odpowiadającymi im elementami powierzchniowymi i liniowymi

Rodzina elementów pokazana na rys. 7.14 jest dokładnie równoważna pokazanej na rys. 7.4. Stosując teraz trzy znormalizowane współrzędne i wykorzystując terminologię ustaloną w p. 7.2.2, otrzymujemy następujące funkcje kształtu.

*Element liniowy* — 8 węzłów

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) \quad (7-35)$$

*Element kwadratowy* — 20 węzłów:  
węzły narożne

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) (\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2), \quad (7-36)$$

węzły na granicznych powierzchniach  $\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0).$$

Element sześcienny:

węzeł narożny

$$N_i = \frac{1}{64} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) [9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19], \quad (7-37)$$

węzeł pośredni  $\xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

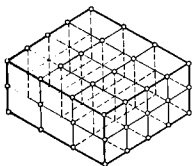
$$N_i = \frac{9}{64} (1 - \xi^2)(1 + 9\xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0).$$

Gdy  $\zeta = 1 = \zeta_0$ , powyższe wyrażenia redukują się do podanych w wzorach (7-12) do (7-14). W istocie takie elementy typu trójwymiarowego można łączyć w układy powierzchniowych lub liniowych elementów odpowiedniego typu (rys. 7.14).

**7.4.2. Prostopadłościany — rodzina lagranżowska.** Funkcje kształtu dla takich elementów (rys. 7.15) można tworzyć przez iloczyn trzech wielomianów *Lagrange'a*. Wykorzystując oznaczenia ze wzoru (7-16) mamy

$$N_{ijl} = L_i^n(\xi)L_j^m(\eta)L_l^k(\zeta). \quad (7-38)$$

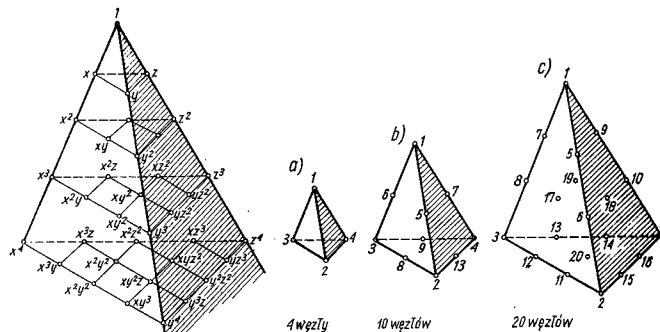
Ten element był proponowany przez *Ergatoudisa* [6] i szerzej zbadany przez *Argyrisa* [7]. Wszystkie uwagi co do węzłów wewnętrznych i ograniczenia stosowania, podane w p. 7.4, znajdują i tutaj zastosowanie.



Rys. 7.15. Prostopadłościan rodziny lagranżowskiej

**7.4.3. Elementy czworokienne.** Rodzina elementów czworokienych (rys. 7.16) oczywiście odznacza się własnościami podobnymi do rodziny elementów trójkątnych.

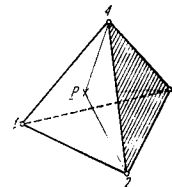
Po pierwsze, i tutaj można zawsze uzyskać kompletne wielomiany w trzech współrzędnych. Po drugie, ponieważ powierzchnie boczne są podzielone w sposób identyczny, jak to miało miejsce w przypadku elementów płaskich, uzyskuje się taki sam stopień wielomianów w dwu współrzędnych w płaszczyźnie bocznej, a tym samym zapewnia się warunek zgodności na granicach elementów.



Rys. 7.16. Rodzina czworokianów: a) liniowa, b) kwadratowa, c) sześcienna

Współrzędne objętościowe. I tutaj wprowadzamy specjalny układ współrzędnych, zdefiniowany zgodnie z rys. 7.17:

$$\begin{aligned} x &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 + L_4x_4, \\ y &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 + L_4y_4, \\ z &= L_1z_1 + L_2z_2 + L_3z_3 + L_4z_4, \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4. \end{aligned} \quad (7-39)$$



Rys. 7.17. Współrzędne objętościowe

Inwersja powyższego prowadzi znowu do wyrażen typu (7-25) i (7-26) ze stałymi, które można określić, jak podano w rozdz. 6 [równanie (6-5)]. Fizyczny sens tych współrzędnych określa się znowu jako stosunek objętości czworokianów, wspartych o punkt wewnętrzny *P*, do objętości całego czworokienego elementu, jak pokazano na rys. 7.17

$$L_i = \frac{\text{Objętość } P, 2, 3, 4}{\text{Objętość } 1, 2, 3, 4} \quad (7-40)$$

Funkcje kształtu. Ponieważ współrzędne objętościowe są liniowo zależne od kartezjańskich i zmieniają się od jedynki w rozważanym węźle do zera na powierzchni przeciwległej (w przypadku elementu liniowego, rys. 7.16), mamy więc po prostu

$$N_1 = L_1, N_2 = L_2 \text{ itd.} \quad (7-41)$$

Wzory na funkcje kształtu dla czworoscianów wyższego rzędu wyprowadzamy dokładnie w taki sam sposób jak dla trójkątów, po ustaleniu odpowiednich związków rekurencyjnych. Pozostawiając to Czytelnikowi jako ćwiczenie, odnotujmy co następuje.

Czworościan drugiego rzędu (rys. 7.16b):  
dla węzłów narożnych

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1 \text{ itd.} \quad (7-42)$$

dla węzłów pośrednich

$$N_s = 4L_1 L_2 \text{ itd.}$$

Czworościan trzeciego rzędu:  
dla węzłów narożnych

$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1 \text{ itd.}$$

dla węzłów na krawędziach

$$N_s = \frac{9}{2}L_1 L_2 (3L_1 - 1) \text{ itd.} \quad (7-43)$$

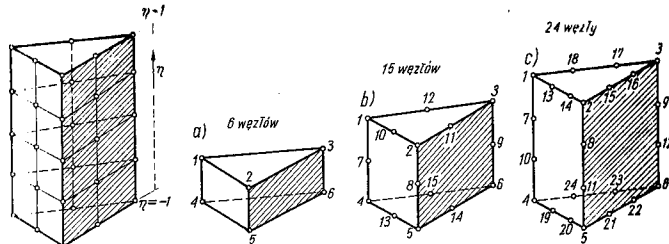
dla węzłów na powierzchniach

$$N_{18} = 27L_1 L_2 L_3 \text{ itd.}$$

Odnotujmy tutaj także użyteczny wzór dla całkowania

$$\iiint_{\Omega} L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dx dy dz = \frac{a! b! c! d!}{(a+b+c+d+3)!} \cdot 6V. \quad (7-44)$$

**7.4.4. Inne proste elementy trójwymiarowe.** Możliwości tworzenia prostych kształtów w trzech wymiarach są większe niż w dwu. Dość użyteczne rodziny elementów można np. uzyskać na bazie trójkątnego prostopadłościanu (rys. 7.18). Tutaj znów można rozróżnić warianty, oparte na rodzinach serendipowskich i lagranżowskich. Pierwszy element obu rodzin jest taki sam, a funkcje kształtu tak proste, że nie warto o nich mówić szerzej.



Rys. 7.18. Elementy graniastosłupowe trójkątne (rodzina serendipowska): a) liniowe, b) kwadratowe, c) sześciennie

Dla elementów drugiego rzędu, pokazanych na rys. 7.18b, funkcje kształtu są:  
węzły narożne

$$L_1 = \xi_1 = 1,$$

$$N_1 = \frac{1}{2}L_1(2L_1 - 1)(1 + \xi) - \frac{1}{2}L_1(1 - \xi^2) \text{ itd.}, \quad (7-45)$$

środkie boków trójkątnych

$$N_s = 2L_1 L_2 (1 + \xi) \text{ itd.}, \quad (7-46)$$

środkie boków prostokątów

$$N_8 = L_1(1 - \xi^2) \text{ itd.},$$

Elementy te były już praktycznie zastosowane jako wypełnienie 20-węzłowych elementów prostopadłościennych.

**7.4.5. Uwagi końcowe.** Wielki wybór elementów i ich kształtów, przedstawiony tutaj Czytelnikowi, nie wyczerpuje zagadnienia. Pozostają jeszcze nieograniczone inne możliwości. Powstaje pytanie, jaka korzyść praktyczna wynika ze stosowania elementów o złożonych kształtach? Poza trójkątnymi i czworobocznymi elementami, wszystkie pozostałe stosuje się w szczególnych przypadkach, gdy badany obszar narzuca w jakimś stopniu kształty elementów w postaci określonych wieloboków (lub wieloboków). Takie jednak przypadki są na tyle rzadkie, że wyprowadzanie specjalnych funkcji kształtu jest w niniejszej książce niecelowe. Jednakże pewne metody uzyskiwania równań kształtu, mające znaczenie praktyczne, będą opisane w następnych rozdziałach.

- [1] P. S. Dunne: Complete polynomial displacement fields for finite element methods, Trans. Roy. Aero. Soc. 72, s. 245, 1968.
- [2] B. M. Irons, J. G. Ergatoudis, O. C. Zienkiewicz: Comment on ref. 1, Trans. Roy. Aero. Soc. 72, s. 709-711, 1968.
- [3] J. G. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Curved, isoparametric, quadrilateral elements for finite element analysis, Int. J. Solids Struct. 7, s. 31-42, 1968.
- [4] O. C. Zienkiewicz et al.: Iso-parametric and associated elements families for two and three dimensional analysis, Chapter 13 in Finite element Methods in stress analysis, Proceedings of a course given at Techn. Univ. of Norway, Trondheim, 1969.
- [5] P. Scott: A quartic, two dimensional isoparametric element, Undergraduate Project, Univ. of Wales, Swansea, 1968.
- [6] J. G. Ergatoudis: Quadrilateral elements in plane analysis: Introduction to solid analysis, M.Sc. thesis, University of Wales, Swansea, 1966.
- [7] J. H. Argyris, K. E. Buck, I. Fried, G. Marecsek i D. W. Scharf: Some new elements for matrix displacement methods, 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech. Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson Base Ohio, październik 1968.
- [8] W. P. Doherty, D. Wilson i R. L. Taylor: Stress Analysis of Axisymmetric Solids utilizing Higher-Order Quadrilateral Finite Elements, Report 69-3, Structural Engineering Laboratory, Univ. of California, Berkeley, styczeń 1969.
- [9] H. Fraeijls de Veubeke: Displacement and equilibrium models in the finite element method, Chapter 9 of Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Hoister, J. Wiley & Son, 1965.
- [10] J. H. Argyris: Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method. J. Roy. Aero. Soc. Tech. Note, 69, s. 711-13, październik 1965.
- [11] J. G. Ergatoudis, B. M. Irons i O. C. Zienkiewicz: Three dimensional analysis of arch dams and their foundations, Symposium on Arch Dams, Inst. Civ. Eng., London, 1968.
- [12] O. C. Zienkiewicz, B. M. Irons, J. Campbell i F. Scott: Three dimensional Stress analysis, Int. Un. Th. Appl. Mech. Symposium on High Speed Computing in Elasticity. Liège, 1970.

## 8. Zakrzywione elementy izoparametryczne i całkowanie numeryczne

### 8.1. Wstęp

W poprzednich rozdziałach pokazaliśmy jak otrzymywać pewne ogólne rodziny elementów skończonych. Stopniowo rosnąca liczba węzłów i wynikająca stąd większa dokładność charakteryzowała każdy nowy element danej rodziny i zakłada się, że liczba takich nowych elementów wystarczających do uzyskania zadowalającego rozwiązania jest ograniczona. Aby zapewnić możliwość dostatecznie małej liczby elementów, która by właściwie reprezentowała pełny zbiór możliwości jakie zdarzają się w praktyce (a nie w rozważaniach akademickich), nie wystarczą proste trójkąty lub prostokąty. W tym rozdziale zajmiemy się więc zagadnieniem przekształcania takich prostych elementów w inne, o bardziej dowolnym kształcie.

Elementy prostsze jedno- dwu- i trójwymiarowe będą przekształcone (odwzorowane na bardziej złożone w sposób pokazany na rys. 8.1 i 8.2. Na rysunkach tych podano jak współrzędne  $\xi, \eta, \zeta$  lub  $L_1, L_2, L_3, L_4$  mogą być przekształcone w inne, krzywoliniowe, odniesione do współrzędnych kartezjańskich.

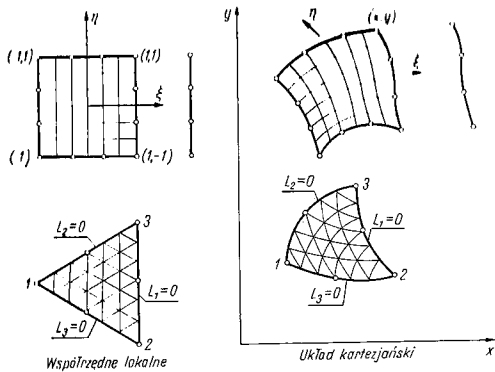
Elementy dwuwymiarowe można odwzorować na inne nie tylko w dwu wymiarach, lecz odwzorowanie może być wykonane w trzech wymiarach jak pokazano na przykładzie płaskiego elementu płytowego (rys. 8.2) przekształconego w trójwymiarowej przestrzeni. Zasadę tę stosuje się ogólnie, zakładając wzajemną odpowiedniość między współrzędnymi kartezjańskimi i krzywoliniowymi, tj. związek mający postać

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \text{ lub } = \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \quad (8-1)$$

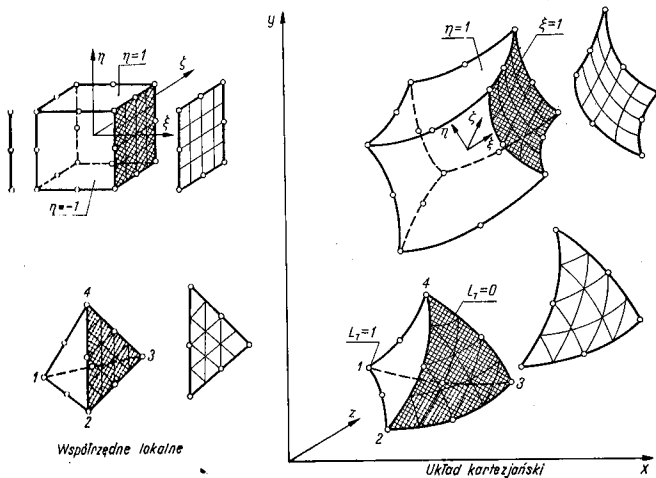
o ile związek taki może być znaleziony.

Gdy takie związki między współrzędnymi są znane, funkcje kształtu można wypisać we współrzędnych lokalnych i przez odpowiednie przekształcenia określić własności elementu. Jednakże zagadnienie spełnienia kryteriów zbieżności przy





Rys. 8.1. Dwuwymiarowe podziały niektórych elementów i ich odwzorowania



Rys. 8.2. Trójwymiarowe odwzorowanie niektórych elementów

tego rodzaju funkcjach kształtu powinno być zbadane dodatkowo. Poniżej pokażemy jak za pomocą odpowiednich rodzajów zamiany współrzędnych można spełnić te kryteria.

## 8.2. Współrzędne krzywoliniowe

**8.2.1. Zastosowanie funkcji kształtu przy ustaleniu transformacji współrzędnych.** Najbardziej wygodny sposób ustalenia transformacji współrzędnych polega na zastosowaniu wyprowadzonych już przez nas funkcji kształtu do przedstawienia nieznanymi funkcji.

Gdy np. napiszemy:

$$x = N_1^i x_1 + N_2^i x_2 + \dots = [N^i] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$y = N_1^j y_1 + N_2^j y_2 + \dots = [N^j] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (8-2)$$

$$z = N_1^k z_1 + N_2^k z_2 + \dots = [N^k] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

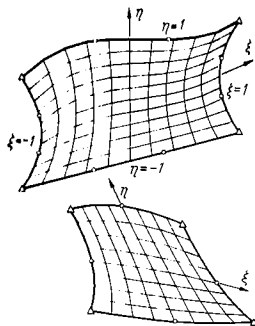
gdzie  $[N^i]$  są funkcje kształtu, wyrażone we współrzędnych lokalnych, wówczas można od razu otrzymać związki w żądanej postaci. Ponadto punkty o współrzędnych  $x_1, y_1, z_1$  itd. będą pokrywały się z odpowiednimi punktami granic elementu (jako że z ogólnej definicji funkcji kształtu wiemy, że mają one wartość 1 w badanym punkcie i 0 w pozostałych).

Każdej siatce współrzędnych lokalnych odpowiadać będzie siatka kartezjańskich współrzędnych globalnych i, na ogół, tylko jedna taka siatka. Zobaczymy jednak, że czasem występuje niejednoznaczność, i to bardzo kłopotliwa.

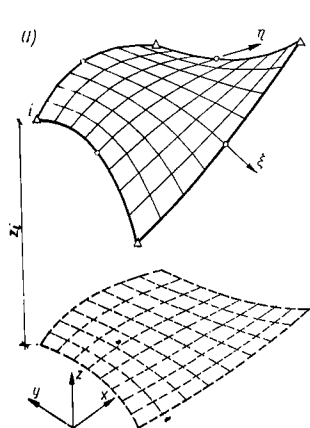
Pomysł użycia takich funkcji kształtu elementu dla wyznaczenia współrzędnych krzywoliniowych w zastosowaniu do elementów skończonych pierwszy, jak się wydaje, podał Taig [1]. Na początku zostały ustalone podstawowe związki między prostokątem a czworobokiem. Irons [2], [3] uogólnił ten pomysł na inne elementy.

Niezależnie, próby poszukiwania praktycznych metod tworzenia zakrzywionych powierzchni dla celów projektowania inżynierskiego, podejmowane przez Coonsa [4], doprowadziły do ustalenia podobnych odwzorowań płaszczyzn i powierzchni i dziś dzięki temu powierzchnie dane i przyjmowane do obliczeń różnią się bardzo nieznacznie.

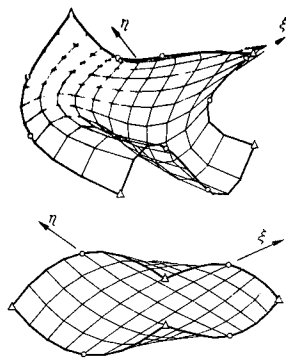
Na rysunku 8.3 pokazano odwzorowanie elementów, opartych na elementach trzeciego i drugiego rzędu z rodziny Serendipa. Widać, że między lokalnymi  $(\xi, \eta)$  a ogólnymi współrzędnymi  $(x, y)$  istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość. Jeśli punkty ustalone są tak, że występuje nagłe zniekształcenie, wów-



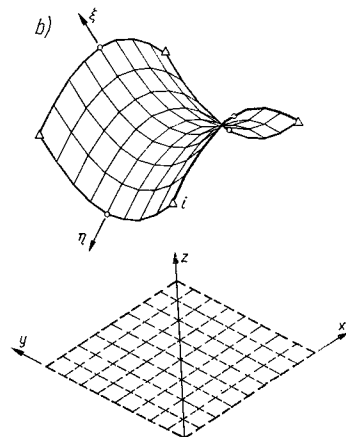
Rys. 8.3. Krzywoliniowe współrzędne elementów sześciennych i kwadratowych; poprawne spaczenie (rysunek automatyczny)



Rys. 8.5. Powierzchnie trójwymiarowe: a), b) współrzędne krzywoliniowe (zniekształcone izometrycznie rysunki automatyczne)



Rys. 8.4. Krzywoliniowe współrzędne elementów sześciennych i kwadratowych; spaczenie nieracjonalne, prowadzące do niejednoznaczności i przekrywania się obszarów (zniekształcony rysunek automatyczny)

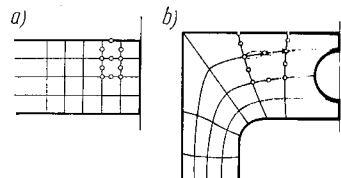


zaszach zachodzi niejednoznaczność, jak to pokazano na rys. 8.4, dla elementów. Tutaj w wewnętrznych punktach zniekształconego elementu ukryte są dwie siatki lokalnych współrzędnych, a ponadto pewne punkty wewnętrzne znajdują się poza elementem. Należy uważać, aby unikać w praktyce tak wielkich zniekształceń.

Na rysunku 8.5 pokazano dwa przykłady dwuwymiarowego  $(\xi, \eta)$  elementu, przekształconego w przestrzeni trójwymiarowej  $(x, y, z)$ .

W niniejszym rozdziale będziemy często odwoływać się do elementu podstawowego w niezniszczalnych, lokalnych współrzędnych jako do elementu „macierzystego”.

**8.2.2. Geometryczna zgodność elementów.** Ponieważ wykazano już, że za pomocą funkcji kształtu można jednoznacznie przekształcić element „macierzysty” w część rzeczywistego obiektu, ważne jest ustalić czy podział tego obiektu na nowe, zakrzywione elementy nie powoduje przerw ciągłości. Możliwość zaistnienia takich przerw pokazano na rys. 8.6.



Rys. 8.6. Zgodność w rzeczywistej przestrzeni przy podziale: a) obszar macierzysty, b) obszar rzeczywisty

**Twierdzenie 1:** *Łatwo wykazać, że jeśli dwa graniczące ze sobą elementy powstały z elementów macierzystych, w których funkcje kształtu spełniają warunki ciągłości, wówczas przekształcone elementy będą również wzajemnie zgodne.*

Twierdzenie to jest oczywiste, ponieważ w takim przypadku jednoznaczność każdej funkcji  $\phi$ , wymagana przez warunek ciągłości, jest po prostu zastąpiona przez jednoznaczność współrzędnych  $x, y$  lub  $z$ . Ponieważ graniczące ze sobą elementy mają te same współrzędne węzłów, ciągłość jest zapewniona.

Węzły nowego, przekształconego układu elementów nie muszą bezwzględnie leżeć w punktach, dla których określone są funkcje kształtu. Można dodać dalsze, dodatkowe siatki węzłów na granicach między elementami.

**8.2.3. Zmienność nieznanymi funkcji wewnątrz przekształconych, zakrzywionych elementów. Wymagania ciągłości.** Po określeniu kształtu elementu poprzez funkcje kształtu  $[N]$  — zanim zaczniemy ustalać własności elementu — należy sprecyzować zmienność niewiadomej  $\phi$ . Najdogodniej można tego dokonać we współrzędnych lokalnych krzywoliniowych za pomocą znanego wyrażenia

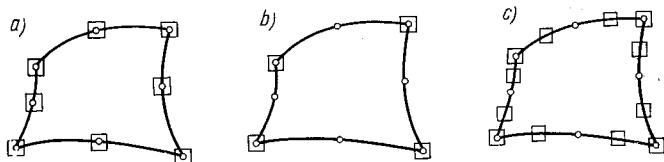
$$\phi = [N]\{\phi\}^e, \quad (8-3)$$

gdzie  $\{\phi\}^e$  jest macierzą wartości węzłowych.

**Twierdzenie 2.** Jeżeli funkcje kształtu  $[N]$  zastosowane we wzorze (8-3) są takie, że ciągłość  $\phi$  jest zapewniona we współrzędnych lokalnych, wówczas wymagania ciągłości będą spełnione także w przekształconych elementach.

Dowód tego twierdzenia wynika z takich samych przesłanek, jak twierdzenia w p. 8.2.2.

Wartości węzłowe nie muszą być powiązane z tymi samymi węzłami, które służą do określenia geometrii elementu. Na przykład na rys. 8.7 punkty zaznaczone kółkami określają geometrię elementu. Możemy jednak, w celu ustalenia zmienności niewiadomej, użyć wartości funkcji określonych w węzłach zaznaczonych kwadratami.



Rys. 8.7. Różne typy elementów: a) izoparametryczne, b) superparametryczne, c) subparametryczne

Na rysunku 8.7a te same punkty określają zarówno geometrię jak i stan odkształcenia elementów skończonych. Jeżeli zatem

$$[N] = [N'] \quad (8-4)$$

tj. jeżeli funkcje kształtu definiujące geometrię i stan odkształcenia są takie same, elementy nazywać będziemy izoparametrycznymi.

Mogliśmy jednak użyć tylko czterech narożnych punktów dla określenia zmienności  $\phi$  (rys. 8.7b). Takie elementy nazwiemy superparametrycznymi z uwagi na to, że zmienność geometrii jest bardziej ogólna niż zmienność przyjętej niewiadomej.

Podobnie jeśli np. wprowadzimy więcej węzłów dla zdefiniowania  $\phi$  niż użyto dla zdefiniowania geometrii, otrzymamy elementy subparametryczne (rys. 8.7c). Takie elementy znajdują zastosowanie w zagadnieniach praktycznych częściej niż izoparametryczne.

**8.2.4. Spełnienie kryterium stałej pochodnej.** Szeroki wybór funkcji umożliwiają oddzielne zdefiniowanie geometrii i zmienności  $\phi$  tak, by spełnione były kryteria ciągłości. Spełnienie jednakże kryteriów „stałego odkształcenia” (rozdz. 2) albo kryterium „stałej pochodnej” (rozdz. 3) nakłada na ten wybór pewne ograniczenia.

Przypomnijmy, że dla zapewnienia zbieżności rozwiązań jest wymagane, aby wewnątrz elementu przy odpowiednich wartościach węzłowych nieznannej  $\phi$  można było uzyskać dowolną, lecz stałą wartość pierwszej pochodnej (jest to ważne dla

funkcjonałów, mających tylko pierwsze pochodne). Aby to uzyskać,

$$\phi = [N]\{\phi\}^e = \sum_1 N_i \phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (8-5)$$

przy

$$[N] = [N(\xi, \eta, \zeta)]$$

musi być ważne dla dowolnych wartości stałych  $\alpha_{1-4}$  i odpowiednich  $\{\phi\}^e$ . Istotnie, w węzłach musimy wówczas mieć

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i, \quad (8-6)$$

zatem równość (8-5) można przepisać jako

$$\begin{aligned} [N]\{\phi\}^e &= \alpha_1 \sum N_i + \alpha_2 \sum N_i x_i + \alpha_3 \sum N_i y_i + \alpha_4 \sum N_i z_i = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \end{aligned} \quad (8-7)$$

Będzie to zawsze spełnione, jeżeli

$$\sum N_i = 1, \quad \sum N_i x_i = x, \quad \sum N_i y_i = y, \quad \sum N_i z_i = z. \quad (8-8)$$

Przekształcenie współrzędnych uwzględnione we wzorze (8-2) daje

$$\sum N'_i x_i = x, \quad \sum N'_i y_i = y, \quad \sum N'_i z_i = z, \quad (8-9)$$

a zatem:

**Twierdzenie 3:** Warunek stałej pochodnej będzie spełniony dla wszystkich izoparametrycznych elementów, jeżeli  $\sum N_i = 1$ .\*)

Można wykazać, że także dla elementów subparametrycznych niezbędne jest spełnienie takich samych warunków i że powyższe twierdzenie ważne jest, jeżeli potrafimy wyrazić  $[N']$  jako liniową kombinację  $[N]$ , tj. jeżeli

$$N'_i = \sum_j c_{ij} N_j. \quad (8-10)$$

## 8.3. Transformacje

**8.3.1. Obliczenie macierzy elementu (transformacje we współrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$ ).** Aby przeprowadzić obliczenie wg metody elementów skończonych, należy wyznaczyć stosowane w nim macierze określające własności elementu, np. sztywność itd. Mają one ogólną postać

$$\int_V [G]^T dV, \quad (8-11)$$

w której wyrażenie  $[G]$  zależy od funkcji  $N$  lub ich pochodnych względem współrzędnych globalnych. Jako przykład rozpatrzmy macierz sztywności

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (8-12)$$

\*) W badaniu naprężeń oznacza to po prostu, że ciało poddane ruchowi jako sztywno nie podlega odkształceniom — jest to mniej ostre wymaganie niż wymaganie stałości pochodnej.

i związany z nią wektor obciążeń

$$\int [N]^T \{p\} dV. \quad (8-13)$$

W szczególnym przypadku problemów sprężystych macierze  $[B]$  są dane explicite poprzez ich składowe [por. ogólną postać równań (4-1a), (5-6), (6-11)]. Wypiszmy pierwszą z nich (4-1a), ważną dla problemów płaskich; ma ona postać

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (8-14)$$

Wskaźnik prim, zastosowany w rozdz. 4, został tutaj opuszczony, gdyż obecnie traktujemy funkcję kształtu jako skalarną i ważną dla wszystkich składowych przemieszczenia. Zauważmy także, że postać powyższa jest najzupełniej ogólna i ważna dla wszelkich dwuwymiarowych elementów zadania płaskiego sprężystości, niezależnie od liczby węzłów (albo zmiennych pozawęzłowych) związanych z elementem. Podobna sytuacja ma miejsce we wszystkich innych problemach omawianych w niniejszej książce.

Aby obliczyć powyższe macierze, zauważmy, że niezbędne są dwie transformacje. Po pierwsze, ponieważ  $N_i$  zdefiniowane są we współrzędnych lokalnych krzywoliniowych, należy obmyśleć sposób wyrażania pochodnych globalnych typu zachodzącego w równaniu (8-14) poprzez pochodne lokalne. Po drugie, element, na objętości (powierzchni) którego dokonuje się operacji całkowania, powinien być opisany we współrzędnych lokalnych, co powoduje odpowiednią zmianę granic całkowania.

Rozpatrzmy np. układ współrzędnych lokalnych  $\xi, \eta, \zeta$  i odpowiadający mu układ współrzędnych globalnych  $x, y, z$ . Zgodnie z regułami różniczkowania cząstkowego można np. zapisać pochodną

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}. \quad (8-15)$$

Dokonując takiego samego różniczkowania ze względu na pozostałe dwie współrzędne i pisząc to w postaci macierzowej mamy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (8-16)$$

Włastrono powyższego może być obliczona, jeżeli funkcje są wyrażone we współrzędnych lokalnych. Dalej, ponieważ  $x, y, z$  są wyrażone explicite przez związki definiujące współrzędne lokalne [równanie (8-2)], macierz  $[J]$  może być określona także explicite we współrzędnych lokalnych. Macierz ta znana jest pod nazwą *macierzy Jakobiego*.

Aby teraz znaleźć pochodne globalne, dokonujemy odwrócenia i piszemy:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (8-17)$$

W zależności od funkcji kształtu  $[N]$  definiujących transformację współrzędnych (funkcje te są identyczne z funkcjami kształtu  $[N]$  jedynie w przypadku izoparametrycznego sformułowania) mamy

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}, \frac{\partial N_2}{\partial \xi}, \dots & x_1, y_1, z_1 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta}, \frac{\partial N_2}{\partial \eta}, \dots & x_2, y_2, z_2 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta}, \frac{\partial N_2}{\partial \zeta}, \dots & \dots \dots \end{bmatrix} \quad (8-18)$$

Dla transformacji zmiennych i obszaru, względem którego odbywa się całkowanie, stosujemy standardowy proces obejmujący określenie wyznacznika macierzy  $[J]$ . Tak więc np. dla objętości elementu

$$dxdydz = \det [J] d\xi d\eta d\zeta. \quad (8-19)$$

Ten rodzaj transformacji zachowuje ważność niezależnie od liczby współrzędnych. Sprawdzenie i wyjaśnienie podanych wyżej zależności znajdzie Czytelnik w podręcznikach matematyki. Jasny wykład na powyższy temat można znaleźć w pracy Murnaghana [6].\*

\* Wyznacznik z macierzy Jakobiego znany jest w literaturze pod nazwą Jakobianu i pisano się często w postaci

$$\det [J] = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}.$$

Zakładając, że odwrócenie macierzy  $[J]$  jest możliwe, i jeżeli współrzędne krzywoliniowe są znormalizowane na bazie prostopadłościanu, to można sprowadzić obliczenie własności elementu do znalezienia całki typu (8-11) wyraźniej przedstawionej w postaci

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G(\xi, \eta, \zeta)] d\xi d\eta d\zeta. \quad (8-20)$$

W istocie całkowania dokonuje się po objętości prostopadłościanu (przed jego przekształceniem), operuje się zatem w prostych granicach. Podobnie jedno- lub dwuwymiarowe problemy prowadzą do całek z prostymi granicami.

Chociaż w powyższych przypadkach granice całkowania są proste, jawna postać  $[G]$  jest niestety zwykle skomplikowana. Z wyjątkiem najprostszych elementów całkowanie algebraiczne prowadzi zazwyczaj do trudności matematycznych i musimy uciekać się do całkowania numerycznego. Jak zobaczymy dalej, łatwiej jest dzięki temu uniknąć błędów algebraicznych, a program ogólny, nie związany ze szczególnym kształtem elementu, może być zapisany dla różnych klas zagadnień. W istocie w tego rodzaju obliczeniach numerycznych nigdy nie szuka się odwrotności macierzy  $[J]$  w jawnej postaci.

**8.3.2. Macierze elementu. Współrzędne powierzchniowe i objętościowe.** Ogólny związek (8-2) służący do określania współrzędnych i wszystkie pozostałe twierdzenia wymienione w p. 8.1 i 8.2 są w równym stopniu ważne dla każdego układu współrzędnych lokalnych i mogą wiązać współrzędne lokalne  $L_1, L_2, \dots$  zastosowane dla trójkątów i czworoscianów z globalnymi współrzędnymi kartezjańskimi.

W istocie większa część rozważań z poprzedniego rozdziału zachowuje swą słusność, jeżeli po prostu przemianujemy w odpowiedni sposób współrzędne lokalne. Istnieją jednakże dwie poważne różnice.

Pierwsza dotyczy faktu, że współrzędne lokalne nie są niezależne i w istocie jest ich o jedną więcej niż kartezjańskich. Macierz  $[J]$  stanie się więc pozornie prostokątna i nie będzie mieć odwrotności. Druga odmiennność polega po prostu na różnicy w granicach całkowania, które będą odpowiadać trójkątnym albo czworociennym elementom „macierzystym”.

Najprostsza, choć nie najbardziej elegancka droga ominięcia pierwszej trudności polega na przyjęciu ostatniej zmiennej jako zależnej. Możemy zatem np., wprowadzić formalną zależność dla przypadku czworoscianu w postaci

$$\begin{aligned} \xi &= L_1, & \eta &= L_2, & \zeta &= L_3, \\ 1 - \xi - \eta - \zeta &= L_4, \end{aligned} \quad (8-21)$$

(na mocy definicji poprzedniego rozdziału) i tym samym zabezpieczyć jednoznaczność równania (8-18) i wszystkich równań z (8-19).

Ponieważ funkcje  $N_i$  są wyrażeniami zależnymi od  $L_1, L_2, L_3, \dots$ , należy więc pamiętać, że

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = -\frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial \xi}. \quad (8-22)$$

Stosując (8-21), otrzymamy

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4}$$

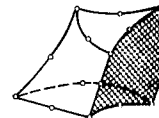
i dalsze pochodne wyrażone w podobny sposób.

Granice całkowania z (8-20) ulegną jednak teraz zmianie, odpowiednio do granic czworoscianu, np.

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta-\zeta} [G(\xi, \eta, \zeta)] d\xi d\eta d\zeta. \quad (8-23)$$

Oczywiście taka sama procedura będzie miała miejsce w przypadku współrzędnych trójkątnych.

Należy zauważyć, że i teraz wyrażenie  $[G]$  wymagać będzie zastosowania całkowania numerycznego, które jednak dokonywane jest względem prostego, niezniekształconego obszaru macierzystego, niezależnie czy to dla trójkąta, czy dla czworoscianu.



Rys. 8.8. Zniekształcony prostopadłościan trójkątny

Wreszcie trzeba zauważyć, że każdy z rodzajów elementów omówionych powyżej może być odpowiednio przekształcony. Niekiedy, jak np. w przypadku prostopadłościanu o podstawie trójkątnej, stosuje się zarówno współrzędne powierzchniowe jak i prostokątne (rys. 8-8). Uwagi dotyczące zależności współrzędnych znajdują tutaj także zastosowanie. Pamiętaj jednak należy o wspomnianych kłopotach. Ostatnio podane informacje powinny nieco wyjaśnić sposób postępowania.

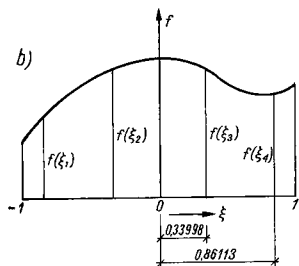
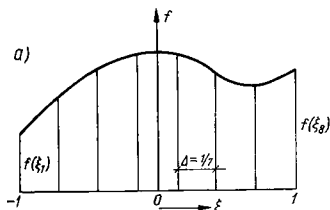
## 8.4. Całkowanie numeryczne

**8.4.1. Całkowanie w obszarze jednowymiarowym.** W rozdziale 5, przy omawianiu względnie prostego problemu osiowo-symetrycznego stanu naprężenia i prostych elementów trójkątnych, stwierdzono, że całkowanie algebraiczne wyrażań zawartych w macierzy elementu może nastęrczać trudności. Zarówno w takich przypadkach, jak też i w bardziej skomplikowanych, przekształconych elementach, nabiera znaczenia całkowanie numeryczne.

Pewne zadania całkowania numerycznego kontynu omówione poniżej i podane zostaną tablice odpowiednich współczynników.

Aby znaleźć numerycznie całkę funkcji jednej zmiennej, możemy stosować jeden z dwu zasadniczych sposobów [7], [8].

**Całkowanie Newtona-Cotesa.** Najpierw określa się a priori punkty (zazwyczaj równoodległe), w których należy znaleźć wartości funkcji, po czym za pomocą tych wartości wyznacza się odpowiedni wielomian i kalkuje się algebraicznie (rys. 8.9a).



Rys. 8.9. Całkowanie: a) Newtona-Cotesa, b) Gaussa; każde całkowanie dotyczy wielomianu siódmego stopnia, tj. błąd  $O(\Delta^8)$ .

Ponieważ  $n$  wartości funkcji określają wielomian  $(n-1)$  stopnia, błąd będzie rzędu  $O(\Delta)^n$ , gdzie  $\Delta$  oznacza odstęp między punktami podziału osi odciętych. Powyższe prowadzi do dobrze znanych formuł kwadratury Newtona-Cotesa. Całkę można zapisać jako

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad (8-24)$$

dla przedziału całkowania między  $-1$  i  $+1$  (rys. 8.9a). Na przykład gdy  $n = 1$

$$I = f(-1) + f(+1). \quad (8-25)$$

Dobrze znany wzór trapezowy daje,  $n = 2$

$$I = \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(+1)], \quad (8-26)$$

a reguła jednej trzeciej — Simpsona,  $n = 3$

$$I = \frac{1}{4} \left[ f(-1) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) + 3f\left(+\frac{1}{3}\right) + f(+1) \right] \quad (8-27)$$

Wzory dla  $n = 1, 2, 3, \dots$  aż do 20 podane są u Kopala [8].

**Całkowanie Gaussa.** Jeżeli zamiast rozmieszczania punktów w jednakowych odstępach założymy a priori, że powinny być one umieszczone w miejscach dobranych tak, by zapewnić najlepsze przybliżenie do rzeczywistej funkcji, to praw-

Tablica 8-1

Odcięcie i współczynniki wagi dla wzoru na kwadraturę Gaussa

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j)$$

$\pm a$			$H$		
			$n = 2$		
0,57735	02691	89626		1,00000	00000
			$n = 3$		
0,77459	66692	41483		0,55555	55555
0,00000	00000	00000		0,88888	88888
			$n = 4$		
0,86113	63115	94053		0,34785	48451
0,33998	10435	84856		0,65214	51548
			$n = 5$		
0,90617	98459	38664		0,23692	68850
0,53846	93101	05683		0,47862	86704
0,00000	00000	00000		0,56888	88888
			$n = 6$		
0,93246	95142	03152		0,17132	44923
0,66120	93864	66265		0,36076	15730
0,23861	91860	83197		0,46791	39345
			$n = 7$		
0,94910	79123	42759		0,12948	49661
0,74153	11855	99394		0,27970	53914
0,40584	51513	77397		0,38183	60505
0,00000	00000	00000		0,41795	91836
			$n = 8$		
0,96028	98564	97536		0,10122	85362
0,79666	64774	13627		0,22238	10344
0,52553	24099	16329		0,31370	66458
0,18343	46424	95650		0,36268	37833
			$n = 9$		
0,96816	02395	07626		0,08127	43883
0,83603	11073	26636		0,18064	81606
0,61337	14327	00590		0,26061	06964
0,42425	34234	03809		0,31234	70770
0,00000	00000	00000		0,33023	93550
			$n = 10$		
0,97390	65285	17172		0,06667	13443
0,86506	33666	88985		0,14945	13491
0,67940	95682	99024		0,21908	63625
0,44339	53941	29247		0,26926	67193
0,14887	43389	81631		0,29552	42247

dopodobnie uzyskamy lepszą dokładność. Istotnie, jeśli rozważymy znów, że

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad (8-28)$$

i przyjmiemy znów wyrażenie w postaci wielomianu, łatwo udowodnić, że dla  $n$  punktów mamy  $2n$  niewiadomych:  $f_i$  oraz  $\xi_i$ , zatem wielomian będzie stopnia  $2n-1$ . Można go zbudować i scałkować algebraicznie (rys. 8.9b). Teraz błąd ma rząd  $O(\Delta)^{2n}$ .

Układ równań dla znalezienia współczynników jest trudny do rozwiązania, lecz poprzez pewne matematyczne przekształcenia można pokazać, że rozwiązanie explicitie można otrzymać w postaci wielomianów *Legendre'a*. Dlatego proces ten nosi nazwę kwadratury *Gaussa-Legendre'a*.

Tabela 8.1 podaje odcięte i współczynniki wagi dla całkowania *Gaussa*.

W metodzie elementów skończonych rachunek polega na określeniu całkowanej funkcji  $f$  za pomocą pewnej liczby wartości tej funkcji. Dlatego proces *Gaussa*, jako wymagający najmniejszej liczby takich wartości, idealnie nadaje się do tego celu i obecnie jest używany prawie wyłącznie.

Wzór na całkowanie w postaci

$$I = \int_{-1}^1 w(\xi) f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad (8-29)$$

można także stosować dla określonej funkcji  $w(\xi)$ , całkując z niezbędnym stopniem dokładności rozwinięcie wielomianów od  $f(\xi)$  [7].

#### 8.4.2. Całkowanie numeryczne — obszary prostokątne lub prostopadłościennne. Najprostsza droga do otrzymania całki

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (8-30)$$

polega na obliczeniu najpierw całki wewnętrznej, przy założeniu  $\eta = \text{const}$

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi = \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j, \eta) = \psi(\eta). \quad (8-31)$$

Obliczając następnie całkę zewnętrzną w podobny sposób znajdujemy

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \psi(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^n \psi(\eta_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n H_i \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j, \eta_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_j, \eta_i). \end{aligned} \quad (8-32)$$

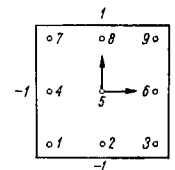
Dla prostopadłościennu otrzymujemy podobnie

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_i H_j H_m f(\xi_i, \eta_j, \zeta_m). \quad (8-33)$$

Obliczając powyższe całki przyjęto jednakową liczbę punktów podziału dla każdego kierunku. Oczywiście nie jest to niezbędne i czasem może być wygodnie zastosować niejednakową liczbę tych punktów dla poszczególnych kierunków.

Warto odnotować, że sumę podwójną można łatwo interpretować jako pojedynczą, rozciągniętą na  $n \times n$  punktów kwadrat (albo na  $n^3$  punktów rozciągniętą na sześciennie — w przypadku sumy potrójnej).

Na rysunku 8.10 pokazano 9 punktów podziału prowadzących do całki pięciokrotnej w każdym kierunku.



Rys. 8.10. Punkty całkowania *Gaussa* dla  $n = 3$  w obszarze o kształcie kwadratu; ścisłe — dla wielomianu piątego stopnia w każdym kierunku, błąd  $O(\Delta^6)$

Zbadajmy jednakże problem bliżej; postawmy wymaganie dokładnego scałkowania wielomianu piątego stopnia w dwu kierunkach. Dla każdego z punktów należy określić dwie współrzędne i wartość  $f$  za pomocą wzoru na wartość średnią

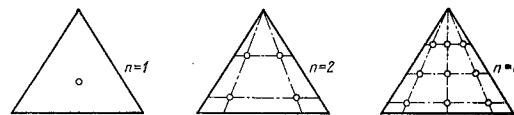
$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m W_i f(\xi_i, \eta_i). \quad (8-34)$$

Może się wówczas okazać, że jedynie 7 punktów wystarczy dla uzyskania tej samej dokładności. Obecnie poszukuje się takich wzorów, jako że mogą one znacznie uprościć obliczenia.

#### 8.4.3. Całkowanie numeryczne — obszary trójkątne i czworosiennne. Całki dla trójkąta wyrażone we współrzędnych powierzchniowych mają postać

$$I = \int_0^{1-L_1} \int_0^0 f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2. \quad (8-35)$$

Możemy znów zastosować  $n$  punktów *Gaussa* i doprowadzić do wyrażenia na sumy typu, omówionego poprzednio. Jednakże granice całkowania będą teraz zmieniać się; dlatego wygodniej użyć inne punkty dla drugiego całkowania, stosując specjalne wyrażenie *Gaussa* dla całek typu pokazanego w równaniu (8-2a), w którym  $W$  jest funkcją liniową. Zostało to wykonane przez *Radau* [9].



Rys. 8.11. Zbiorec punkty dla trójkąta; całkowanie *Gaussa-Radau*

Stale całkowania Gaussa-Radau

Liczba punktów całkowania w każdym kierunku	$AY [Y]$ $Y = 1, n$	$H [Y]$ $Y = 1, n$	$AI [I]$ $I = 1, n$	$AS [I]$ $I = 1, n$
$n = 1$	0,5	1,0	0,333333333 (1,0)	0,75 (0,25)
$n = 2$	0,2113248654 0,7886751346	0,5 0,5	0,1550510257 0,6449489743 (1,0)	0,3764030627 0,5124858262 (0,1111111111)
$n = 3$	0,1127016654 0,5 0,8872983346	0,2777777778 0,4444444444 0,2777777778	0,0885879595 0,4094668644 0,7876594618 (1,0)	0,2204622112 0,3881934688 0,3288443200 (0,0625)
$n = 4$	0,0694318442 0,3300094782 0,6699905218 0,9305681558	0,1739274226 0,3260725774 0,3260725774 0,1739274226	0,0571041961 0,2768430136 0,5835904324 0,8602401357 (1,0)	0,1437135608 0,2813560151 0,3118265230 0,2231039011 (0,04)
$n = 5$	0,0469100770 0,2307653449 0,5 0,7692346551 0,9530899230	0,1184634425 0,2393143353 0,2844444444 0,2393143353 0,1184634425	0,0398098571 0,1980134179 0,4379748102 0,6954642734 0,9014649142 (1,0)	0,1007941926 0,2084506672 0,2604633916 0,2426935942 0,1598203766 (0,2777777778)

Tabela 8.2 zawiera stałe wagowe, niezbędne do wyrażenia

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Wf(L_1, L_2, L_3),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} L_1 &= AI(i), \\ L_2 &= AY(j)(1-L_1), \\ L_3 &= 1-L_1-L_2, \\ W &= AS(i)H(j)(1-L_1). \end{aligned} \quad (8-36)$$




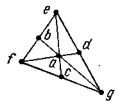
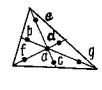
Podobne wyrażenia można uzyskać dla czworoscianu.

Na rysunku 8.11 pokazano rozmieszczenie punktów całkowania wewnątrz trójkąta od  $n = 1$  do  $n = 3$ . Widać od razu, że punkty te nie są rozmieszczone przypadkowo (ani symetrycznie). Poza tym dokładność nie jest teraz jednakowa w kierunkach  $L_1, L_2$  i  $L_3$ . Istotne numeryczne (i zarazem efektowne) ulepszenie otrzymał Hammer i in. [11]; szereg takich wyników podano w tabl. 8.3 dla wyrażań podobnych do (8-34).

Można dowiedzieć, że liczba punktów użyta przy całkowaniu jest zawsze wystarczająca lub większa niż niezbędna do określenia wielomianu zadanego stopnia.

Można, oczywiście, również uzyskać podobne wyrażenia dla czworoscianu. W tabl. 8.4 pokazano niektóre wzory w oparciu o prace [11] i [12].

Wzory do całkowania numerycznego dla trójkątów

Rząd	Rysunek	Błąd	Punkty	Współrzędne trójkątne	Wagi $2W_k$
Liniowy		$R = 0(h^2)$	$a$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Kwadratowy		$R = 0(h^3)$	$a$ $b$ $c$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Sześcienne		$R = 0(h^4)$	$a$ $b$ $c$ $d$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\frac{11}{15}, \frac{2}{15}, \frac{11}{15}$ $\frac{2}{15}, \frac{11}{15}, \frac{2}{15}$ $\frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{11}{15}$	$\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$ $\frac{25}{48}$
Sześcienne		$R = 0(h^5)$	$a$ $b$ $c$ $d$ $e$ $f$ $g$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ $1, 0, 0$ $0, 1, 1$ $0, 0, 1$	$\frac{27}{60}$ $\frac{8}{60}$ $\frac{3}{60}$
11111-go stopnia		$R = 0(h^6)$	$a$ $b$ $c$ $d$ $e$ $f$ $g$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \alpha_1$ $\beta_1, \beta_1, \beta_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \alpha_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0,225 0,13239415 0,12593918

gdzie:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,05971587 \\ \beta_1 &= 0,47014206 \\ \alpha_2 &= 0,79742699 \\ \beta_2 &= 0,10128651 \end{aligned}$$



Nr	Rząd	Rysunek	Włqd	Punk-ty	Współrzędne czworosiennie	Wagi	
1	Linowy		$R = 0(h^2)$	a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	1	
2	Kwadratowy		$R = 0(h^3)$	a	$\alpha, \beta, \beta, \beta$	$\frac{1}{4}$	
				b	$\beta, \alpha, \beta, \beta$	$\frac{1}{4}$	
3	Sześcienny		$R = 0(h^4)$	c	$\beta, \beta, \alpha, \beta$	$\frac{1}{4}$	
				d	$\beta, \beta, \beta, \alpha$	$\frac{1}{4}$	
						$\alpha = 0,58541020$	
						$\beta = 0,13819660$	
				a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$	
b	$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$					
c	$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$					
d	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$					
e	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$					

## 8.5. Uwagi końcowe

Pokazaliśmy jak można tworzyć dużą liczbę różnorodnych elementów. Całkowanie numeryczne prowadzi do potrzeby funkcyjnego opisu niektórych elementów. Całkowanie numeryczne jest przybliżone. Zagadnienia niezbędnego stopnia aproksymacji w praktyce oraz ogólnego opracowania programów opartych na całkowaniu numerycznym będą omówione w rozdz. 9.

## Cytowane publikacje

- [1] I. C. Taig: Structural analysis by the matrix displacement method, Engl. Electric Aviation Report, nr SO17, 1961.
- [2] B. M. Irons: Numerical Integration applied to finite element methods. Conf. Use of Digital Computers in Struct. Eng. Univ. of Newcastle, 1966.
- [3] B. M. Irons: Engineering application of numerical integration in stiffness method. J. A.I.A.A., 14, s. 2035-37, 1966.
- [4] S. A. Coors: Surfaces for computer aided design of space form. M.I.T. Project MAC MAC-TR-41, 1967.
- [5] A. R. Forrest: Curves and surfaces for Computer aided design. Comp. Aided Design Group, Cambridge Eng. gland, 1968.
- [6] F. D. Murnaghan: Finite deformation of an elastic solid. J. Wiley & Son, 1951.
- [7] F. Schied: Numerical Analysis. Schaum Series. McGraw-Hill, 1968.
- [8] Z. Kopal: Numerical Analysis, Wyd. 2, Chapman & Hall, 1961.
- [9] Radau: — Joura. de. Meth., 3, s. 283, 1880.
- [10] R. G. Anderson, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Vibration and Stability of Plates using finite elements. Int. J. Solids Struct., 4, s. 1031-55, 1968.
- [11] P. C. Hammer, O. P. Marlowe, A. H. Stroud: Numerical integration over simplexes and cones. Math. Tables Aide Comp., 10, s. 130-137, 1956.
- [12] C. A. Phillips: Refined finite element analysis of linear and non linear two dimensional structures. Structures Materials Research Report, nr 66-22, październik 1966.

## 9. Niektóre zastosowania elementów izoparametrycznych do analizy dwu- i trójwymiarowego stanu naprężeń

### 9.1. Wstęp

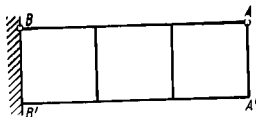
Stosowanie w poprzednich dwóch rozdziałach elementów wyższego rzędu wymaga pewnego uzasadnienia. Wskutek bowiem ich większej złożoności maszyna potrzebuje więcej czasu do rozwiązania problemu. Warto zatem zastanowić się nad celowością tego zabiegu.

Na rysunku 9.1 podano prosty przykład belki wspornikowej, do obliczenia której zastosowano różne rodzaje elementów. Porównując pierwszą i drugą parę wyników widać, jak *gwałtowne jest polepszenie dokładności przy zastosowaniu dla tej samej liczby stopni swobody — elementów złożonych*. Nie przejawia się to jednak w proporcjonalnym skróceniu czasu rozwiązywania, ponieważ z bardziej złożonymi elementami związana jest większa szerokość pasma macierzy. Tym niemniej istnieje wyraźna oszczędność czasu.

Poza tym przygotowanie danych dla maszyny przy złożonych elementach ulega znacznemu uproszczeniu. W przedstawionych przykładach trzy elementy złożone zastępują odpowiednio sześć i osiemnaście prostych trójkątów; do określenia pozostaje więc mniejsza liczba elementów. Bardzo prosto można też napisać — jeśli boki są proste — odpowiedni podprogram interpolujący położenie punktów pośrednich. Liczba współrzędnych wymagających określenia jest więc znacznie mniejsza.

To wszystko przemawia na korzyść elementów złożonych, jeżeli siatkę podzielną przeprowadza się automatycznie. To ostatnie jednak zawsze zwiększa ilość pracy przy programowaniu.

Z drugiej strony daje się czasem zauważyć, że znacznie zredukowana liczba elementów złożonych nie jest w stanie przedstawić wszystkich lokalnych zawiłości



Rodzaj elementu	Siła pionowa w A		Moment w AA'	
	max ugięcie w AA'	max naprężenie w BB'	max ugięcie w AA'	max naprężenie w BB'
	0,26	0,19	0,22	0,22
	0,65	0,56	0,67	0,67
	0,53	0,51	0,52	0,55
	0,99	0,99	1,00	1,00
	1,00	1,00	1,00	1,00
Dokładnie	1,00	1,00	1,00	1,00

Rys. 9.1. Elementy trójkątne i prostokątne zastosowane do obliczenia belki wspornikowej. Pokazano możliwość większej dokładności przy tej samej liczbie stopni swobody

geometrii badanego zagadnienia. W takich przypadkach często wygodniej jest zastosować elementy proste.

Prawdopodobnie najważniejszym problemem ekonomicznym przy zastosowaniu złożonych elementów krzywoliniowych jest czas maszyny, niezbędny do wykonania całkowań numerycznych. Należy tu oczywiście założyć z góry określoną granicę ekonomicznie rozsądnej dokładności, wymaganej w tych całkowaniach.

## 9.2. Żądana dokładność całkowania numerycznego

W poprzednim rozdziale pokazano sposób, w jaki za pomocą całkowania numerycznego na  $n$  punktach Gaussowskich można wyznaczyć macierze elementów. Nakład wysiłków przy całkowaniu na płaszczyźnie jest w przybliżeniu wrót proporcjonalny do  $n^2$ , gdzie  $n$  — liczba punktów, w których ma być znaleziona funkcja. W przypadku trójwymiarowym nakład ten jest proporcjonalny do  $n^3$ . Ustalenie właściwej minimalnej liczby punktów Gaussa ma zatem określone znaczenie.

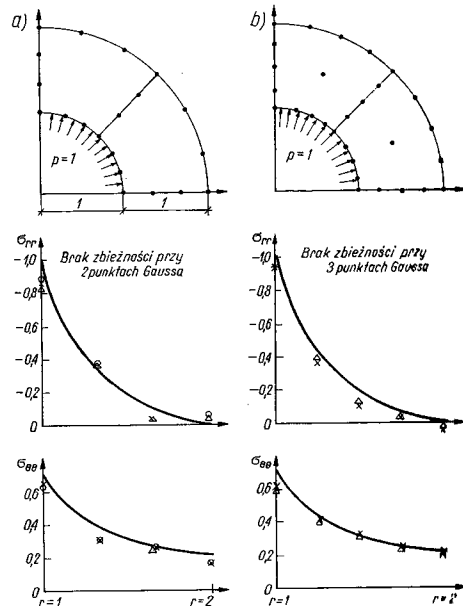
Poniżej zajmiemy się zagadnieniem naprężeń w ciele sprężystym; macierz wymagającą określenia jest zatem macierz sztywności elementu.

Formułujemy następujące twierdzenie:

Zbieżność wyników metody elementów skończonych w zagadnieniach analizy przemieszczeń sprężystych jest zapewniona wówczas, gdy za pomocą użytego sposobu całkowania można dokładnie wyznaczyć objętość elementu [1], [2].

Dowód powyższego twierdzenia jest prosty. Gdy wielkość elementu malcje, wówczas otrzymujemy w granicy określoną funkcję kształtu, dającą w elemencie stałe odkształcenie i naprężenie. Siły węzłowe przybierają zatem postać

$$\{F\}^e = \int_{V_e} \{\sigma\}^T [B] dV = \{\sigma\}^T \int_{V_e} [B] dV. \quad (9-1)$$



Rys. 9.2. Wydrążona kula pod ciśnieniem wewnętrznym. Skuteczność liczby punktów całkowania Gaussa:  $\circ$  3 punkty,  $\times$  4 punkty,  $\Delta$  5 punktów; a) elementy czwartego stopnia — brak zbieżności przy dwóch punktach Gaussa, b) elementy czwartego stopnia — brak zbieżności przy trzech punktach Gaussa

$$dV = \det [J] d\xi d\eta d\zeta, \quad (9-2)$$

zaś macierz  $[B]$  otrzymuje się z pierwszych pochodnych  $N_i$  pomnożonych przez  $[J]^{-1}$ , zatem dokładna całka k z równania (9-2) daje dokładną wartość całki z (9-1).

Badając szczegółowo postać jacobianu  $[J]$ , będącego wyznacznikiem utworzonym z pochodnych funkcji kształtu, por. (8-18), możemy określić jego rząd i w ten sposób znaleźć liczbę punktów *Gaussa*, wystarczającą do dokładnego scałkowania. Na przykład w dwuwymiarowym czworokącie wyznacznik przybiera postać wyrażenia kwadratowego, a to wymaga co najmniej dwu punktów *Gaussa*. W trójwymiarowym graniastopłacie wyznacznik staje się wyrażeniem trzeciego stopnia, wymagając dla dokładnego scałkowania po dwa punkty *Gaussa* w każdym z trzech kierunków [3].

Te minima, niezbędne dla właściwej zbieżności rozwiązania, niekoniecznie są najlepszym kompromisem ekonomicznym. Jeżeli dla przedstawienia konfiguracji obszaru użyjemy małej liczby elementów, wówczas opłaca się dokładniejsze całkowanie przy większej liczbie punktów *Gaussa*. Natomiast przy użyciu dużej liczby elementów do przedstawienia obszaru wskazane jest stosowanie ze względów oszczędnościowych mniej dokładnego całkowania.

Jest oczywiste, że programy dla układania macierzy powinny być przygotowane w taki sposób, aby użytkownik mógł wybrać odpowiednią dla swoich celów liczbę punktów całkowania. Nie powinna ona być nigdy mniejsza niż minimum konieczne dla zbieżności, ale też i nie większa niż wymagana dla osiągnięcia odpowiednio dokładnych wartości całek.

Na rysunku 9.2 pokazano przykład osiowo-symetrycznego zadania kuli obciążonej ciśnieniem wewnętrznym. Użyte zostały tu dwa rodzaje elementów i różna liczba punktów całkowania. Wyniki nie wymagają komentarza.

### 9.3. Korzyści obliczeniowe całkowania numerycznego elementów skończonych

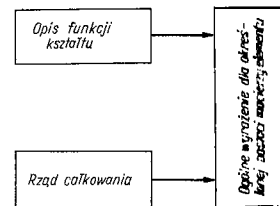
Jedną z istotnych zalet numerycznego całkowania elementów skończonych jest wszechstronność prostego programu dla maszyny.

Łatwo zauważyć, że dla danej klasy problemów macierze ogólne mają zawsze tę samą postać (por. rozdz. 18) ze względu na funkcje kształtu i ich pochodne.

Aby móc analizować element, należy najpierw określić dla niego funkcję kształtu i jej pochodne, a następnie ustalić rząd całkowania.

Obliczenie własności elementu składa się więc z trzech oddzielnych części, jak to pokazano na rys. 9.3. Dla danej klasy problemów potrzebna jest za każdym razem tylko zmiana funkcji kształtu i to wystarczy do opisanie całej różnorodności możliwych do użycia elementów. Na odwrót, te same podprogramy dla funkcji kształtu mogą być zastosowane w różnych klasach problemów.

Użycie różnych rodzajów elementów, sprawdzenie przydatności nowych wariantów elementów — zastosowanych w danym zagadnieniu, lub rozszerzenie programów w celu zbadania nowych sytuacji może więc być łatwo dokonane przy pominięciu odpowiednich obliczeń algebraicznych (z nieodłącznymi w tych przypadkach możliwościami pomyłek). Maszyna cyfrowa spełnia tutaj swoją rolę: „jest posłusznym narzędziem, zdolnym do oszczędnego działania”.



Rys. 9.3. Organizacja procesu obliczeń przy całkowaniu numerycznym. Te same programy funkcji kształtu można stosować do różnych rodzajów elementów

Największą praktyczną zaletą stosowania uniwersalnych podprogramów dla funkcji kształtu jest to, że można skutecznie uwolnić je od pomyłek za pomocą dodatkowego programu. Wystarczy zwykle sprawdzić, czy wartości węzłowe są poprawne i czy liczby, podawane jako pochodne, są nimi w istocie. W tym celu stosuje się prosty wzór różnicowy, wprowadzając podprogram dla dwu blisko siebie położonych punktów. Sporadycznie mogą być stosowane inne testy. Najbardziej interesujący jest test zależny od wartości własnych; jego zastosowanie jednak nie zawsze się opłaca [8].

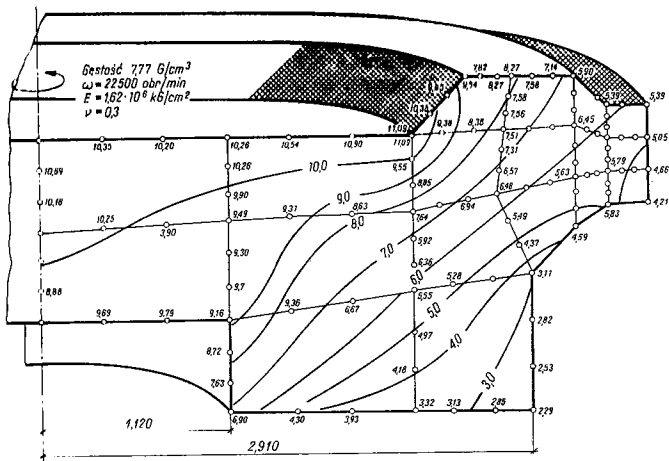
### 9.4. Przykłady analizy dwuwymiarowego stanu naprężenia

W poniższych przykładach osiowo-symetrycznych problemów użyto elementy zakrzywione i podano niektóre możliwości ich zastosowania.

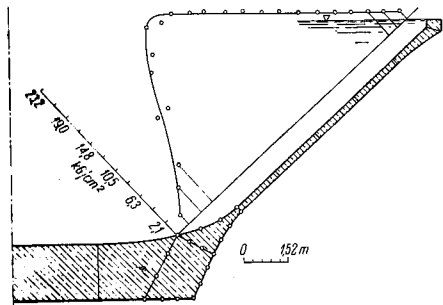
*Tarcza wirująca* (rys. 9.4). Aby otrzymać dokładne wartości naprężeń potrzeba tu tylko osiemnastu elementów. Warto zauważyć, że wszystkie elementy trzeciego stopnia o węzłach w środku boków są generowane automatycznie przy realizacji programu i nie muszą być dodatkowo określane.

*Stożkowy zbiornik na wodę* (rys. 9.5). W tym zadaniu użyto także elementy trzeciego stopnia. Zauważmy, że grubość poszczególnego elementu wystarczy do określenia efektów zginania, zarówno w grubej jak i w cienkiej części zbiornika. Przy zastosowaniu prostych elementów trójkątnych potrzeba byłoby kilku warstw tych elementów, aby uzyskać poprawne rozwiązanie.

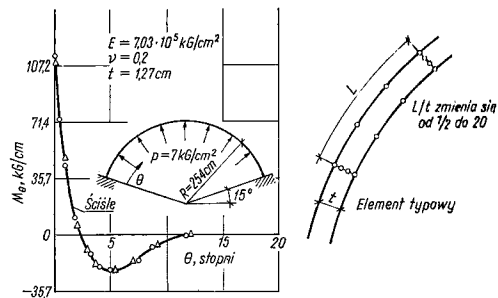
*Kopuła półkulista* (rys. 9.6). Na przykładzie tym pokazano sposób w jaki problem cienkiej powłoki może być rozwiązany przy użyciu ograniczonej liczby elementów i przy dokładnie tym samym podprogramie. Ten typ rozwiązania może



Rys. 9.4. Naprężenia obwodowe w tarczy wirującej (18 elementów sześciennych, 119 węzłów, 238 stopni swobody)



Rys. 9.5. Naprężenia obwodowe w stożkowym zbiorniku na wodę obciążonym hydrostatycznie



Rys. 9.6. Obliczenie powłoki za pomocą izoparametrycznych sześciennych elementów (razem 15 i 24 elementy)

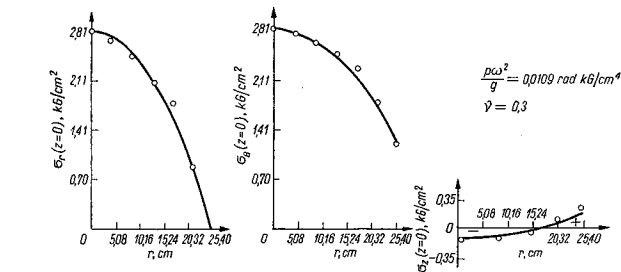
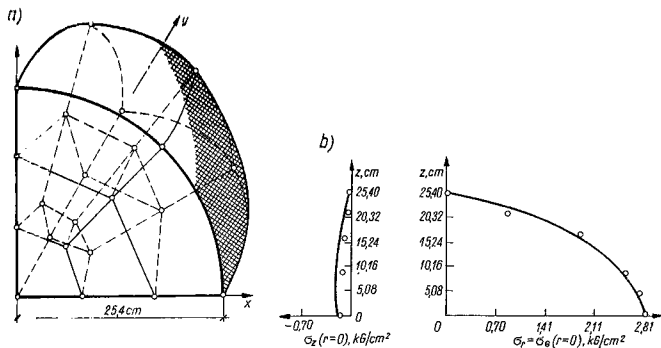
być jeszcze ulepszony z punktu widzenia oszczędności pracy maszyny, dzięki zastosowaniu dobrze znanego z teorii powłok założenia o liniowej zmienności przemieszczeń w kierunku grubości powłoki. W ten sposób można jeszcze zredukować liczbę stopni swobody. Metody tego rodzaju są omówione szczegółowo w rozdz. 14.

## 9.5. Wyznaczanie naprężeń w stanie trójwymiarowym

Stosowanie elementów złożonych w zagadnieniu trójwymiarowym, jak wspominaliśmy w rozdz. 6, jest opłacalne. Poniżej przedstawiono typowe przykłady, w których zostało użyte prawie wyłącznie sformułowanie kwadratowe typu serendipowskiego. We wszystkich zadaniach posłużono się całkowaniem po czterech punktach Gaussa w każdym kierunku.

*Kula wirująca* (rys. 9.7). Ten przykład może stanowić próbę przydatności elementów silnie zakrzywionych. Naprężenia od siły odśrodkowej obliczone według metody elementów skończonych porównano tu z wartościami dokładnymi. Użyto siedmiu elementów; wyniki wskazują na dobrą zgodność z wartościami dokładnymi [6].

*Zapora łukowa na podłożu nieodkształcalnym (typ 5)*. Zagadnienie powyższe było przedmiotem studiów prowadzonych przez Komitet Stowarzyszenia Inżynierów Budownictwa Lądowego i miało na celu dokładne sprawdzenie zbieżności w analizie trójwymiarowej. Na rys. 9.8 podano dwa sposoby podziału na elementy stopnia drugiego i dwa na elementy stopnia trzeciego. Wykresy przedstawione na rys. 9.9 wskazują na zbieżność przemieszczeń w przekroju środkowym; z rysunku wynika, że zadowalającą dokładność można uzyskać nawet przy zastosowaniu jednego elementu.

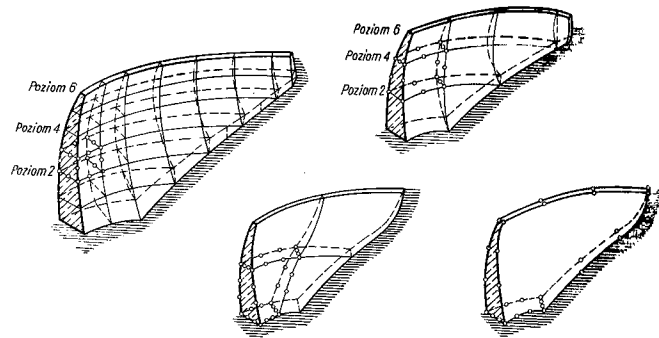


Rys. 9.7. Wyznaczenie naprężeń w kuli wirującej: podział oktantu kuli na 7 elementów typu 60-1D, b) wartości naprężeń wzdłuż  $z = 0$  i  $r = 0$ : — analityczne,  $\circ$  numeryczne

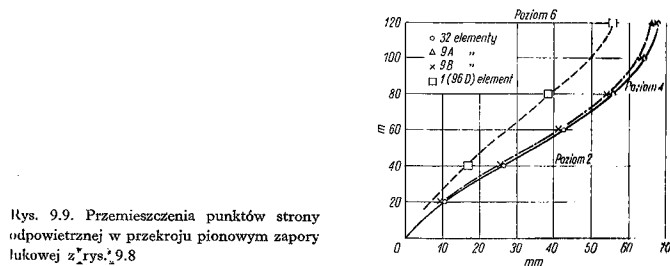
Porównanie naprężeń (rys. 9.10) także jest interesujące, chociaż widoczne są większe „oscylacje” przy grubszym podziale. Podział „drobny” można traktować jako „dokładny” dla sprawdzenia badań modelowych, a także wyników otrzymanych innymi metodami analitycznymi [7].

Wymienione rozwiązania „testowe” ilustrują ogólne możliwości stosowania metody i uzyskiwanej przy tym dokładności. Poniżej przedstawiono dwa dalsze przykłady praktyczne.

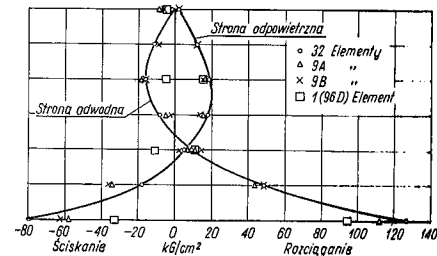
Zapora łukowa i jej posadowienie (rys. 9.11) oraz zbiornik ciśnieniowy (rys. 9.12). Na obu przykładach pokazano podziały wystarczające do otrzymania zadowalającej dokładności inżynierskiej. Przykład naczyzna ciśnieniowego, podobnego do omawianego w rozdz. 6, wskazuje na możliwość znacznego zredukowania liczby stopni swobody przy zastosowaniu bardziej złożonych elementów. Na przykładzie



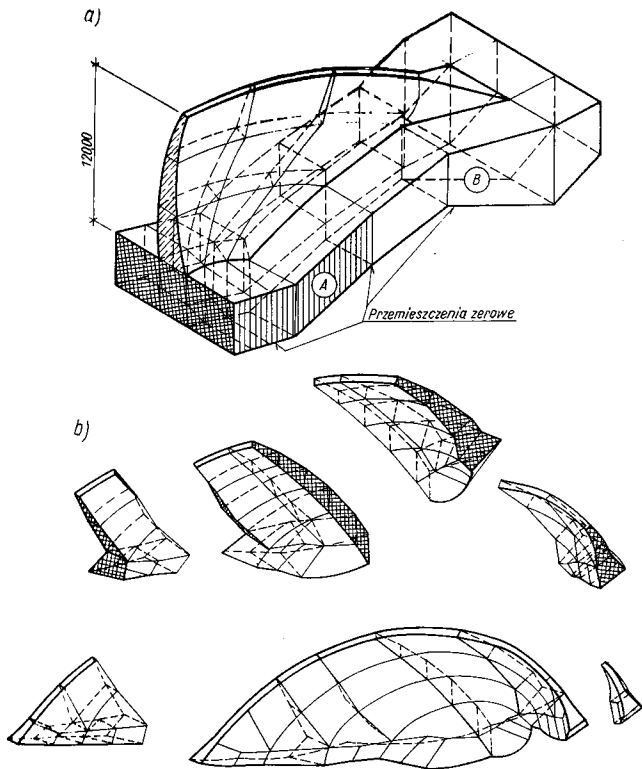
Rys. 9.8. Różne sposoby podziału zapory łukowej na elementy dla analizy przestrzennej



Rys. 9.9. Przemieszczenia punktów strony odpowietrznej w przekroju pionowym zapory łukowej z rys. 9.8



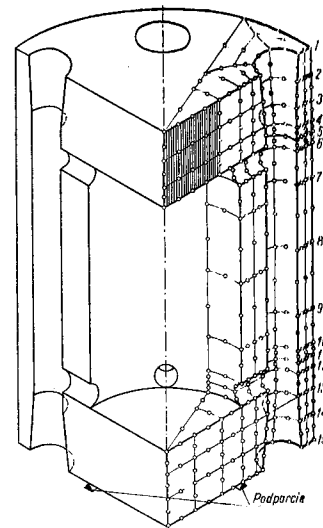
Rys. 9.10. Naprężenia  $\sigma_z$  w przekroju pionowym zapory łukowej z rys. 9.8



Rys. 9.11. Zapora lukowa z włączonym do obliczeń posadowieniem: a) podział zapory na elementy, b) automatycznie wykonany rysunek izometryczny zapory dla analizy trójwymiarowej (rysunek rozkłidelonej na elementy i „szyte” zapory). Wyłączono elementy posadowienia. Linie niewidoczne wrykowano ręcznie

zapory lukowej przedstawiono rozwinięcie podziału na elementy izoparametryczne, otrzymane bezpośrednio z analizy danych na automatycznej maszynie kreślącej. Takie rozwinięcia przydatne są nie tylko dla wizualnej ilustracji zagadnienia; stają się one podstawowym elementem *sprawdzenia poprawności danych*, gdyż pozwalają na wykrycie każdego większego błędu w opisie geometrycznym. Powiązania wszystkich wybranych punktów są sprawdzone automatycznie.

Rys. 9.12. Trójwymiarowa analiza zbiornika ciśnieniowego (z uwagi na symetrię badano wycinek 1/16 obwodu); całkowita liczba elementów — 96, węzłów — 707, stopni swobody — 2121

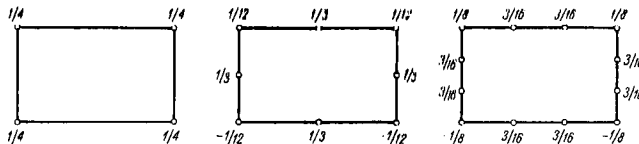


Bezładne opracowanie danych — w przypadku złożonych zagadnień trójwymiarowych — jest bardzo istotne z uwagi na skrócenie czasu pracy maszyny cyfrowej. Sprawdzanie danych według wymienionych tu (i oczywiście innych) sposobów powinno stanowić zasadniczą część każdego programu obliczeniowego.

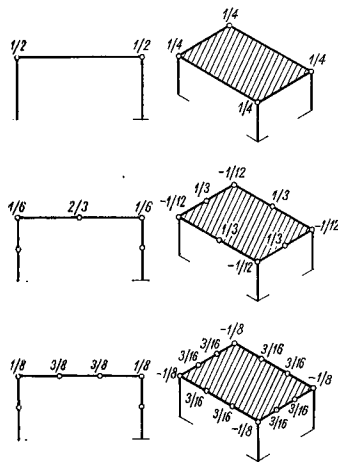
## 9.6. Uwagi ogólne o elementach wyższych rzędów

Zastosowanie elementów wyższego rzędu progresywnie powiększa odejście od łatwej dla fizycznego interpretowania najprostszej idealizacji zagadnienia. Nie ma to istotnych konsekwencji, o ile rzeczywiście udaje się uzyskać lepszą aproksymację; może jednak być czasem kłopotliwe w zastosowaniach praktycznych. Na przykład intuicyjne zastępowanie obciążeń ciągłych układem sił skupionych w węzłach przestaje być dostatecznie poprawne.

W rozdziale 4 pokazaliśmy przykładowo, że odpowiednio rozmieszczone siły węzłowe, pochodzące od ciężaru własnego elementu, dadzą się ostatecznie sprowadzić do trzech równych sił w węzłach. Wynik ten zgadza się z intuicją inżynierską. W przypadku sił od ciężaru własnego działających na element typu serendypowskiego (rys. 7.4) otrzymujemy rozkład przedstawiony na rys. 9.13. Tylko pierwszy z nich, dla najprostszego elementu, zgadza się ze „zdrowym rozsądkiem”. Wo



Rys. 9.13. Rozmieszczenie w węzłach równomiernie rozłożonych sił masowych dla serendipitowskiej rodziny elementów prostokątnych. Ułamki od całkowitego obciążenia



Rys. 9.14. Rozmieszczenie równomiernie rozłożonego obciążenia na powierzchni elementu rodziny serendipitowskiej, działającego w dwu lub trzech wymiarach

wszystkich innych pojawiają się „ujemne” oddziaływania w narożnych węzłach — fakt wcale nie „oczywisty”.

Co więcej, jeżeli elementy takie są ponadto zakrzywione, dystrybucja obciążenia staje się jeszcze bardziej skomplikowana. Należy więc zwrócić szczególną uwagę na właściwe dla danych elementów rozłożenie sił.

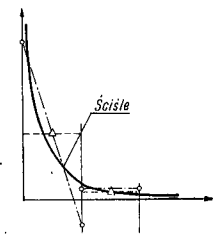
Inżynier stwierdzi w tym miejscu, że z fizycznego punktu widzenia rezultaty będą stale takie same, jeśli w granicy przyłożą się takie same obciążenie do każdego węzła. Istotnie, powinno tak być; ale przy podziale na elementy o skończonych wymiarach większą dokładność uzyskamy z nienaturalnego, co prawda, lecz właściwego dla danego typu elementów rozkładu obciążenia.

Podobnie siły powierzchniowe są zastępowane nie dającym się intuicyjnie przewidzieć układem sił skupionych (rys. 9.14).

Rozważania powyższe stanowią prostą inżynierską interpretację nil oddziaływania między elementami.

Natomiast przedstawienie naprężeń w obszarach obejmujących nieciągłości (osobliwości), jak np. obciążenie skupione, jest zawodne i często mogą wystąpić nieprzewidziane wartości naprężenia w otoczeniu takich obciążeń. Nie oznaczają to jednak zmniejszenia dokładności, lecz wskazuje na konieczność zabiegów ulepszających podział i uśredniających wartości, aby poprawnie przedstawić efekty rzeczywiste.

Na rysunku 9.15 przedstawiono jakościowe porównanie naprężeń uzyskanych w wyniku zastosowania wokół takiej nieciągłości raz elementów o stałych i raz



Rys. 9.15. Anomalie mogące wystąpić w otoczeniu obciążenia skupionego, wywołane „ulepszonym” przedstawieniem elementów  
 — — element o stałym odkształceniu,  
 — — element o liniowo-zmiennym odkształceniu

o liniowo-zmiennym odkształceniu. Elementy bardziej złożone mogą dawać, co prawda, lepsze przybliżenie w samej nieciągłości, ale też mogą spowodować pewne nienaturalne efekty w jej otoczeniu, czego znów nie wykazują elementy najprostsze. Oczywiście, w takich przypadkach należy dokonać odpowiedniego wyrównania wyników i liczyć się z tym przy ich interpretacji.

**Cytowane publikacje**

- [1] H. M. Irons: Engineering Application of numerical integration in stiffness method, J. A.I.A.A., 4, s. 2035-37, 1966.
- [2] H. M. Irons: Comment on Stiffness Matrices for sector element, by I. R. Raju and A. K. Rao. J. A.I.A.A., 7, s. 156-7, 1969.
- [3] O. C. Zienkiewicz, B. M. Irons, J. Ergatoudis, A. Ahmad, F. C. Scott: Isoparametric and associated element families for two and three dimensional analysis, Proc. Course on Finite Element Methods in Stress Analysis, ed. I. Holand and K. Bell, Trondheim Tech. University, 1969.
- [4] H. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: The isoparametric finite element system — a new concept in finite element analysis. Proc. Conf. Recent Advances in Stress Analysis, Royal Aero Soc., 1968.
- [5] J. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Curved, Isoparametric, „Quadrilateral” elements for finite element analysis, Int. J. Solids & Struct., 4, s. 31-42, 1968.
- [6] J. G. Ergatoudis: Isoparametric elements in two and three dimensional analysis, Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea 1968.
- [7] J. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Three dimensional analysis of arch dams and their foundations, Symposium on Arch Dams, Inst. Civ. Eng., London, 1968.
- [8] H. M. Irons: Testing and assessing finite elements by an eigenvalue technique, Proc. Conf. on Recent developments in Stress Analysis, J. Br. Soc. St. An., Royal Aero Soc. 1968.

## 10. Zginanie płyt

### 10.1. Wstęp

We wszystkich zagadnieniach rozpatrywanych w poprzednich rozdziałach związki „naprężenie-odkształcenie” były zadawane w swej ścisłej postaci, natomiast w czasie rozwiązania wprowadzano przybliżenia. W klasycznej teorii płyt [1] pewne przybliżenia wprowadzane są na początku, aby problem sprowadzić do dwu wymiarów. Chodzi tu o założenie liniowej zmienności odkształceń i naprężeń na prostych prostopadłych do płaszczyzny płyty. Tak zwane „ściśle” rozwiązanie według teorii płyt jest zatem ważne tylko wówczas, gdy założenie to jest spełnione. Dotyczy to przypadku płyt cienkich i małych ugięć.

W poniżej przedstawionych rozwiązaniach punktem wyjścia jest ta właśnie uproszczona teoria płyt w sensie klasycznym; dlatego wyniki uzyskanych rozwiązań numerycznych muszą być porównywane z rozwiązaniami według klasycznej teorii płyt; podlegają one bowiem tym samym ograniczeniom.

Stan odkształceń płyty może być całkowicie opisany za pomocą jednej wielkości. Jest nią poprzeczne przemieszczenie w „płaszczyzny środkowej” płyty. Jednak warunki ciągłości pomiędzy elementami są teraz nałożone nie tylko na te przemieszczenia, ale również na ich pochodne. Należy zapewnić warunek, aby płyta pozostawała ciągła i nie tworzyły się „przeguby”<sup>1)</sup>. W każdym węźle muszą być zatem spełnione trzy warunki równowagi i warunki ciągłości.

Określenie odpowiedniej funkcji kształtu jest tu znacznie bardziej skomplikowane. Istotnie, jeśli wymagana jest całkowita ciągłość nachyleń na powierzchniach między elementami, to matematyczne i rachunkowe trudności rosną często nieproporcjonalnie szybko. Jednak można stosunkowo prosto otrzymać funkcje kształtu, które będą zabezpieczać ciągłość  $w$ , lecz mogą nie zapewniać ciągłości nachyleń między elementami (oczywiście nie w węźle, w którym jest ona założona). Jeśli takie funkcje spełniają kryterium „stałego odkształcenia”, wówczas zawsze można uzyskać zbieżność (por. rozdz. 2). Pierwsza część niniejszego rozdziału jest poświęcona takim „niedostosowanym” funkcjom kształtu. W drugiej części wprowadzone są nowe funkcje, za pomocą których ciągłość zostaje przywrócona. Rozwiązanie za pomocą takich „dostosowanych” funkcji kształtu daje

<sup>1)</sup> Jeśli przeguby powstają, wówczas druga pochodna krzywizny staje się nieskończonością wielką i w wyrażeniu na energię wchodzi wyraz nieskończoność duża.



granice poprawnego rozwiązania, lecz w pewnych przypadkach odbiega od dolnej granicy dokładności. Dla praktycznych zastosowań można polecić metody dopatrzane w pierwszej części.

Najprostszym kształtem elementu jest w tym przypadku prostokąt; on też został rozpatrzony najpierw. Trójkatne i czworoboczne elementy sprawiają pewne trudności i są rozważane w następnej kolejności; przy obliczaniu powłok lub płyt o dowolnym kształcie takie elementy są bardzo wygodne.

## 10.2. Sformułowanie zadania płyty w przemieszczeniach

Przemieszczenia płyty według teorii płyt cienkich są jednoznacznie określone przez ugięcie  $w$ , mierzone w każdym jej punkcie. Zapiszmy to w ogólnej postaci jako

$$w = [N] \{\delta\}^e, \quad (10-1)$$

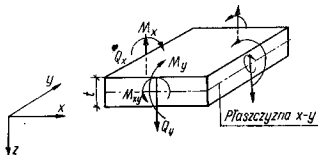
gdzie funkcje kształtu  $[N]$  są zależne od współrzędnych kartezjańskich  $x$  i  $y$ , zaś  $\{\delta\}^e$  jest macierzą parametrów węzłowych elementu.

Uogólnienie „odkształcenia” i „naprężenia” należy teraz określić tak, aby ich iloczyn skalarny stanowił pracę wewnętrzną (por. rozdz. 2). Musimy zatem zdefiniować „odkształcenia” jako

$$\{\varepsilon\} = + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (10-2)$$

Odpowiadające im „naprężenia” będą w istocie momentami (zginającymi i skręcającymi) na jednostkę długości, w kierunkach  $x$  i  $y$  (rys. 10.1) [1]

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10-3)$$



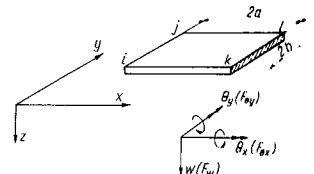
Rys. 10.1. Wypadkowe napięcie, czyli „naprężenia” przy zginaniu płyty

Ponieważ zwiększamy naprężenia i odkształcenia zmieniają się liniowo na grubości płyty [1], można więc je znaleźć z takich wyrażań, jak

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{t^2} z \quad \text{itd.},$$

gdzie  $z$  należy zmierzyć od środkowej płaszczyzny płyty, zaś  $t$  jest jej grubością. Iloczyn wyrażań (10-2) i (10-3) odpowiada wówczas dokładnie definicji pracy wewnętrznej.

Ponieważ odkształcenia są obecnie zdefiniowane przez drugie pochodne, kryterium ciągłości wymaga, aby dla funkcji kształtu zarówno  $w$  jak i jej pochodna normalna względem krawędzi między dwoma elementami były ciągłe. Kryterium stałego odkształcenia wymaga ponadto, aby wewnętrzny elementu druga pochodna zachowywała stałą, choć dowolną, wartość. Aby co najmniej spełnić w przybliżeniu ciągłość kształtu, rozpatrywane są trzy składowe przemieszczenia jako parametry węzłowe: pierwsze — samo przemieszczenie  $w_n$  w kierunku  $z$ , drugie — obrót  $(\theta_x)_n$  wokół osi  $x$  i trzecie — obrót  $(\theta_y)_n$  wokół osi  $y$ . Na rys. 10.2 pokazano te obroty i ich dodatnie kierunki, określone za pomocą reguły prawej ręki. Ich wielkości wskazują wektory skierowane wzdłuż odpowiednich osi.



Rys. 10.2. Prostokątny element płyty

Odpowiadające sobie siły i przemieszczenia

Oczywiście, pochodne  $w$  i obroty są identyczne (z dokładnością do znaku), możemy więc napisać

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix} \quad (10-4)$$

Siły „węzłowe” odpowiadające tym „przemieszczeniom” można interpretować jako jedną siłę w sensie dosłownym i dwa momenty

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{wi} \\ F_{\theta xi} \\ F_{\theta yi} \end{Bmatrix} \quad (10-5)$$

jak pokazano na rys. 10.2.

Sztywność i inne macierze elementu otrzymanymi w zwykły sposób, zgodnie z wyrażeniami z rozdz. 2, gdy tylko zostanie określona macierz  $[B]$ . Z definicji (10-1) i (10-2) wynika bezpośrednio, że

$$[B_i] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_i] \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} [N_i] \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [N_i] \end{bmatrix} \quad (10-6)$$

Nawiasy, w których umieszczono funkcje kształtu oznaczają, że są to wielkości macierzowe, zależne od trzech składowych.

Macierz sprężystości  $[D]$  określa się w następujący sposób

$$\{\sigma\} = \{M\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}. \quad (10-7)$$

Dla płyty izotropowej (por. *Timoshenko i Woinowsky-Krieger* [1] s. 20 i 88)<sup>1)</sup> mamy

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (10-8)$$

Dla płyty ortotropowej o głównych kierunkach ortotropii pokrywających się z osiami  $x$  i  $y$  niezbędne są cztery stałe, określające jej zachowanie się, tj.

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (10-9)$$

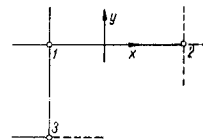
Stałe te można powiązać z własnościami sprężystymi materiału, jak pokazano w pracy [1], jednak wygodniej jest pozostawić je w powyższej postaci, ponieważ teorię płyt stosuje się często do rozwiązywania zadań dotyczących rusztów. Oczywiście, dla bardziej złożonych przypadków anizotropii do zdefiniowania macierzy  $[D]$  potrzeba jest co najwyżej sześciu stałych, chociaż pozostaje ona zawsze symetryczna.

### 10.3. Wymagana ciągłość dla funkcji kształtu

Aby zapewnić ciągłość zarówno  $w$  jak i jej pochodnych normalnych wzdłuż krawędzi elementu, powinniśmy zdefiniować jednoznacznie zmienność  $w$  oraz  $\frac{\partial w}{\partial n}$  za pomocą ich wartości w punktach tych krawędzi.

<sup>1)</sup> Strony podano wg wydania polskiego, Arkady, 1962 (przyp. tłum.).

Rozpatrzmy ryc. 10.3 przedstawiający krawędź 1-2 elementu prostokątnego. Normalny kierunek  $n$  jest tutaj kierunkiem  $y$ , wymagamy więc, aby  $w$  i  $\frac{\partial w}{\partial y}$  były jednoznacznie określone za pomocą wartości  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  i  $\frac{\partial w}{\partial y}$  w węzłach leżących na tej krawędzi.



Rys. 10.3. Ciągłość pochodnej normalnej

Postępując w myśl zasad podanych w rozdz. 7 napiszemy dla krawędzi 1-2

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \dots \quad (10-10)$$

i

$$\frac{\partial w}{\partial y} = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \dots, \quad (10-11)$$

zaś liczbę stałych w tych wyrażeniach dobierzemy tak, aby można było określić je przez parametry węzłowe związane z linią 1-2.

Tak więc na przykład, gdy na krawędzi są jedynie dwa węzły, wystarczy wyrażenie sześciennic, ponieważ  $w$  oraz  $\frac{\partial w}{\partial x}$  są określone w każdym z nich. Podobnie, dopuszczalna jest jedynie liniowa, czyli o dwu wyrazach, zmienność  $\frac{\partial w}{\partial y}$ .

Zauważmy jednak, że podobne rozumowanie można przeprowadzić w odniesieniu do kierunku  $y$ , zakładając ciągłość  $\frac{\partial w}{\partial x}$  wzdłuż tego kierunku. W ten sposób znajdujemy wzdłuż 1-2

$$\frac{\partial w}{\partial y} \text{ (zależy tylko od jednego parametru linii 1-2),}$$

zaś wzdłuż 1-3

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ (zależy tylko od jednego parametru linii 1-3).}$$

Różniczkując pierwsze względem  $x$  mamy dla linii 1-2

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \text{ (zależy tylko od parametrów węzłowych na linii 1-2),}$$

« dla linii 1-3

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \text{ (zależy tylko od parametrów węzłów na linii 1-3).}$$

We wspólnym punkcie 1 wynika z tego niezgodność; nie możemy mieć bowiem tu

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

dla dowolnych wartości parametrów w węzłach 2 i 3.

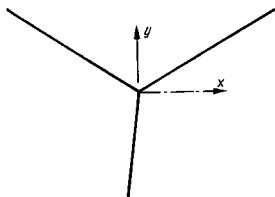
Nie można zatem dobrać prostych wielomianowych wyrażeń dla funkcji kształtu, zapewniających pełną zgodność, jeżeli w węzłach zadane jest tylko  $w$  i jego pochodne normalne [2].

Jeśli założymy takie funkcje, które spełniałyby warunki zgodności i miały trzy zmienne węzłowe, to okaże się, że nie będą one miały ciągłych pochodnych, a ich pochodna mieszana nie będzie jednoznaczna. Niektóre z takich funkcji omówiono w drugiej części niniejszego rozdziału [4], [7].

Powsyższe badania przeprowadzone zostały dla elementu prostokątnego. Oczywiście, podobne rozważania można przeprowadzić w odniesieniu do dwu dowolnych kierunków krawędzi z węzłem narożnym 1.

Sposób ominięcia trudności wspomnianych wcześniej może być prosty. Powinniśmy mianowicie potraktować pochodną mieszaną jako jeden z parametrów węzłowych. Dla przypadku elementu prostokątnego jest to wygodne i możliwe. Proste funkcje tego typu były proponowane przez *Bognera* i innych [8] oraz zastosowane z powodzeniem.

Niestety, rozszerzenie tego „chwytu” na węzły, w których zbiegają się krawędzie nieprostokątnie względem siebie (rys. 10.4), na ogół jest niemożliwe. Wymaganie ciągłości pochodnych mieszanych narzuca tu konieczność wprowadzenia — jako parametrów węzłowych — *wszystkich drugich pochodnych w węzle*.



Rys. 10.4. Węzeł, w którym elementy spotykają się w różnych kierunkach

To jednak narusza wymagania fizyczne, gdy sztywność płyty zmienia się skokami od elementu do elementu; wówczas to bowiem nie da się utrzymać równości momentów normalnych do krawędzi. Jednak i ten sposób dla płyt jednorodnych był stosowany z powodzeniem [9], [10], [11].

*Smith* [9] badał efekt założenia takich „nadmiernych” ciągłości dla pochodnych wszystkich rzędów.

Trudność w znalezieniu funkcji przemieszczeń gwarantujących ciągłość pochodnych prowadzi do prób ignorowania pełnej ich ciągłości, przy zachowaniu pozostałych niezbędnych kryteriów. Wychodząc z prostego, opartego na intuicji przekonania, że narzucanie ciągłości pochodnych w węzłach musi doprowadzić

przy zagęszczeniu podzielnu do funkcji pochodnych, opracowano bardzo skuteczne funkcje kształtu dla niektórych elementów [12] + [15]. Zbieżność uzyskiwanych wyników może być zbadana także za pomocą innych sposobów niż podane w rozdz. 2 i 3 [4], [16]. Okazało się, że w pewnych okolicznościach istnieją małe błędy w zbieżności [4].

Prostota i praktyczna przydatność takich elementów usprawiedliwia bliższe ich omówienie w dalszym ciągu.

## 10.4. Elementy prostokątne o węzłach w narożach

**10.4.1. Funkcje kształtu.** Rozpatrzmy prostokątny element płyty  $ijkl$ , pokrywający się z płaszczyzną  $xy$  — jak pokazano na rys. 10.2. W każdym węzle zadano są przemieszczenia  $\{\delta_n\}$ . Mają one trzy składowe: przemieszczenie  $w_n$  w kierunku  $z$ , obrót  $(\theta_x)_n$  wokół osi  $x$  i obrót  $(\theta_y)_n$  wokół osi  $y$ . Przemieszczenia węzłów są zdefiniowane za pomocą równania (10-4), podczas gdy przemieszczenia elementu będą zadane poprzez wypisanie przemieszczeń poszczególnych węzłów elementu, ogólnie — czterech, w postaci wektora

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (10-12)$$

Zwykle dla zdefiniowania funkcji kształtu używa się wielomianów. W naszym przypadku występuje dwanaście parametrów. Gdyby zastosować wielomian 4-go stopnia, wówczas należałoby opuścić niektóre wyrazy, gdyż jest ich czternaście.

Można przyjąć następujący zapis

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (10-13)$$

Ma to pewne zalety; w szczególności wzdłuż każdego  $x = \text{const}$  i  $y = \text{const}$ , a więc wzdłuż krawędzi elementu przemieszczenie  $w$  opisane jest za pomocą funkcji trzeciego stopnia. Funkcję taką określają jednoznacznie cztery stałe; są nimi dwie wartości kątów obrotu i dwie wartości przemieszczeń na końcach krawędzi elementu. Ponieważ wartości te w węzłach są jednakowe dla stykających się elementów, ciągłość  $w$  jest więc zachowana wzdłuż całej wspólnej krawędzi.

Zauważmy, że gradient  $w$  normalny do dowolnej granicznej linii zmienia się wzdłuż niej w sposób paraboliczny (można rozpatrzeć, np.  $\partial w / \partial x$  wzdłuż linii, dla której  $x = \text{const}$ ). Ponieważ na takich liniach są zdefiniowane tylko dwie wartości nachylenia normalnej, parabola nie jest określona jednoznacznie; ogólnie zatem biorąc, może zachodzić nieciągłość nachylenia normalnej. Dlatego też funkcje te zwane są „niedostosowanymi”.

Stale  $\alpha_1$  do  $\alpha_{12}$  można określić, pisząc dwanaście równań wiążących wielkości  $w$  i jej pochodnych w węzłach, gdzie współrzędne przyjmują zadane wartości. Dla przykładu:

$$w_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \dots$$

$$\left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i = \theta_{xi} = -\alpha_3 + \dots$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \theta_{yi} = \alpha_2 + \dots$$

.....

Te dwanaście równań możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\{\delta\}^e = [C]\{\alpha\}, \quad (10-14)$$

gdzie:  $[C]$  — macierz  $12 \times 12$  zależna od współrzędnych węzłów,  $\{\alpha\}$  — macierz-vektor z dwunastu nieznanymi stałymi.

Odwracając równanie (10-14) mamy

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{\delta\}^e. \quad (10-15)$$

Odwroćenie to może być dokonane na maszynie lub też, jeśli potrzebna jest jawna postać wyrażenia dla sztywności itd., poprzez algebraiczne przekształcenie. Zostało ono wykonane przez *Zienkiewicza* i *Cheunga* w pracy [12].

Teraz możemy zapisać wyrażenie na przemieszczenia wewnątrz elementu w postaci standardowej

$$\{f\} = w = [N]\{\delta\}^e = [P][C]^{-1}\{\delta\}^e, \quad (10-16)$$

gdzie

$$[P] = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3).$$

Jawna postać powyższego wyrażenia została wyprowadzona przez *Melosh*a [17].

Wyrażenia te najprościej można zapisać wprowadzając znormalizowane współrzędne omówione w rozdz. 8; zatem dla każdego węzła mamy

$$[N]_i = \frac{1}{2} [(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2) - a\xi_i(\xi_0 + 1)^2(\xi_0 - 1)(\eta_0 + 1)b\eta_i(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)^2(\eta_0 - 1)], \quad (10-17)$$

gdzie:

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}, \quad \eta = \frac{y - y_c}{b},$$

$$\xi_0 = \xi \xi_i, \quad \eta_0 = \eta \eta_i.$$

Postać  $[B]$  otrzymuje się bezpośrednio z równania (10-13); ponieważ

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -2\alpha_4 - 6\alpha_7x - 2\alpha_8y - 6\alpha_{11}xy \\ -2\alpha_6 - 2\alpha_9x - 6\alpha_{10}y - 6\alpha_{12}xy \\ 2\alpha_5 + 4\alpha_8x + 4\alpha_9y + 6\alpha_{11}x^2 + 6\alpha_{12}y^2 \end{Bmatrix} \quad (10-18)$$

zatem możemy napisać

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\} = [Q][C]^{-1}\{\delta\}^e \quad \text{oraz} \quad [B] = [Q][C]^{-1},$$

gdzie

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0, 0, 0, -2, 0, 0, -6x, -2y, 0, 0, -6xy, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, -2x, -6y, 0, -6xy \\ 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 4x, 4y, 0, 6x^2, 6y^2 \end{bmatrix} \quad (10-19)$$

Warto tutaj zauważyć, że wybrana w ten sposób funkcja przemieszczeń daje stałe wartości odkształcenia<sup>1)</sup> spełniając tym samym kryterium zbieżności określone w rozdz. 2.

**10.4.2. Macierze sztywności i obciążenia.** Macierz sztywności, wiążącą siły węzłowe (zadane przez siłę poprzeczną i dwa momenty w każdym węźle) z odpowiadającymi im przemieszczeniami węzłów, można zapisać zgodnie z równaniem (2-10)

$$[k] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy. \quad (10-20)$$

Po podstawieniu zależności (10-18) i założeniu  $t = \text{const}$  wewnątrz elementu macierz ta przyjmuje następującą postać

$$[k] = \{[C]^{-1}\}^T \left( \iint [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [C]^{-1}. \quad (10-21)$$

Wyrazy nie zawierające  $x$  i  $y$  mogą być teraz wyłączone z operacji całkowania, a wyrażenie pod znakiem całki daje się bez trudności wymnożyć i scałkować.

Rozwinięte wyrażenie dla macierzy sztywności  $[k]$  zostało obliczone dla przypadku materiału ortotropowego; wyniki zestawiono w tabl. 10.1.

Odpowiadając temu macierz naprężeń dla momentów wewnętrznych we wszystkich węzłach podano w tabl. 10.2. (Obie tablice dotyczą rys. 10.3).

<sup>1)</sup> Jeżeli  $\alpha_7$  do  $\alpha_{12}$  przyjmują wartości zerowe, wówczas odkształcenie jest stałe. Odpowiadając temu  $\{\delta\}^e$  można znaleźć z równania (10-14). Ponieważ istnieje tylko jedna zależność między  $\{\delta\}^e$  a  $\{\alpha\}$ , stan ten jest zatem jedyny. To wszystko wskazuje, że istnieje  $[C]^{-1}$ . Odwroćenie algebraiczne wskazuje ponadto, że macierz  $[C]$  nigdy nie jest osobliwa.



Macierz naprężeń  $(p = \frac{\sigma}{b})$  dla elementu prostokątnego (rys. 10.3) (materiał ortotropowy)

$6p^{-1}D_x + 6pD_x$	$8bD_x$	$-6pD_1$	$-4aD_1$	0	$-6p^{-1}D_x$	0	$4bD_x$	0	0	0
$6pD_y + 6p^{-1}D_1$	$8bD_1$	$-6pD_y$	$-4aD_y$	0	$-6p^{-1}D_1$	0	$4bD_1$	0	0	0
$-2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	$-4aD_{xy}$	0	$4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	0	$-2D_{xy}$	0	0
$-6pD_1$	$4aD_1$	0	$6p^{-1}D_x + 6pD_1$	$8aD_1$	$8bD_x$	0	0	0	$-6p^{-1}D_x$	$4bD_x$
$-6pD_y$	$4aD_y$	0	$6pD_y + 6p^{-1}D_1$	$8aD_y$	$8bD_1$	0	0	0	$-6p^{-1}D_1$	$4bD_1$
$-2D_{xy}$	0	$-4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	$4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	0	0	$-2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$
$-6p^{-1}D_x$	0	$-4bD_x$	0	0	0	$6p^{-1}D_x + 6pD_1$	$-8aD_1$	$-8bD_x$	$-6pD_1$	$-4aD_1$
$-6p^{-1}D_1$	0	$-4bD_1$	0	0	0	$6pD_y + 6p^{-1}D_1$	$-8aD_y$	$-8bD_1$	$-6pD_y$	$-4aD_y$
$-2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	0	$2D_{xy}$	0	0	$2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	$-4aD_{xy}$	$-2D_y$	0
0	0	0	$-6p^{-1}D_x$	0	$-4bD_x$	$-6pD_1$	$4aD_1$	0	$6p^{-1}D_x$	$8aD_1$
0	0	0	$-6p^{-1}D_1$	0	$-4bD_1$	$-6pD_y$	$4aD_y$	0	$6p^{-1}D_1$	$8aD_y$
$-2D_{xy}$	0	0	$2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	0	$2D_{xy}$	0	$-4aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$

$$\begin{bmatrix} M_1^{(1)} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{xy} \end{bmatrix}$

Tablica 10.3

Wektor obciążeń dla elementu prostokątnego (rys. 10.3) pod obciążeniem równomiernym  $q$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_j \\ F_k \\ F_i \end{Bmatrix} = 4qab \begin{bmatrix} 1/4 \\ -b/12 \\ a/12 \\ 1/4 \\ b/12 \\ a/12 \\ 1/4 \\ -b/12 \\ -a/12 \\ 1/4 \\ b/12 \\ -a/12 \end{bmatrix} \quad F_i = \begin{Bmatrix} F_{wi} \\ F_{oxi} \\ F_{oyi} \end{Bmatrix}$$

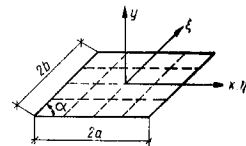
się z góry odkształcenia dodatkowe w płycie; zagadnienie łączne może być rozwiązane, biorąc pod uwagę tylko płaski stan naprężeń, podobnie jak przy zginaniu.

### 10.5. Elementy czworoboczne

Prostokątnych elementów nie można w sposób prosty uogólnić na kształty czworoboczne. Transformacja współrzędnych typu opisanego w rozdz. 9 może być co prawda wykonana, lecz jak okazuje się w tym przypadku nie będzie spełnione kryterium stałej krzywizny.

Zachowanie się funkcji jest nadal zwoiczne. Tylko dla przypadku równoległoboku, stosując wyłącznie funkcje  $\xi$  i  $\eta$ , można zachować wymaganą stałą krzywizny.

Takie elementy zaproponowane zostały w dyskusji nad pracą [12], a macierze sztywności dla nich opracował Dawe [14]. Nieco inny układ funkcji kształtu był proponowany przez Argyrisa [15].



Rys. 10.5. Element równoległoboczny i współrzędne skłonne

Dla równoległoboku można powiązać współrzędne lokalne z globalnymi za pomocą ściślejszych wyrażeń (rys. 10.5):

$$\begin{aligned} \xi &= (x-y) \cotan \alpha / a, \\ \eta &= y \operatorname{cosec} \alpha / b \end{aligned} \quad (10-24)$$

i dalej wprowadzić wszystkie potrzebne zależności.

## 10.6. Elementy trójkątne

**10.6.1. Funkcje kształtu.** Na pierwszy rzut oka widać, że znów należy użyć prostego wyrażenia wielomianowego w sposób podobny do opisanego powyżej. Ponieważ występuje teraz tylko dziewięć niezależnych parametrów, można przyjęc tylko dziewięć wyrazów rozwinięcia. Wynika stąd bezpośrednio trudność w otrzymaniu pełnego sześciennego wyrażenia zawierającego 10 wyrazów, gdyż pominięcia któregoś z nich dokonuje się raczej dowolnie. Aby uzyskać pewną symetrię wynikającą z zastosowania 10 wyrazów, przyjmuje się dwa współczynniki równe sobie, np.  $\alpha_8 = \alpha_9$ , w ten sposób ograniczając liczbę niewiadomych współczynników do dziewięciu. Pozostałe wyrazy mogą być traktowane jako parametry zadania.

Zbadano szereg takich możliwości i zaproponowano rozwiązania; powstał jednak inny bardziej poważny problem. Macierz odpowiadająca [C] z równania (10-14) staje się osobliwa dla pewnych kierunków boków trójkąta (np., gdy dwa boki trójkąta są równoległe do osi  $x$  i  $y$ ).

Trudności związanych z tą asymetrią można uniknąć, stosując współrzędne powierzchniowe opisane w rozdz. 8. Są one niejako w sposób naturalny przystosowane do trójkątnego kształtu elementów.

Jak i poprzednio, stosujemy rozwinięcia w wielomiany; warto zauważyć, że w tych współrzędnych występują one w odmiennej postaci. Na przykład

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3$$

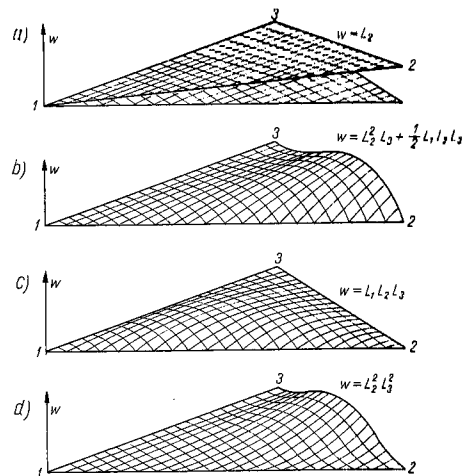
jest *pełnym* wielomianem liniowym, a

$$\alpha_1 L_1 L_2 + \alpha_2 L_2 L_3 + \alpha_3 L_3 L_1 + \alpha_4 L_1^2 + \alpha_5 L_2^2 + \alpha_6 L_3^2$$

zawiera wszystkie sześć wyrazów rozwinięcia kwadratowego (w tym tak że i rozwinięcie liniowe). Dziesięć wyrazów sześciennych jest ukształtowanych z iloczynem wszystkich możliwych kombinacji, tj.:

$$L_1^3, L_2^3, L_3^3; \quad L_1^2 L_2, L_2^2 L_3, L_3^2 L_1; \quad L_1 L_2^2, L_2 L_3^2, L_3 L_1^2; \quad L_1 L_2 L_3.$$

Dla elementu o dziewięciu stopniach swobody każdy z tych wyrazów może być użyty w dowolnej kombinacji, należy jednak pamiętać, że potrzeba tylko dziewięć niezależnych funkcji dla osiągnięcia stanu stałej krzywizny. Rys. 10.6 przedstawia cztery szczególnie ważne funkcje. Pierwsza (rys. 10.6a) jest jedną z trzech funkcji reprezentujących przemieszczenie płyty bez występowania naprężeń. Oczywiście, ten rodzaj funkcji musi być użyty. Następne funkcje typu  $L_1^2 L_2$  (jest ich sześć w rozwinięciu sześciennym) dają odkształcenie podobne do przedstawionego na rys. 10.6b (choć nie identyczne). Wreszcie funkcja  $L_1 L_2 L_3$  (rys. 10.6c) reprezentuje wyłącznie odkształcenia wewnątrz elementu, przy zerowych przemieszczeniach i pochodnych we wszystkich trzech węzłach. Funkcja ta ma zastosowanie dla parametrów pozawęzłowych lub wewnętrznych; nie można jej stosować osobno (bez innych), gdyż nie jest uzależniona od przemieszczeń węzłów, natomiast może być dodana do każdej innej funkcji w dowolnym stosunku.



Rys. 10.6. Niektóre podstawowe funkcje wielomianów we współrzędnych powierzchniowych (opis w tekście)

Wynika stąd, że funkcje drugiego rodzaju (z omówionych) są najbardziej interesujące. Mają one zerowe wartości w każdym węzle, a ponadto zerowe nachylenie wzdłuż jednej z krawędzi. Liniowa kombinacja dwu takich funkcji ( $1/2 L_1 L_2$  i  $L_3^2 L_1$ ) będzie nadawać się do określenia dowolnej wymaganej pochodnej w kierunkach  $x$  i  $y$ .

Dla pełnej charakterystyki można jeszcze rozpatrzeć odmianę typu:  $L_1^2 L_3$  i  $L_1 L_2 L_3$  (przy czym ostatni wyraz nie ma wpływu na wielkości w węzłach).

Ponieważ omówione dwa ostatnie rodzaje funkcji są jedynymi wpływającymi na krzywizny, należy zagwarantować, aby ogólny, dowolny stan krzywizny przy zerowych wartościach  $w$  w węzłach zawierał się w liniowej kombinacji sześciu tych funkcji.

W zapisie algebraicznym oznacza to, że wyrażenie

$$A_1 L_1 L_2 + A_2 L_2 L_3 + \dots + A_6 L_3^2$$

przy dowolnych wartościach współczynników  $A$  może być zastąpione przez odpowiednią kombinację

$$B_1 (L_3^2 L_1 + c L_1 L_2 L_3) + B_2 (L_1^2 L_2 + c L_1 L_2 L_3) + \dots$$

przy tym samym układzie sześciu współczynników  $B$ . Można wykazać, że jest to możliwe tylko wtedy, gdy  $c = 1/2$ . Zatem rodzaj funkcji podany na rys. 10.6b jest jednym z podstawowych, niezbędnych do tworzenia funkcji kształtu.

Możemy teraz opisać przemieszczenia płyty w następujący sposób

$$w = \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 + \beta_3 L_3 + \beta_4 \left( L_1^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) + \dots + \beta_9 \left( L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \quad (10-25)$$

i podstawiając wartości węzłowe:  $w_i$ ,  $\theta_{xi} = -(\partial w / \partial y)_i$  oraz  $\theta_{yi} = (\partial w / \partial x)_i$  obliczyć stałe  $\beta$ , a zatem i funkcje kształtu.

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2 \text{ itd.}$$

i stosując definicje użyte w rozdz. 7 możemy typową funkcję kształtu dla węzła  $i$  zapisać w postaci

$$[N_i]^T = \begin{pmatrix} L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \\ b_3 \left( L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - b_2 \left( L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \\ c_3 \left( L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - c_2 \left( L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \end{pmatrix} \quad (10-26)$$

Dalsze dwie funkcje dla węzłów 2 i 3 zapiszemy przedstawiając cyklicznie indeksy 1, 2 i 3. Elementy opisane za pomocą powyższych funkcji przedstawione były po raz pierwszy w pracy [4].

**10.6.2. Macierze sztywności i obciążenia.** Mając definicje odkształceń wg (10-2) i macierz ogólną  $[B_i]$  wg (10-6) stwierdzamy, że niezbędne są drugie pochodne od  $[N]$ .

Jedyną nową okolicznością tutaj jest to, że należy różniczkować względem współrzędnych kartezjańskich  $x$  i  $y$ . Jest to proste, zważywszy że

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3} = b_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial}{\partial L_3} \text{ itd.} \quad (10-27)$$

Wszystkie wyrażenia pozostają wielomianami we współrzędnych powierzchniowych i można je łatwo skalkować w sposób ogólny; por. (7-34). Ostateczna postać dla macierzy sztywności i obciążenia jest dość długa; Czytelnik może znaleźć je w pracy [19].

Prościej jednak jest wykonać program na maszynie cyfrową, stosując całkowanie numeryczne, jak podano w rozdz. 8. Ponieważ macierz sztywności zawiera tylko wyrazy kwadratowe, więc całkowanie po trójkącie przy trzech zaledwie punktach daje ścisły wynik (por. tabl. 8.3), a czas maszyny przeznaczony na to całkowanie jest bardzo mały w porównaniu z czasem potrzebnym do uzyskania całek w postaci ogólnej.

Macierz „naprężeń” zawiera wyrażenia na momenty mające zmienność liniową. Jednak ponieważ funkcje kształtu nie są opisane przez pełne wielomiany sześć-

cienne, prowadzi to do złego przybliżenia powierzchni odkształconej i dlatego zwykle oblicza się momenty nie w węzłach (z ewentualnym późniejszym ich uśrednianiem), lecz w środkach elementów.

## 10.7. Zbieżność w elementach „niedostosowanych”

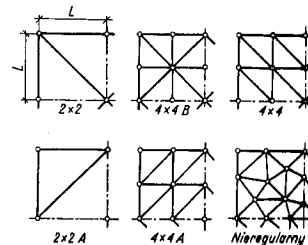
W opisanych powyżej dwóch typach elementów nie jest zachowana ciągłość pochodnych i dlatego zasada minimalizacji całkowitej energii potencjalnej spełniona jest tylko w przybliżeniu. W następnym paragrafie są jednak pokazane wyniki stosowania wspomnianych elementów, wskazujące na ich praktyczną przydatność. Czytelnik może mieć tu wątpliwość, dlaczego mimo niedoskonałości funkcji kształtu obserwuje się zbieżność do poprawnych wyników przy zagęszczeniu podziału na elementy. Chociaż wątpliwość ta jest nieco akademicka, wymaga jednak wyjaśnienia.

Walsz i inni [16] badali algorytm rodziny elementów prostokątnych i stwierdzili na podstawie porównania wyników z wynikami otrzymanymi z rozwiązania równań różniczkowych płyty (dla płyt izotropowych), że zbieżność ta przy zagęszczeniu podziału jest zapewniona. Nie można jednak uogólniać tych wniosków poza badane zagadnienie.

Irons [4] stwierdził, że elementy trójkątne dają ściśle rozwiązanie wówczas, gdy siatka podziału składa się z trzech rodzin równoodległych i równoległych linii.

Zastosowane tutaj rozumowanie było proste. Jeżeli zbiór dużej liczby elementów może dawać ścisłą odpowiedź przy wszelkich stanach stałej krzywizny, zatem, w granicy podziału, płyta zachowuje się zgodnie z zasadami fizycznymi, dotyczącymi nieskończenie małego elementu materialnego. Odwrotnie, gdy tak nie jest, zbieżności być nie może.

Istotnie, ten sam test zastosowany do siatki pokazanej na rys. 10.7 ( $4 \times 4B$ ), gdzie trójkąty otrzymano przez poprowadzenie dwu przekątnych kwadratu, prowadzi do błędu w przemieszczeniach wynoszącego ok. 1,5%. W tym przypadku „niedostosowane” trójkąty nie będą zatem dawać zbieżności do rozwiązania ścisłego; błąd będzie rzędu 1,5%. Podobny test był zastosowany do „niedo-



Rys. 10.7. Płyta kwadratowa; podział na elementy trójkątne



„niedostosowanych” elementów prostokątnych [4] i dla po raz pierwszy sprawdzonych zbliżności w przypadku tych elementów.

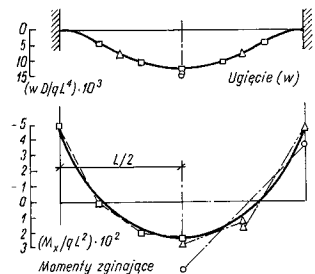
Dla większości praktycznych przypadków „niedostosowanych” jest wynikająca z zastosowania elementów trójkątnych „niedostosowanych” jest wystarczająca. Przy stosowanych w praktyce podziałach otrzymuje się nadwyżkę wartości wyników w stosunku do takich samych trójkątów „dostosowanych” [4]. Być może spowodowane jest to niemożnością zachowania granicznych wartości energii (por. rozdz. 2) oraz większą swobodą układania się w najwłaściwszy kształt trójkątów „niedostosowanych”.

## 10.8. Przykłady rozwiązań

### 10.8.1. Elementy prostokątne.

Aby określić dokładność i stopień zbliżności rozwiązań, ułożono program w oparciu o funkcje przemieszczenia podane wzorem (10-13) i rozwiązano kilka prostych przykładów testowych.

**Płyta kwadratowa izotropowa.** Na rys. 10.8 przedstawiono wyniki dla płyty kwadratowej o zamocowanych brzegach obciążonej równomiernie, przy podziale



Rys. 10.8. Płyta kwadratowa o brzegach zamocowanych; wyniki obliczone: — metoda różnic skończonych (siatka 16×16), metoda elementów skończonych: □ — siatka 6×6, —△— siatka 4×4, —○— siatka 2×2

Tablica 10.4

Obliczone ugięcia środka płyty kwadratowej dla różnych siatek podziału (elementy prostokątne) [20]

Siatka	Całkowita liczba węzłów	Płyta swobodnie podparta		Płyta utwierdzona	
		obciążenie równomierne $a$	siła skupiona $\beta$	obciążenie równomierne $a$	siła skupiona $\beta$
(2×2)	9	0,003446	0,013784	0,001480	0,005919
(4×4)	25	0,003939	0,012327	0,001403	0,006134
(8×8)	81	0,004033	0,011829	0,001304	0,005803
(12×12)	169	0,004050	0,011715	0,001283	0,005710
(16×16)	289	0,004056	0,011671	0,001275	0,005672
Ścisłe (Timoshenko)		0,004062	0,01160	0,00126	0,00560

$w_{max} = \alpha q L^4 / D$  dla równomiernego obciążenia  $q$ ;  $w_{max} = \beta P^2 / D$  dla siły skupionej w środku  $P$ .

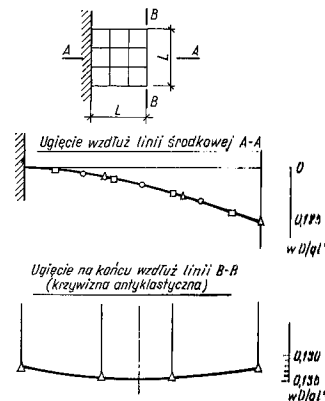
na elementy: 2×2, 4×4 i 6×6. Dokładność i ogólna zbliżność są przekonywujące.

Liniový rozdział momentów daje dobre przybliżenia do warunków rzeczywistych dla dowolnego sposobu podziału.

Zbliżność i dokładność zademonstrowano w sposób bardziej przekonujący w tabl. 10.4. Porównano w niej ugięcia w środku płyty dla przypadku siły skupionej i obciążenia równomiernie rozłożonego, przy różnych sposobach zamocowania brzegów. Przy siatce podziału 8×8 maksymalny błąd wynosi ok. 3%, w wszystkich przypadkach zbliżność jest zapewniona.

**Płyta wspornikowa.** Na rys. 10.9 przedstawiono ugięcia płyty wspornikowej. Otrzymane wyniki porównano tutaj z innymi numerycznymi i doświadczalnymi rozwiązaniami; uzyskano również dobrą dokładność.

**Płyta podparta w narożach** [12]. Kwadratowa płyta podparta w narożach na słupach była obliczana różnymi sposobami. W tabl. 10.5 porównano wyniki ana-



Rys. 10.9. Płyta kwadratowa wspornikowa obciążona równomiernie  
○ wyniki doświadczalne (Dalley, 1948), metoda elementów skończonych: □ siatka 3×3, △ siatka 5×5

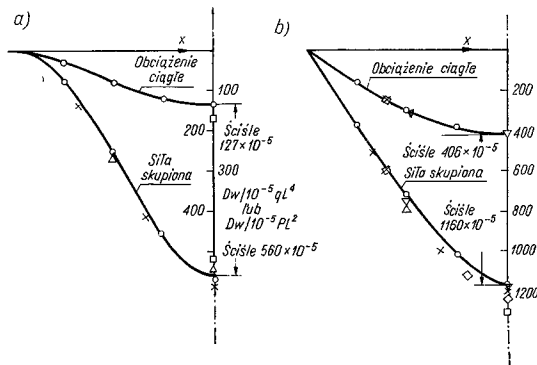
Tablica 10.5

	Punkt 1		Punkt 2	
	$w$	$M_x$	$w$	$M_x$
Elementy skończone				
2×2	0,0126	0,139	0,0176	0,093
4×4	0,0165	0,149	0,0232	0,108
6×6	0,0173	0,150	0,0244	0,109
Marcus	0,0180	0,154	0,0281	0,110
Lee i Ballesteros	0,0170	0,140	0,0265	0,109
Mnożnik	$qL^4/D$	$qL^2$	$qL^4/D$	$qL^2$

Punkt 1 — środek boku, punkt 2 — środek płyty.

lize metodą elementów skończonych z innymi rozwiązaniami przybliżonymi. Także i w tym przypadku, gdzie koncentracja sił w narożach komplikuje zagadnienie, uzyskano dosyć dobrą zgodność zarówno przemieszczeń jak i naprężeń.

**10.8.2. Elementy trójkątne.** Płyta kwadratowa izotropowa. W celu pokazania zbieżności wyników zastosowano dla płyty kwadratowej różny podział i kombinacje elementów trójkątnych. Jedne z nich oparto na kwadraty, inne obrano dowolnie w sposób nieregularny (rys. 10.7). Na rys. 10.10 przedstawiono przemieszczenia znalezione dla różnych warunków brzegowych i obciążeń płyty.



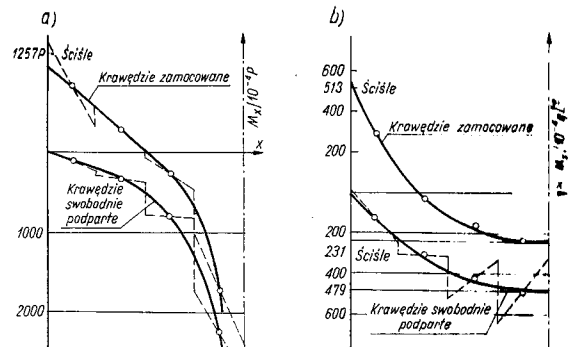
Rys. 10.10. Ugięcia na linii środkowej płyty od siły skupionej i obciążenia ciągłego w przypadku: a) krawędzi zamocowanych, b) swobodnie podpartych. Siatki elementów:  $\square$   $2 \times 2$ ,  $\triangle$   $4 \times 4$  (B),  $\nabla$   $4 \times 4$ ,  $\times$   $6 \times 6$  (B),  $\circ$   $8 \times 8$ ,  $\diamond$  nieregularna (60 elementów)

Znów uzyskano dobrą zbieżność i dokładność wyników (choć może nie tak dobrą, jak dla elementów prostokątnych).

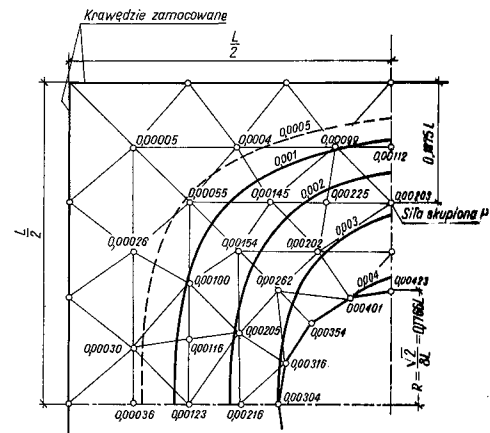
Na rysunku 10.11 pokazano zmienność momentów zginających w przekroju środkowym płyty. Jeśli zastosować wartości średnie, momenty pokrywają się z obliczonymi dokładnie. Nie można jednak powiedzieć, że liniowa zmienność naprężeń jest najbliższa do rzeczywistego ich rozkładu.

Toteż w zagadnieniach praktycznych zaleca się zwracać szczególną uwagę na naprężenia (momenty) w środkach elementów.

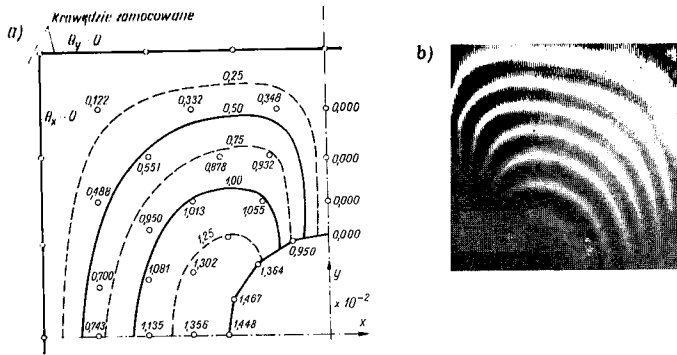
Płyta kwadratowa z otworem kołowym w środku. Choć dla tego przykładu brak jest rozwiązania ścisłego, podaje się go, aby pokazać przydatność elementów trójkątnych do analizy płyt z otworami, o dowolnych warunkach brzegowych.



Rys. 10.11. Rozkład momentów  $M_x$  w przekroju środkowym płyty: a) od siły skupionej  $P$ , b) od obciążenia ciągłego  $q$ ; wartości:  $\circ$  średnie, — otrzymane z rachunku, — uśrednione



Rys. 10.12. Płyta kwadratowa z otworem; warstwie ugięć  $(wD/Pl^4)$ . Pokazano podział na elementy trójkątne



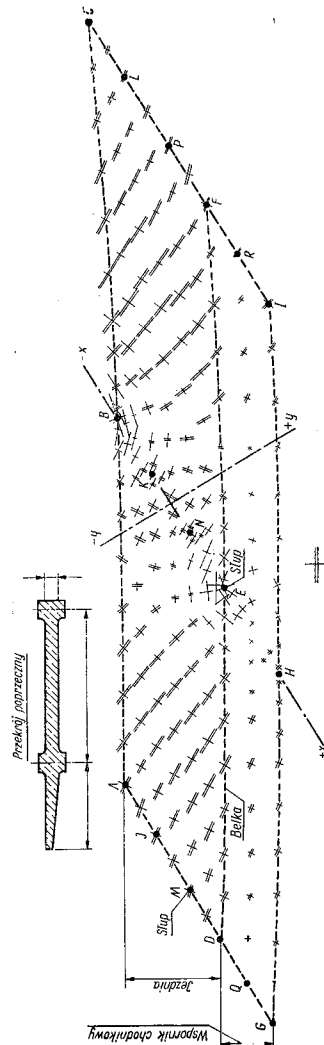
Rys. 10.13. Płyta kwadratowa z otworem; warstwicę kątów nachylenia  $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{D}{PL}$ : a) obliczone metodą elementów skończonych, b) otrzymane doświadczalnie prążki Moiré'a (1 prążek =  $0,213 \cdot 10^{-2}$ )

Na rysunku 10.12 pokazano przyjętą siatkę elementów z naniesionymi warstwicami ugięć, na rys. 10.13a zaś siatkę nachyleń; dla porównania na rys. 10.13b przedstawione są wyniki badań doświadczalnych typu Moiré'a. Zgodność wyników leży w granicach błędu pomiaru.

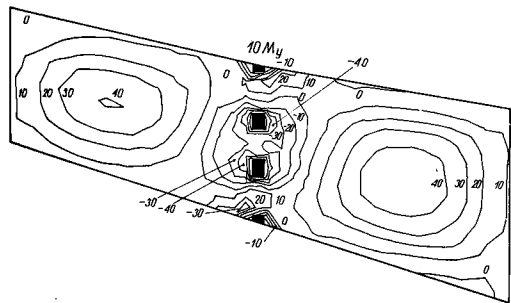
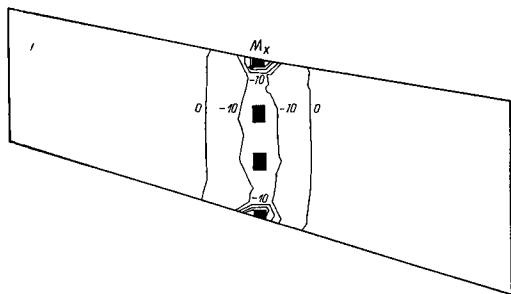
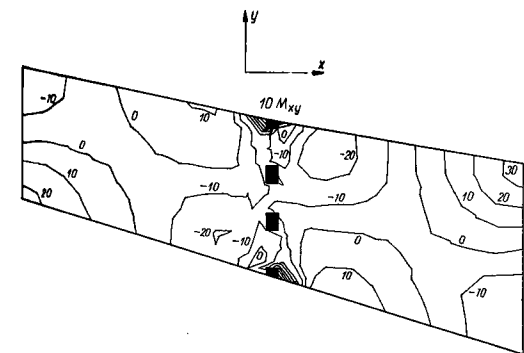
**10.8.3. Niektóre zastosowania praktyczne.** Zakres praktycznych zastosowań programu, w szczególności opartego na podziale trójkątnym, jest duży. Można w ten sposób rozwiązywać problemy płyt fundamentowych, płyt mostowych, pokładów statków itp. Na szczególne podkreślenie zasługuje tu fakt zastosowania metody elementów skończonych do rozwiązywania problemów konstrukcji mostowych.

Rysunek 10.14 przedstawia rozkład momentów dla mostu wieloprzęsłowego, wykonany przez maszynę cyfrową.

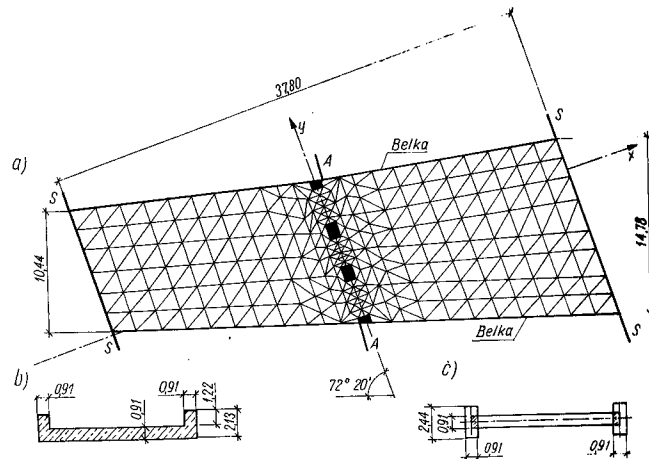
Na rysunku 10.15 i 10.16 pokazany jest most o bardziej skomplikowanym kształcie. Pokazano tu warstwicę składowych momentów, jako odmienny sposób przedstawienia wyników. W tym przykładzie występują belki krawędziowe; założono, że ich oś obojętna leży na tej samej wysokości co płaszczyzna obojętna płyty. Uwzględnianie połączenia takich belek z płytą nie przedstawia żadnych trudności; obliczenie prowadzi się w zwykły sposób wg wytycznych rozdziału 1.



Rys. 10.14. Dwuprzęsłowa płyta mostowa o zmiennej grubości; rozkład momentów od ciężaru własnego; rysunek wykonany przez maszynę



Rys. 10.15. Warstwie składowych momentów (w Tm/m) dla mostu z rys. 10.16 pod równomiernym obciążeniem  $720 \text{ kG/m}^2$ ; rysunek wykonany przez  $\text{m.k.w.j.z.n.}$ ; największe naprężenia w płycie pochodzą od zginania



Rys. 10.16. Most w Castleton: a) ogólny układ geometryczny i podział na elementy, b) typowy przekrój mostu, c) sposób idealizacji przekroju do obliczeń. Końce mostu są podparte przegubowo bez ograniczenia obrotów. Słupy potraktowano jako sztuczne zgrubienia płyty dającej pionowy opór sprężysty. Współczynnik Poissona  $\nu = 0,17$

## 10.9. Dostosowane funkcje kształtu z osobliwościami w węzłach

**10.9.1. Uwagi ogólne.** W p. 10.3 pokazano, że nie jest możliwe rozwinięcie w wielomian przy trzech tylko stopniach swobody w węzle, które by spełniały wymagania ciągłości pochodnych. Odmienne założenie, tj. przyjęcie krzyżwizn w węzłach jako parametrów, ma tę wadę, że wprowadza zbędne warunki ciągłości. Z wielu powodów pożądane jest ograniczenie liczby parametrów w węzłach do trzech. Takie elementy płytowe można łatwo przystosować do obliczeń powłok.

Najprostszym sposobem omięcia powyżej podanych trudności jest przyjęcie dodatkowych funkcji kształtu, których pochodne drugiego rzędu miałyby nieciągłości w węzłach. Zakładając, że nieciągłości te są ograniczone, można zapewnić zbieżność wyników.

Takie funkcje kształtu są tu omówione w nawiązaniu do elementów trójkątnych i czworobocznych. Kształty prostokątne elementów zostaną pominięte.

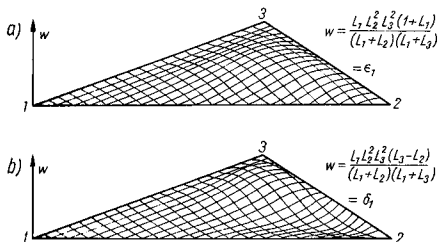
**10.9.2. Osobliwe funkcje kształtu dla prostych elementów trójkątnych.** Rozpatrzymy np. następującą rodzinę funkcji

$$\varepsilon_{23} = \frac{L_1 L_2 L_3}{(L_1 + L_2)(L_2 + L_3)} \text{ itd.} \quad (10-28)$$

lub

$$\varepsilon_{23} = \frac{L_1 L_2 L_3^2 (1 + L_1)}{(L_1 + L_2)(L_2 + L_3)} \text{ itd.} \quad (10-29)$$

Obie mają tę własność, że wzdłuż boków trójkąta 1—2 i 1—3 (rys. 10.17) wartości funkcji oraz ich pierwszych pochodnych są zerami. Wzdłuż trzeciego boku (2—3) wartość funkcji jest zerem, ale pochodna normalna istnieje. W obu zmiennosciach jest paraboliczna. Kształt drugiej funkcji pokazano na rys. 10.17a.



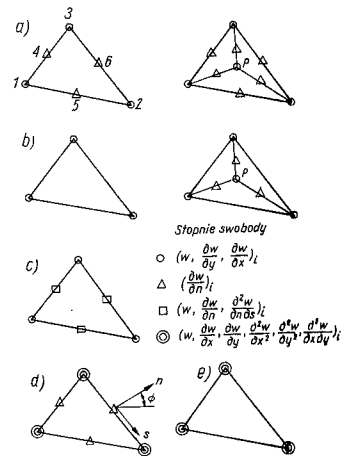
Rys. 10.17. Pewne osobliwe funkcje współrzędnych pola (opis w tekście)

Wszystkie funkcje użyte do określania „niedostosowanego” trójkąta są sześciennicami (por. wzór 10-23); pozwalają zatem na zmiennosci paraboliczną pochodnej normalnej, która nie jest jednoznacznie określona ze względu na brak dwóch końcowych wartości węzłowych (i stąd bierze się jej „niedostosowanie”). Gdy jednak określimy dodatkową zmienną jako *pochodną normalną* od  $w$  w punkcie środkowym każdego boku, wówczas — kombinując nową funkcję  $\varepsilon$  z innymi funkcjami przyjętymi poprzednio — otrzymujemy *jednoznaczność zmiennosci parabolicznej pochodnej normalnej* wzdłuż boków pomiędzy elementami, a zatem i ciągłość pochodnej.

Alternatywnie można to uczynić poprzez dodanie do wyrażeń (10-25) trzech dodatkowych stopni swobody i postępować jak tutaj opisano. Pokazano to dla elementu na rys. 10.18a, mającego sześć węzłów: trzy narożne i trzy dodatkowe, w których zadaje się tylko pochodną normalną jako paramet.

Taki element sprawia pewne trudności przy budowaniu macierzy, ponieważ w poszczególnych węzłach występuje różna liczba stopni swobody. Aby trudności te pokonać, możemy na przykład założyć, że pochodna normalna w środku boku jest zadana jako średnia z dwu pochodnych na końcach boku. Powoduje to ciągłość pochodnej przy dokładnie takiej samej liczbie stopni swobody jak opisano powyżej (rys. 10.18b).

Przekształcenia algebraiczne prowadzone od takich funkcji, a oparte na opisanym tutaj postępowaniu, mają żmudne i nie będą przytoczone. Znacznie prościej można uzyskać wyniki w następujący sposób.



Rys. 10.18. Różne „dostosowane” elementy trójkątne (opis w tekście)

Przed wszystkim oblicza się pochodne normalne w środkach boków, wychodząc z funkcji kształtu elementu (10-26)

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_4 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_5 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_6 \end{pmatrix} = [Z] \{\delta\}^e \quad (10-30)$$

Podobnie z tych funkcji oblicza się wartości średnie pochodnych normalnych do boków w węzłach

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_4 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_5 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_6 \end{pmatrix} = [Y] \{\delta\}^e \quad (10-31)$$

Następnie dodaje się „udziały” funkcji  $\delta$  do tych pochodnych w stosunku  $\varepsilon_{23} \times \gamma_1$  itd., co daje po prostu

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix} \quad (10-32)$$

Uwzględniając ostatnie trzy związki i (10-26), otrzymujemy

$$[Y]\{\delta\}^e = [Z]\{\delta\}^e + \{\gamma\}, \quad (10-33)$$

stad wynika bezpośrednio, że

$$w = [N^0]\{\delta\}^e + [\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}][[Y]-[Z]]\{\delta\}^e, \quad (10-34)$$

gdzie  $[N^0]$  — niedostosowane funkcje kształtu określone poprzednio.

Tak więc teraz funkcje kształtu są dane przez równanie (10-34).

Odmienny sposób tworzenia „zgodnych” trójkątów podany został przez *Clougha* i *Tochera* [3]. Jak pokazano na rys. 10.18a, poszczególne elementy trójkątne są dzielone na trzy części w oparciu o punkt wewnętrzny  $P$ . Dla każdego trójkąta pisze się pełne wyrażenie trzeciego stopnia, zawierające 10 wyrazów. Ostatecznie wyrażenie będzie zależało tylko od dziewięciu stopni swobody w węzłach 1, 2, 3 i pochodnych normalnych w węzłach 4, 5, 6. Ponieważ w każdym rogu dwa trójkąty mają te same wartości węzłowe, więc otrzymamy dwa układy równań; ogólnie zatem będzie  $9 \cdot 2 + 3 = 21$  równań. Ponadto ciągłość przemieszczeń i pochodnych w centralnym węzle  $P$  wymaga dodatkowych 6 równań, zaś ciągłość pochodnych na wewnętrznych bokach trójkątów — dalszych 3 równań. Mamy zatem 30 równań z 30 niewiadomymi, co w tym przypadku wystarcza do określenia explicite funkcji kształtu. Mamy tu więc element o dwunastu stopniach swobody, podobnie jak w przypadku omawianym poprzednio.

Przyjęcie określonych wartości pochodnych normalnych na zewnętrznych bokach trójkąta (np. średnia pochodnych w węzłach) prowadzi do elementu o dziewięciu stopniach swobody.

Oba takie elementy (o 9 i 12 stopniach swobody) były opracowane wskutek potrzeby przewidywania dwu wartości drugich pochodnych w węzłach. W omawianej poprzednio rodzinie funkcje kształtu  $\varepsilon$  dostarczają dowolnej liczby pochodnych zależnie od kierunku, w którym zbliżamy się do węzła.

W rzeczywistości można uzyskać trójkąty zbliżone do trójkątów *Clougha* i *Tochera*, zakładając inną rodzinę funkcji  $\varepsilon$  niż podana w pracy [4].

Ponieważ oba typy elementów prowadzą do prawie identycznych wyników numerycznych, o wyborze jednego z nich decydują prostsze rachunki. Jeżeli stosujemy całkowanie numeryczne (co w istocie należy gorąco polecić w stosunku do wspomnianych elementów), to lepsza jest postać funkcji zdefiniowanych w sposób ciągły na całym trójkącie jak podano w (10-28) i (10-29).

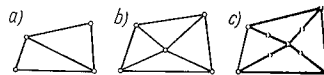
**10.9.3. Dostosowane elementy o osiemnastu stopniach swobody z dostosowanymi funkcjami kształtu.** Element przedstawiony na rys. 10.18c ma istotne zalety w stosunku do elementu na rys. 10.18a. Tutaj 12 stopni swobody powiększyły się do 18 poprzez wprowadzenie do rozważań oprócz pochodnej normalnej  $\frac{\partial w}{\partial n}$

w środku boku elementu wartości  $w$  i jej pochodnej mieszanej  $\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n}$ .

W ten sposób w każdym węzle istnieje jednakowa liczba stopni swobody, co daje wygodę rachunkową. Założenie ciągłości pochodnych mieszanych w środkach boków nie zawiera dodatkowego ograniczenia, ponieważ muszą one być w rzeczywistości ciągle w tym przypadku.

Elementy te wprowadził *Irons* [7]; w uzupełnieniu poprzedniego omówienia dotyczącego różnych rodzajów funkcji kształtu podanych na rys. 10.6, wystarczy jedynie stwierdzić, że stosowane tu są funkcje uwzględniające efekt skręcenia z rys. 10.17b. Można łatwo wykazać, że występują tutaj wszystkie 15 wyrazów rozwinięcia czwartego stopnia, dodatkowo do funkcji „osobliwości”.

**10.9.4. Dostosowane elementy czworoboczne.** Każdy z podanych poprzednio trójkątów można połączyć dla wytworzenia dostosowanych elementów czworobocznych, mających lub nie mających stopnie swobody. Na rys. 10.19 pokazano trzy takie elementy nie węzła węzłów na bokach zewnętrznych; w ten sposób unika się wspomnianych już trudności w budowaniu macierzy sztywności.



Rys. 10.19. Elementy złożone (opis w tekście)

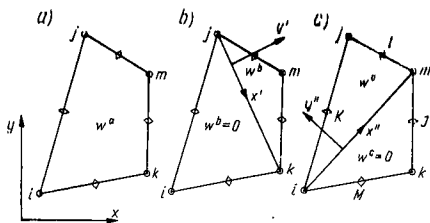
W pierwszym elemencie (rys. 10.19a) nie występują wewnętrzne stopnie swobody, gdyż nie dają one polepszenia wyników w porównaniu z odpowiednimi dwoma trójkątami. W następnych dwu (rys. 10.19 b i c) istnieją odpowiednio trzy i siedem wewnętrznych stopni swobody. W ostatnim przypadku założona ciągłość pochodnej normalnej nie przeszkadza w zestawieniu macierzy, ponieważ wewnętrzne stopnie swobody można zawsze wyeliminować. *Clough* i *Felippa* [21] wykazali, że użycie tych elementów daje wyniki dokładniejsze w porównaniu z innymi.

Odmiennie, bezpośrednie uzyskiwanie elementów czworobocznych zostało przedstawione przez *Sandera* [5] oraz *Fraeijs de Veubeke* [6], [22]. Dokonuje się tego jak następuje: wewnątrz czworobocznego elementu (rys. 10.20) zakłada się pełne rozwinięcie sześciennicze z 10 stałymi, które stanowi pierwszy składnik określający przemieszczenia przez trzy funkcje w postaci

$$w = w^a + w^b + w^c.$$

Pierwsza funkcja  $w^a$  (rys. 10.20a) wyraża się wzorem

$$w^a = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{10} y^3. \quad (10-35)$$



Rys. 10.20. Funkcje proponowane przez Fraeijs de Veubeke (opis w tekście)

Druga funkcja  $w^b$  określona jest w sposób odcinkowy; w dolnym trójkącie (rys. 10.20 b) jest ona zerem, w górnym zaś jest wyrażeniem sześciennym o trzech składnikach, przenikającym z zachowaniem ciągłości pochodnej w pole dolnego trójkąta. Zatem w trójkącie  $ijk$  we współrzędnych lokalnych  $x'$  i  $y'$

$$w^b = \alpha_{11}y'^2 + \alpha_{12}y'^3 + \alpha_{13}x'y'^2. \quad (10-36)$$

Podobnie trzecia funkcja (rys. 10.20 c)  $w^c = 0$  w dolnym trójkącie, a w trójkącie  $imj$

$$w^c = \alpha_{14}y''^2 + \alpha_{15}y''^3 + \alpha_{16}x''y''^2. \quad (10-37)$$

Szczesnaście zewnętrznych stopni swobody odpowiada trzem parametrom w każdym węzle i pochodnym normalnym w środkach boków. Zgodność jest zapewniona z wyjątkiem drugich pochodnych w węzłach.

I tutaj w razie potrzeby można przyjąć wartości parametrów w węzłach pośrednich i uzyskać element o 12 stopniach swobody.

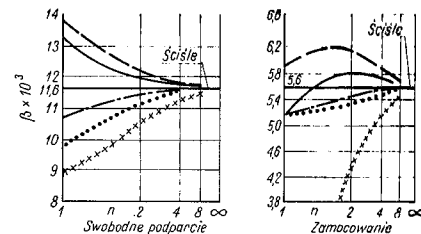
Funkcje kształtu dają się zapisać explicitie — jak pokazał Veubeke [22] — i dlatego elementy takie są korzystne. Nie należy jednak stosować elementów czworobocznych o narożach wklęsłych. Ograniczenie to należy mieć na uwadze, gdy element taki degeneruje się do postaci prawie trójkątnej.

**10.9.5. Niektóre rozwiązania przy użyciu elementów dostosowanych.** Zbieżność i dokładność wyników uzyskanych przy stosowaniu różnych opisanych tutaj elementów była szeroko dyskutowana w publikacjach; por. np. prace [3], [4], [21].

Na rysunku 10.21 pokazano zbieżność w przypadku dwu prostych niedostosowanych elementów i porównanie z elementami dostosowanymi.

Warto tutaj zrobić parę uwag:

1. Najprostszy dostosowany trójkąt daje raczej słabą zbieżność przy grubym podziale, przy czym zbieżność ta jest zawsze gorsza niż przy elementach niedostosowanych tego samego kształtu.



Rys. 10.21. Porównanie różnych rozwiązań metodą elementów skończonych dla płyty kwadratowej obciążonej siłą skupioną  $P$  w środku;  $n$  — liczba podziałów połowy krzywizny  $a$ ,  $\beta = \frac{w}{Pa^2D}$

- — — niedostosowane prostokąty; 12 stopni swobody
- — — niedostosowane trójkąty; 9 stopni swobody
- · - · - dostosowane czworokąty (Veubeke); 16 stopni swobody
- × × × × dostosowane trójkąty; 9 stopni swobody
- dostosowane czworokąty (Clough); 12 stopni swobody (+7 wewnętrznych)

2. Podczas gdy wszystkie dostosowane elementy są zbieżne do ścisłego rozwiązania od dołu — zgodnie z twierdzeniami podanymi w rozdz. 2, elementy niedostosowane zazwyczaj przybliżają się do ścisłego rozwiązania od góry, będąc też oscylując wokół niego.

3. Godne odnotowania są dobre wyniki uzyskane przy zastosowaniu czworoboków Veubeke (rys. 10.20) i czworoboków Clougha (rys. 10.19 c).

## 10.10. Dostosowane funkcje kształtu z dodatkowymi stopniami swobody

**10.10.1. Hermitowskie prostokątne funkcje kształtu.** Dla elementu prostokątnego (rys. 10.4) zawsze można określić  $\partial^2 w / \partial x \partial y$  jako parametr węzłowy; nie zachodzi też obawa „nadmiernej ciągłości”. Łatwo pokazać, że dla takiego elementu bez trudu określa się funkcje kształtu w postaci wielomianu, spełniającą warunki zgodności. Dla  $w$  i jej pochodnej normalnej wzdłuż brzegów elementu można na przykład napisać wielomian zawierający 16 stałych (równe liczbie parametrów węzłowych) przy zachowaniu wyrazów stopnia nie wyższego niż trzeci. Pokażemy tutaj kilka odmian tych wielomianów. Niektóre z nich nie dają jednak odwracalnej macierzy [C].

Jedną z odmian polega na zastosowaniu wielomianów *Hermita*, pozwalających na bezpośrednie wypisanie wygodnych funkcji kształtu.

$$H_n^{(m)}(x) \quad (10-38)$$

jest wielomianem rzędu  $2n+1$ , który dla  $x = x_i$  daje:

$$\frac{d^m H}{dx^m} = 1, \quad n = m \text{ przy } m = 0 \text{ do } n,$$

oraz

$$\frac{d^m H}{dx^m} = 0, \quad n \neq m \text{ lub gdy } x = x_j.$$

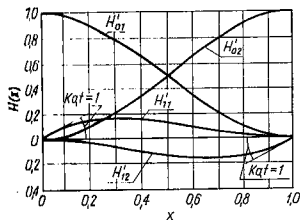
Rodzina wielomianów *Hermita* pierwszego rzędu jest więc rodziną funkcji sześciennych, dającą funkcje kształtu dla liniowego elementu  $ij$ , na końcach którego pochodne i wartości funkcji są użyte jako parametry. Na rys. 10.22 przedstawiono rodzinę takich funkcji sześciennych.

Łatwo wykazać, że następujące funkcje kształtu

$$N_i = [H_{01}^{(1)}(x) \cdot H_{01}^{(1)}(y), H_{11}^{(1)}(x) \cdot H_{01}^{(1)}(y), H_{01}^{(1)}(x) \cdot H_{11}^{(1)}(y), H_{11}^{(1)}(x) \cdot H_{11}^{(1)}(y)] \quad (10-39)$$

odpowiadają wyrażeniu:  $w, \partial w / \partial y, \partial w / \partial x, \partial^2 w / \partial x \partial y$ , przyjmując za każdym razem wartość 1 w węźle  $i$  oraz 0 poza nim.

Elementy oparte o te funkcje kształtu zostały zaproponowane przez *Bognera* i *Schmita* [8] i wykazały szereg zalet.



Rys. 10.22. Hermitowskie funkcje pierwszego rzędu

Możliwe jest także rozwinięcie tego typu elementów w kierunku zachowania ciągłości wyższych pochodnych; jest ono proste jak pokazano to w pracy [9].

W postaci nie zniekształconej elementy te, jak wszystkie elementy prostokątne, mają ograniczone możliwości zastosowania.

**10.10.2. Trójkąty o 21 i 18 stopniach swobody.** Tworzenie elementów, w węzłach których zapewniona jest ciągłość wyższych pochodnych, niż pierwsza, tzn. zapewniających ciągłość przemieszczeń liniowych i kątowych, nie przedstawia dużych trudności.

Jeżeli potraktuje się następujące wielkości jako parametry w węzłach

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

to element trójkątny będzie zawierał 21 stopni swobody. Pełny wielomian piątego stopnia zawiera jednak 21 wyrazów. Gdy zatem dodamy jeszcze trzy pochodne normalne w środkach boków, jako dodatkowe parametry, otrzymamy wystarczającą liczbę równań, z których określimy funkcje kształtu.

Zmiennosć  $w$  wzdłuż każdego boku określona jest funkcją piątego stopnia. Jednocześnie dla każdego boku mamy sześć parametrów, po trzy w każdym węźle (ugięcie, kąt obrotu, krzywizna), które jednoznacznie określają tę funkcję. Mamy więc zgodność przemieszczeń na stykach elementów.

Podobnie  $\partial w / \partial n$  jest określone poprzez pięć wielkości i zmienia się jako wielomian czwartego stopnia. Zatem wystarcza to do zapewnienia ciągłości pochodnej między elementami.

Jeśli zapiszemy pełne wyrażenie piątego stopnia

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{21} y^5, \quad (10-40)$$

możemy dalej postępować zgodnie z p. 10.4 i napisać <sup>1)</sup>:

$$w_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \dots + \alpha_{21} y_1^5,$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 = \alpha_2 + \dots + \alpha_{20} y_1^3,$$

⋮

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_1 = 2\alpha_4 + \dots + 2\alpha_{19} y_1^2 \text{ itd.},$$

otrzymując ostatecznie wyrażenie

$$\{\delta\}^e = [C] \{\alpha\}, \quad (10-41)$$

gdzie  $[C]$  — macierz o wymiarze  $21 \times 21$ .

Widoczną trudnością w tym procesie jest określenie pochodnych normalnych w środkach boków. Jednakże gdy zauważymy, że

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -\sin \phi \frac{\partial w}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (10-42)$$

gdzie  $\phi$  jest kątem nachylenia poszczególnego boku względem osi  $x$ , zagadnienie to staje się proste.

Naturalnie skomplikowane jest tu wyznaczenie odwrotności macierzy  $[C]$  i podanie macierzy sztywności w postaci ogólnej, toteż należy je obliczać wg (10-21) metodą numeryczną.

Istnienie węzłów pośrodku boków trójkąta, mających tylko jeden stopień swobody, jest kłopotliwe. Można jednak i tu założyć zmiennosć pochodnej normalnej wzdłuż każdego boku trójkąta w funkcji trzeciego stopnia. W tym przypadku rząd macierzy  $[C]$  i liczba stopni swobody redukuje się do 18. Otrzymujemy cle-

<sup>1)</sup> Dla wyprowadzenia tych pochodnych lepiej jest stosować współrzędne kartezjańskie niż współrzędne powierzchniowe. Symetria zostanie zapewniona z uwagi na kompletność wielomianu.



ment o 3 węzłach i 18 stopniach swobody (rym. 10.18 c), korzystniejszy w zastosowaniach praktycznych.

Oba te elementy opisane były niezależnie od siebie w kilku publikacjach w 1968 r. Zjawisko „równoczesnego odkrywania” jest jedną z osobliwości postępu naukowego i wydaje się występować w wielu dziedzinach, po osiągnięciu określonego poziomu ich rozwoju.

Tak więc elementy o 21 stopniach swobody opisane zostały przez *Argyrisa* [23], *Bella* [10], *Bossharda* [24], *Ironsa* [27] i *Vissera* [25], wymieniając autorów w kolejności alfabetycznej.

Zredukowane, 18-stopniowe elementy badał *Argyris* [23], *Bell* [10] oraz *Cowper* i inni [26]. W zasadzie podobne, lecz bardziej skomplikowane sformułowanie podali *Butlin* i *Ford* [11].

Należy przypuszczać, że możliwe jest kombinowanie dalszych odmian tych elementów, i istnieć, niektóre z nich były już sygnalizowane. Należy jednakże zawsze pamiętać, że będą one obarczone niezgodnością wtedy, gdy występuje skokowa nieciągłość funkcji opisującej przyjęte parametry. Poza tym uwzględnianie pochodnych wyższych rzędów sprawia trudności w przyjmowaniu dla nich warunków brzegowych i w istocie zachodzi wówczas prosta interpretacja pochodnych energii jako „sił węzłowych”. Dlatego inżynier będzie zawsze stosował ze zrozumiałych względów bardziej „wyczuwalne” sformułowania opisane na początku, tym bardziej że wiele tego typu elementów wykazuje rzeczywistość dobrą dokładność, co zostało wykazane w wielu publikacjach.

**10.10.3. Uwagi końcowe.** Bardzo obszerne zagadnienie funkcji kształtu i metod ich tworzenia celowo zostało włączone do tego rozdziału. Przemawiał za tym nie tylko fakt, że zginanie płyt ma istotne znaczenie inżynierskie, ale też i to, że *wszystkie omówione tutaj funkcje kształtu mają zastosowanie do każdego problemu, gdzie funkcjonal zawiera pochodne drugiego rzędu.* Funkcje te można stosować na przykład w problemach przepływów lepkich i w innych zagadnieniach fizycznych tego typu.

Jak wiadomo, również dwuwymiarowe zagadnienia można formułować w funkcjach naprężeń, a więc i w funkcjonalach z pochodnymi drugiego rzędu. Ponieważ w sformułowaniu tym automatycznie spełnione są warunki równowagi przy „ograniczeniach od góry”, rozwiązanie można uzyskać poprzez minimalizację energii „dopełniającej”. Pierwsi na takie możliwości wskazali *Zienkiewicz* i *Yeubeke* [28].

Wiele innych alternatywnych sformułowań zagadnienia płyt zostało tu pominiętych. Niektóre z nich można znaleźć w pracach [29], [30], lecz nie obejmują one sformułowań o charakterze ogólnym.

Podstawowe zasady metody podane w niniejszym rozdziale oparto na teorii płyt cienkich. Dlatego nie uwzględniono np. odkształceń spowodowanych siłami stycznymi, co ma niewątpliwie znaczenie w przypadku płyt grubszych. Pewne przybliżone potraktowanie tego zagadnienia opisane zostało w pracach [21], [29], [30]. W niniejszej książce problem ten potraktowany jest w odmienny sposób w rozdz. 14.

## Cytowane publikacje

- [1] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, wyd. 2. ed., McGraw-Hill, 1959.
- [2] B. M. Irons, K. J. Draper: Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending, J. A.I.A.A., 3, n. 5, 1965.
- [3] R. W. Clough, J. L. Tocher: Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1963.
- [4] G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.
- [5] C. Sander: Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion-torsion, Bull. Soc. Royale des Sc. des Liège, 33, 1964, s. 456-94.
- [6] B. Fraeijs de Veubeke: Bending and Stretching of Plates, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.
- [7] B. M. Irons: A conforming quartic triangular element for plate bending, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, s. 29-46, 1969.
- [8] F. K. Bogner, R. L. Fox, L. A. Schmit: The generation of inter element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.
- [9] I. M. Smith, W. Duncan: The effectiveness of nodal continuities in finite element analysis of thin rectangular and skew plates in bending, Int. J. Num. Meth. Eng., 2 s. 253-8, 1970.
- [10] K. Bell: A refined triangular plate bending element, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, s. 101-122, 1969.
- [11] G. A. Butlin, R. Ford: A compatible plate bending element, Univ. of Leicester Eng. Dept. report, 68-15, 1968.
- [12] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs, Proc. Inst. Civ. Eng., 28, s. 471-88, 1964.
- [13] R. W. Clough: The finite element method in structural mechanics, Chapter 7 of Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, J. Wiley, 1965.
- [14] D. J. Dawe: Parallelogram element in the solution of rhombic cantilever plate problems, J. of Strain Analysis, 3, 1966.
- [15] J. H. Argyris: Continua and Discontinua, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.
- [16] J. E. Wale, R. E. Fulton, N. J. Cyrus: Accuracy and Convergence of finite element approximation. Proc. Wyt. 2, Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
- [17] R. J. Melosh: Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method, J. A.I.A.A., 1, s. 1631-37, 1963.
- [18] A. Adini, R. W. Clough: Analysis of plate bending by the finite element method and Report to Nat. Sci. Found/ U.S.A., G. 7337, 1961.
- [19] Y. K. Cheung, I. P. King, O. C. Zienkiewicz: Slab bridges with arbitrary shape and support conditions — a general method of analysis based of finite elements, Proc. Inst. Civ. Eng., 40, s. 9-36, 1968.
- [20] J. L. Tocher, K. K. Kapur: Comment on Basis of derivation of matrices for direct stiffness method, J. A.I.A.A., 3, s. 1215-16, 1965.
- [21] R. W. Clough, C. A. Felippa: A refined quadrilateral element for analysis of plate bending, Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Inst. of Techn. Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
- [22] B. Fraeijs de Veubeke: A conforming finite element for plate bending, Int. J. Solids Struct., 4, s. 95-108, 1968.
- [23] J. H. Argyris, I. Fried, D. W. Scharpf: The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method, The Aeronautical R.Ae.S., 72, s. 701-709, 1968.
- [24] W. Bosshard: Ein neues vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung, Mt. Assoc. Bridge Struct. Inst. Bulletin, 28, s. 27-40, 1968.
- [25] W. Visser: The finite element method in deformation and heat conduction problems, Dr W. Dissertation, '11, Delft, 1968.
- [26] G. R. Cowper, E. Kosko, G. M. Lindberg, M. D. Olson: Formulation of a new triangular plate bending element, Trans. Canad. Aero-Space Inst., 1, s. 86-90, 1968 (See also N.R.C. Aero report LR 514, 1968).
- [27] B. M. Irons: Comments on Complete polynomial displacement fields for finite element method, by P. C. Dumez, The Aeronautical J. R. Ae. S., 72, s. 709, 1968.
- [28] B. Fraeijs de Veubeke, O. C. Zienkiewicz: Strain Energy Bounds in finite element analysis by slab analogy, Int. Strain Analysis, 2, s. 265-271, 1967.
- [29] T. H. H. Pian: Derivation of Element Stiffness Matrices by assumed stress distribution, A.I.A.A. Int. 2, s. 1332-1336, 1964.
- [30] T. H. H. Pian, P. Tong: Basis of finite element methods for solid continua, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, s. 3-28, 1969.

# 11. Powłoka jako zbiór płaskich elementów

## 11.1. Wstęp

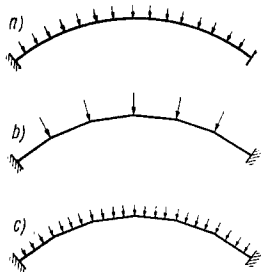
Powłoka jest w istocie konstrukcją, która może powstać z cienkiej płyty poprzez ukształtowanie jej płaszczyzny środkowej w pojedynczo lub podwójnie zakrzywioną powierzchnię. I chociaż te same założenia co do poprzecznego rozkładu odkształceń i naprężeń pozostają nadal ważne, sposób, w jaki powłoka przenosi obciążenie zewnętrzne, jest całkiem odmienny. Wypadkowa naprężeń działających równoległe do płaszczyzny środkowej powłoki ma teraz składowe normalne do powierzchni i przenosi większą część obciążenia; fakt ten stanowi o ekonomiczności powłok jako konstrukcji przenoszących obciążenie i powoduje, że są one bardzo rozpowszechnione.

Wyprowadzenie szczegółowych równań podstawowych dla różnych typów powłok sprawia dość dużo kłopotu i w istocie prowadzi do szeregu różnych sformułowań, z których każde zawiera uproszczenia. Z klasyczną teorią powłok Czytelnik może zapoznać się studiując prace podstawowe, np. znane dzieło *Flüggego* [1].

Badając zagadnienie z punktu widzenia teorii elementów skończonych, wspomniane trudności można ominąć wprowadzając dalsze założenia. Są to założenia raczej natury fizycznej niż matematycznej. Przyjmuje się w nich aproksymację powierzchni zakrzywionej w sposób ciągły za pomocą powierzchni utworzonej z małych płaskich elementów.

Intuicyjnie czujemy, że gdy długości boków elementów maleją, zbliżność musi nastąpić; w istocie doświadczenie potwierdza to wyczucie inżynierskie.

Jednakże, gdy przejdziemy do wyznaczania obciążeń (lub mas) w węzłach, należy rozpatrzyć następujące ważne zagadnienie. Poprzednio korzystne było wyznaczanie wielkości węzłowych przez przenoszenie tych mas lub sił do węzłów, aby bardziej realistycznie odtworzyć efekty lokalne. Teraz, w związku z faktem zastąpienia powierzchni zakrzywionej przez zbiór elementów płaskich, bardziej właściwe będzie zastępować obciążenia rozłożone przez statycznie równoważny układ sił w węzłach. Zagadnienie to najprościej zilustruje problem łuku kołowego (rys. 11.1). Układ ten o wiele poprawniej obrazuje łuk z segmentów prostych ze statycznie równoważnym obciążeniem skupionym (rys. 11.1b) niż ten sam łuk,



Rys. 11.1 Przedstawienie krzywej łuku za pomocą szeregu odcinków prostych; obciążenie b) jest właściwsze niż c)

obciążony obciążeniem równomiernym (rys. 11.1c). Można się przekonać, że tak w istocie jest, kreśląc po prostu odpowiednie wieloboki sił.

W powłokach element poddany jest, w ogólnym przypadku, zarówno zginaniu jak i działaniu sił „w płaszczyźnie”. W elemencie płaskim powoduje to niezależne odkształcenia (przy założeniu, że lokalne odkształcenia są małe), zatem składowe dla obliczenia niezbędnej macierzy sztywności można uzyskać w sposób opisany poprzednio w niniejszej książce.

Przy podziale dowolnych powłok na płaskie elementy stosujemy prawie wyłącznie elementy trójkątne. Chociaż koncepcja zastosowania takich elementów była sugerowana bodaj w 1961 r. przez *Greene'a* i in. [2], rozwój tego sposobu był hamowany wskutek braku odpowiednio dobrej macierzy sztywności dla elementów trójkątnych płyty zginanej [3], [4], [5], [6]. Wywody, opisane w rozdz. 10 dają możliwość doboru właściwych elementów reprezentujących zachowanie powłoki przy takim podziale.

Pewne powłoki, np. walcowe, można dobrze przedstawić za pomocą płaskich elementów prostokątnych lub czworobocznych. Ponieważ dla takich kształtów otrzymuje się dobre macierze sztywności, osiągnięto znaczne zaawansowania rozwiązywania problemu. Taki podział zastosowano do projektowania łukowych zapór i innych budowli o cylindrycznym kształcie [7], [8].

Możliwość obliczania powłok przy stosowaniu metody elementów skończonych są duże. Problemy wynikające przy obliczaniu powłok z otworami, o zmiennej grubości lub anizotropowych nie mają żadnego znaczenia, gdy tylko program został raz opracowany.

Szczególony przypadek zachodzi w powłokach osiowo-symetrycznych, chociaż i tutaj możliwe jest zastosowanie rozważań opisanych poprzednio, można jednak postępować inaczej, a mianowicie w sposób prostszy opisany w rozdz. 12.

Jako alternatywę opisanego tutaj sposobu obliczania, można zastosować elementy zakrzywione. Tutaj współrzędne krzywoliniowe mają istotne znaczenie, przy czym dla ich zdefiniowania można zastosować wytyczne ogólne podane w rozdz. 8. Unika się aproksymacji polegającej na przyjęciu elementów płaskich, gdyż ogranicza ona uwzględnienie możliwości różnych teorii powłok. Pewne

metody, oparte bezpośrednio na metodzie przemieszczeń, podano w pracach [9] ÷ [18], a pewne odmienne sformułowania — w pracach [14] i [16].

Jednakże dla wielu praktycznych zagadnień elementy płaskie dają wyniki z bardzo dobrym przybliżeniem, a ponadto pozwalają na łatwe uwzględnienie połączenia z belkami narożnymi i żebrami, co nie zawsze da się uzyskać przy elementach zakrzywionych. Istotnie, w wielu konstrukcjach powłoka jest naprawdę zbudowana z elementów płaskich, co najmniej w części. Z tego powodu nie będziemy na ogół rozważać zakrzywionych powłok cienkich; rozważymy natomiast grube zakrzywione powłoki (traktowane jako ciała trójwymiarowe omijając tym samym niedogodności równań powłok), przedstawione w rozdz. 13.

Przy omawianiu powłok osiowo-symetrycznych w następnym rozdziale zostaną wzięte pod uwagę zarówno elementy płaskie jak i zakrzywione.

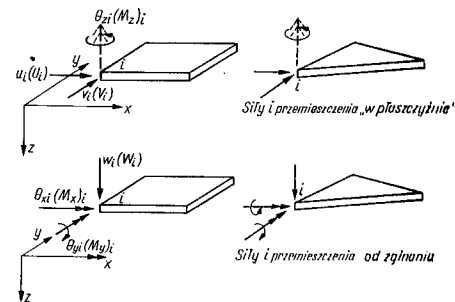
## 11.2. Sztywności elementu płaskiego we współrzędnych lokalnych

Rozpatrzmy typowy płaski element poddany działaniom sił „w płaszczyźnie” i zginaniu (rys. 11.2).

Rozpatrując najpierw działania „w płaszczyźnie” wiemy z rozdz. 4, że stan odkształcenia jest jednoznacznie opisany w każdym węźle poprzez składowe przemieszczenia  $u$  i  $v$ . Minimalizacja całkowitej energii potencjalnej prowadzi do macierzy sztywności:

$$\begin{Bmatrix} F_P \\ \vdots \end{Bmatrix} = [k^P] \begin{Bmatrix} \delta_P \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad \begin{Bmatrix} \delta_P \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (11-1)$$

$$\begin{Bmatrix} F_P \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$



Rys. 11.2. Element płaski poddany działaniu sił w płaszczyźnie oraz zginaniu

Podobnie gdy rozpatrujemy zginanie, stan odkształceń zadany jest jednoznacznie poprzez przemieszczenia  $w$  w kierunku oś  $x$  i dwa obroty  $\theta_x$  i  $\theta_y$ . Prowadzi to do macierzy sztywności:

$$\begin{Bmatrix} F_i^y \\ \vdots \end{Bmatrix} = [k^y] \begin{Bmatrix} \delta_i^y \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad \begin{Bmatrix} \delta_i^y \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (11-2)$$

$$\{F_i^y\} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix}$$

Zanim zaczniemy łączyć te sztywności, należy odnotować dwa fakty. Pierwszy, że przemieszczenia powodowane działaniem sił „w płaszczyźnie” nie wpływają na odkształcenia giętne i odwrotnie. Drugi, że obrót  $\theta_x$  nie może występować jako parametr przy określaniu deformacji w jakikolwiek sposób. Na obecnym etapie rozważań wygodnie jest, z racji które staną się oczywiste, gdy będzie mowa o łączeniu odkształceń, wprowadzić ten obrót do rozważań i połączyć z nim fikcyjny moment  $M_x$ . Fakt, że nie wystąpi on w procesie minimalizacji, może być uwzględniony przez wstawienie odpowiedniej liczby zer w macierzy sztywności.

Definiując teraz ponownie kombinowane przemieszczenia węzłów jako

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (11-3)$$

a odpowiednie „siły” przez:

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} \quad (11-4)$$

możemy zapisać:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

lub

$$\{F\}^e = [k] \{\delta\}^e \quad (11-5)$$

Teraz macierz sztywności składa się z następujących podmacierzy

$$[k_{rs}] = \begin{bmatrix} [k_{rs}^y] & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} [k_{rs}^x] & 0 \\ [k_{rs}^x] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (11-6)$$

jeśli równocześnie weźmiemy pod uwagę, że

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \delta_i^y \\ \delta_i^x \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (11-7)$$

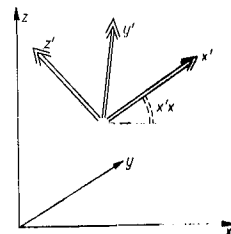
Sformułowanie powyższe ważne jest dla każdego kształtu elementu wieloboczno-ści, w szczególności zaś dla obu typów, pokazanych na rys. 11.2.

### 11.3. Transformacja współrzędnych ogólnych i łączenie elementów

Macierz sztywności, wyprowadzona w poprzednich rozważaniach, odniesiona była do układu współrzędnych lokalnych „w płaszczyźnie” elementu i składowe zginania były wprowadzone także w tym układzie.

Dla połączenia elementów w całość i wypisania równań równowagi niezbędnu jest transformacja tego układu do ogólnego układu współrzędnych dla całości (układ ogólny oznaczymy przez  $x, y, z$ , układ zaś lokalny przez  $x', y', z'$ ). Z drugiej strony, na początku bardziej dogodne jest przyporządkowanie węzłów elementów współrzędnym ogólnym i wyrażenie za ich pomocą współrzędnych lokalnych; temu celowi służyć będzie transformacja odwrotna. Na szczęście wszystkich tych transformacji dokonuje się w nader prosty sposób.

Wymienione dwa układy współrzędnych pokazano na rys. 11.3. Siły i przemieszczenia węzłów transformuje się z układu ogólnego na lokalny poprzez ma-



Rys. 11.3. Współrzędne lokalne i współrzędne ogólne (globalne)

cierz  $[L]$  w następujący sposób

$$\{\delta'_i\} = [L]\{\delta_i\}; \quad \{F'_i\} = [L]\{F_i\}, \quad (11-8)$$

gdzie

$$[L] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (11-9)$$

Tutaj  $[\lambda]$  jest macierzą rzędu  $3 \times 3$  kosinusów kierunkowych kątów pomiędzy dwoma układami osi, tj.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \quad (11-10)$$

a tutaj znów:  $\lambda_{x'x}$  jest kosinusem kierunkowym kąta pomiędzy osiami  $x$  oraz  $x'$ , itd.

Dla całego układu sił działających w węzłach na dany element można zatem napisać

$$\{\delta'\}^e = [T]\{\delta\}^e; \quad \{F'\}^e = [T]\{F\}^e. \quad (11-11)$$

Zgodnie z regułami transformacji ortogonalnej (por. p. 1.4) macierz sztywności elementu we współrzędnych ogólnych jest

$$[k] = [T]^T [k'] [T]. \quad (11-12)$$

W obu powyższych równaniach  $[T]$  oznacza

$$[T] = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & \dots \\ 0 & L & 0 & \dots \\ 0 & 0 & L & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (11-13)$$

jest więc macierzą diagonalną zbudowaną z macierzy  $[L]$  w liczbie odpowiadającej liczbie węzłów elementu.

Łatwo pokazać, że typowa macierz sztywności jest teraz

$$[k_{rs}] = [L]^T [k'_{rs}] [L] \quad (11-14)$$

gdzie  $[k'_{rs}]$  jest określone za pomocą równania (11-6) we współrzędnych lokalnych.

Określenie współrzędnych lokalnych następuje wg podobnego schematu. Jeśli początki układów lokalnego i ogólnego pokrywają się, wówczas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\lambda] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (11-15)$$

Ponieważ przy obliczaniu macierzy sztywności położenie początku układu jest nieistotne, transformacja ta wystarczy do określenia lokalnych współrzędnych w płaszczyźnie elementu (lub w płaszczyźnie równoległej do elementu).

Gdy macierze sztywności dla wszystkich elementów zostały określone we współrzędnych ogólnych, budowanie macierzy sztywności układu i ostateczne rozwiązanie wykonuje się w zwykły sposób. Wypadkowe przemieszczenia wyznaczane są w odniesieniu do ogólnego układu współrzędnych; zanim więc przystąpimy do obliczania naprężeń, konieczna jest zmiana układu na układy lokalne dla każdego elementu. Potem dopiero można zastosować zwykle macierze naprężeń do wyznaczania składowych „w płaszczyźnie”.

#### 11.4. Fikcyjna sztywność skręcania

Jeżeli wszystkie elementy zbiegające się w jednym węźle leżą w jednej płaszczyźnie, to trudno jest sformułować zagadnienie w sposób podany w p. 11.3. Wynika to stąd, że sztywność skręcania w kierunku  $\theta_{zi}$  (rys. 11.2) staje się równa zeru.

Jeżeli w tym przypadku rozpatrujemy równania równowagi we współrzędnych lokalnych, w punktach tych mamy sześć równań, z których ostatnie (odpowiadające kierunkowi  $\theta_z$ ) jest po prostu

$$0 = 0. \quad (11-16)$$

Jako takie, równanie tego typu nie powoduje szczególnych trudności (choć i w zwykłych programach do obliczeń prowadzi do narastania błędów). Jeżeli jednak kierunki współrzędnych ogólnych różnią się od kierunków współrzędnych lokalnych, to po dokonaniu transformacji otrzymujemy się sześć pozornie poprawnych równań. Te jednak okazują się osobliwe<sup>1)</sup>.

Możliwe są dwie alternatywy:

- zbierać równania w punktach, w których elementy leżą w jednej płaszczyźnie we współrzędnych lokalnych (i dopuszczać równanie  $0 = 0$ );
- złożyć dowolną sztywność skręcania  $K'_\theta$  tylko w tych punktach. Daje to w lokalnych współrzędnych wyrażenie

$$K'_\theta \theta_{zi} \quad (11-17)$$

zamiast (11-16).

Po przekształceniu otrzymuje się poprawny układ równań, z którego w zwykły sposób znajdujemy wszystkie przemieszczenia, w tym także i  $\theta_{zi}$ . Ponieważ  $\theta_{zi}$  nie może wpływać na naprężenia — i rzeczywiście nie jest ono sprzężone z pozostałymi równaniami — można wartość  $K'_\theta$  przyjąć zupełnie dowolnie jako sztywność zewnętrzną, nie wpływającą na wyniki.

Obie zaproponowane powyżej alternatywy prowadzą do pewnych komplikacji w programowaniu (choć i druga jest prostsza). W celu określenia rzeczywistej sztywności skręcania podejmowane były prace, w których sztywność tę traktowano jako dodatkowy stopień swobody w zadaniu płaskim [15].

<sup>1)</sup> Czytelnik zechce przypomnieć sobie paradoksy (wyglądające na logiczne), które doprowadzają do równości typu  $2 = 4$  itd.

W programie, stosowanym przez autora niniejszego opracowania [6], przyjęto po prostu fikcyjną sieć współczynników wtywności skręcania we wszystkich elementach, niezależnie od tego, czy są one koplanarne czy też nie. Dla elementów trójkątnych definiuje się je poprzez macierz, która nie narusza równowagi we współrzędnych lokalnych, np.

$$\begin{Bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zk} \end{Bmatrix} = \alpha E t \Delta \begin{bmatrix} 1, & -0,5, & -0,5 \\ -0,5, & 1, & -0,5 \\ -0,5, & -0,5, & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \end{Bmatrix} \quad (11-18)$$

gdzie  $\alpha$  jest pewnym współczynnikiem, na razie do określenia.

Ta dodatkowa sztywność może wpływać na wyniki, ponieważ występuje ona także w niekoplanarnych węzłach. Istotnie, „wybieg” ten prowadzi tylko do przybliżenia. Jednak wpływ zmienności  $\alpha$  w dość szerokich granicach okazał się mały. Dla przykładu na tabl. 11.1 przedstawiono przemieszczenia zapory łukowej, badanej w pracy [2], dla różnych wartości  $\alpha$

Tablica 11.1

$\alpha$	1,00	0,50	0,10	0,03	0,00
Przemieszczenia promieniowe, mm	61,13	63,35	64,52	64,78	65,28

Przemieszczenia dla  $\alpha = 0$  są niemal poprawne. Dla zagadnień praktycznych można zalecić przyjmowanie  $\alpha = 0,03$  lub mniej.

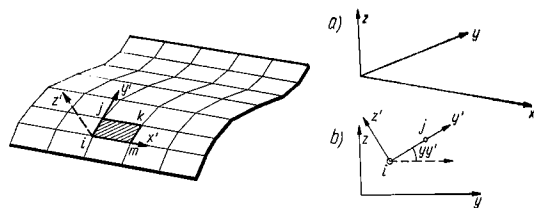
Inni autorzy [5] redukowali stopnie swobody, odrzucając jeden i stałe układając równania wzdłuż normalnej do powłoki. Takie postępowanie zastosujemy w rozdz. 14. Powoduje ono jednak trudności, gdy mamy do czynienia z rzeczywistymi zmianami kierunków lub ich rozwidleniami w powłoce, gdzie nie da się poprowadzić normalnej.

## 11.5. Lokalne kosinusy kierunkowe

Gdy macierz kosinusów kierunkowych  $[\lambda]$  została już wyznaczona dla każdego elementu, problem nie przedstawia trudności i obliczenie odbywa się w zwykły sposób. Określanie tej macierzy może jednak powodować pewne kłopoty algebraiczne, a ponadto nie jest jednoznaczne, ponieważ kierunek jednej z osi jest dowolny; zakłada się tylko, że leży ona w płaszczyźnie elementu.

Zbadajmy najpierw układ elementów prostokątnych, w których problem ten jest dość prosty.

**11.5.1. Elementy prostokątne.** Takie elementy nadają się tylko do reprezentowania powłok cylindrycznych i układów o przekrojach skrzynekowych. Dogodnie jest przyjmować jeden z boków tych elementów i odpowiednią współrzędną lo-



Rys. 11.4. Powłoka walcowa jako zbiór elementów prostokątnych; współrzędne globalne i lokalne (opis w tekście)

kalną  $x'$  równoległą do osi  $x$  układu ogólnego (rys. 11.4a). Dla typowego elementu  $ijkm$  pokazanego na rys. 11.4 łatwo teraz obliczyć wszystkie niezbędne kosinusy kierunkowe. Dla osi  $x'$  są one równe

$$\begin{aligned} \lambda_{x'x} &= 1, \\ \lambda_{x'y} &= 0, \\ \lambda_{x'z} &= 0. \end{aligned} \quad (11-19)$$

Kosinusy kierunkowe osi  $y'$  otrzymamy rozpatrując współrzędne poszczególnych punktów węzłowych. Stąd

$$\lambda_{y'x} = 0, \quad \lambda_{y'y} = + \frac{y_j - y_i}{\sqrt{\{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2\}}}, \quad (11-20)$$

$$\lambda_{y'z} = + \frac{z_j - z_i}{\sqrt{\{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2\}}},$$

co wynika wprost z usytuowania przekroju normalnego zgodnie z kierunkami boku  $ij$  elementu (rys. 11.4b).

Podobnie, dla tego samego przekroju pionowego mamy

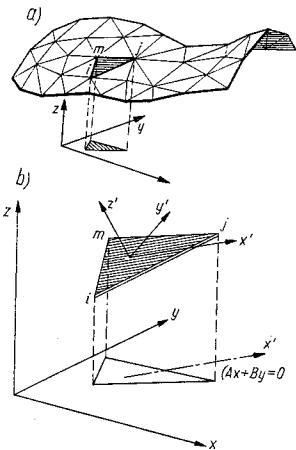
$$\lambda_{z'x} = 0, \quad \lambda_{z'y} = - \frac{z_j - z_i}{\sqrt{\{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2\}}}, \quad (11-21)$$

$$\lambda_{z'z} = + \frac{y_j - y_i}{\sqrt{\{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2\}}},$$

Oczywiście dla zapewnienia prawidłowości znaków w powyższych wzorach, niezbędne jest uwzględnienie właściwej numeracji punktów i ich usytuowania.

**11.5.2. Elementy trójkątne dowolnie zorientowane w przestrzeni.** Dowolną powłokę dzielimy na elementy trójkątne jak pokazano na rys. 11.5. Każdy element znajduje się w położeniu, w którym kąty między trójkątami a płaszczyznami

współrzędnych są dowolne. Zagadnienie określenia współrzędnych lokalnych i ich kosinusów kierunkowych jest zatem znacznie bardziej złożone niż w poprzednich, prostych przykładach. Najdogodniej jest zastosować tutaj pewne zasady algebry wektorów. Dla Czytelnika, który zapomniał już niektóre z tych zasad, podano ich krótkie omówienie w Dodatku 5.



Rys. 11.5. Zastąpienie powłoki układem elementów trójkątnych: a) podział na elementy, b) współrzędne lokalne i globalne dla elementu

Wybór kierunków osi lokalnych jest dowolny, ale decyzja co do wyboru powinna być powzięta na początku. Na przykład przyjmuje się, że oś  $x'$  skierowana jest wzdłuż boku  $ij$  (rys. 11.5b).

Wektor  $\vec{V}_{ij}$  określający położenie tego boku we współrzędnych ogólnych jest

$$\vec{V}_{ij} = \begin{Bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{Bmatrix} \quad (11-22)$$

Kosinusy kierunkowe otrzymamy dzieląc składowe tego wektora przez jego długość, tj. określając wektor jednostkowy

$$\vec{v}_{x'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ \lambda_{x'z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_{ij}} \begin{Bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{Bmatrix} \quad (11-23)$$

gdzie

$$l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2}$$

oraz  $x_{ij} = x_j - x_i$  itd.

T'eraz kierunek  $x'$ , który powinien być stopydny do płaszczyzny trójkąta, określamy wykorzystując własności iloczynu wektorowego wektorów pokrywających się z dwoma bokami trójkąta

$$\vec{V}_{x'} = \vec{V}_{ij} \times \vec{V}_{im} = \begin{Bmatrix} y_{ji} z_{mi} - z_{ji} y_{mi} \\ \vdots \\ \text{itd.} \end{Bmatrix} \quad (11-24)$$

Iloczyn ten jest więc wektorem normalnym do płaszczyzny trójkąta, a długość jego wg definicji (por. Dodatek 5) jest równa podwojonemu polu trójkąta, zatem

$$l_{x'} = \sqrt{(y_{ji} z_{mi} - z_{ji} y_{mi})^2 + (\dots)^2 + (\dots)^2} = 2\Delta \quad (11-24a)$$

Kosinusy kierunkowe osi  $x'$  otrzymujemy tworząc wektor jednostkowy

$$\vec{v}_{x'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ \lambda_{x'z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} y_{ji} z_{mi} - z_{ji} y_{mi} \\ \vdots \\ \text{itd.} \end{Bmatrix} \quad (11-25)$$

Wreszcie kosinusy kierunkowe osi  $y'$  określamy jako kosinusy wektora normalnego do  $x'$  i  $z'$ . Podstawiając do rachunku wektory jednostkowe obu osi otrzymamy

$$\vec{v}_{y'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{y'x} \\ \lambda_{y'y} \\ \lambda_{y'z} \end{Bmatrix} = \vec{v}_{x'} \times \vec{v}_{z'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{y'y} \lambda_{z'z} - \lambda_{z'y} \lambda_{y'z} \\ \vdots \\ \text{itd.} \end{Bmatrix} \quad (11-26)$$

bez potrzeby szukania długości wektora, jest ona bowiem równa jedności (wynik mnożenia dwóch wektorów jednostkowych).

Te operacje wektorowe mogą być zapisane jako specjalny podprogram dla maszyny, w którym mnożenie wektorów, normalizacja (tj. dzielenie przez długość) itd. są wykonywane automatycznie (por. [19]) i dlatego nie ma tutaj potrzeby szczegółowego omawiania tych spraw.

W powyższym rozumowaniu przyjęto, że kierunek osi  $x'$  leży wzdłuż jednego z boków elementu. Można przyjąć także, że kierunek osi  $x'$  jest śladem przecięcia pola trójkąta przez płaszczyznę równoległą do jednej z płaszczyzn współrzędnych ogólnych. Tak więc, gdy np. założymy, że oś  $x'$  leży na przecięciu płaszczyzny trójkąta z płaszczyzną poziomą (tj. z płaszczyzną równoległą do  $xy$ ), można postępować w następujący sposób.

Najpierw określamy kierunki kosinusów  $\vec{v}_{x'}$ , jak w równaniu (11-25). Macierz kosinusów kierunkowych  $x'$  będzie miała składową w kierunku  $z$  równą zeru, tj.

$$\vec{v}_{x'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (11-27)$$

Długość wektora jednostkowego jest teraz

$$\lambda_{x'x}^2 + \lambda_{x'y}^2 = 1, \quad (11-28)$$

a ponieważ iloczyn skalarowy  $\vec{v}_x$  i  $\vec{v}_y$ , musi być równy zeru, mamy stąd

$$\lambda_{x,x} \lambda_{y,x} + \lambda_{x,y} \lambda_{y,y} = 0. \quad (11-29)$$

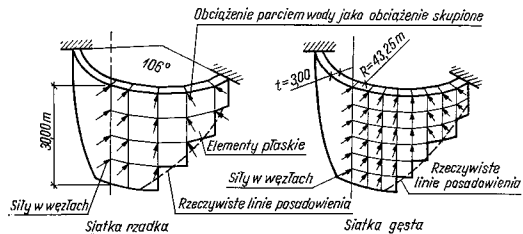
Z równań (11-28) i (11-29) możemy jednoznacznie określić  $\vec{v}_x$ . Wreszcie, jak poprzednio

$$\vec{v}_y = \vec{v}_x \times \vec{z}. \quad (11-30)$$

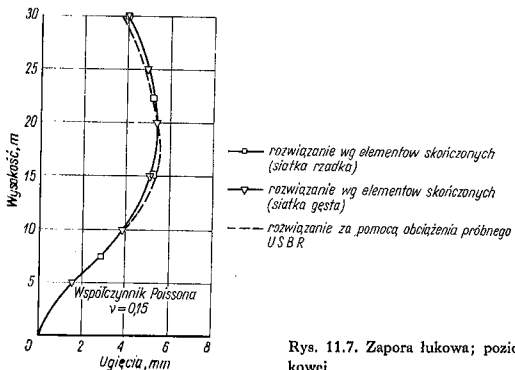
Wiele innych możliwości jednoznacznego określania kierunków omówiono w rozdz. 14.

## 11.6. Przykłady praktyczne

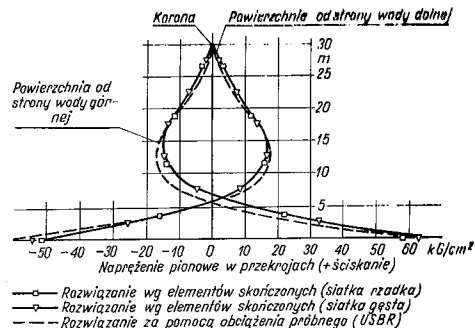
Jako pierwszy przykład rozpatrzmy rozwiązanie zapory łukowej. Kształt geometryczny zapory pokazano na rys. 11.6. Jak wynika z badań modelowych i innych, niż omawiane tutaj, metod obliczeniowych, taki kształt okazał się właściwy.



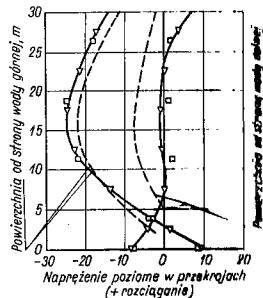
Rys. 11.6. Zapora łukowa jako zbiór elementów prostokątnych



Rys. 11.7. Zapora łukowa; poziome ugięcia linii środkowej



Rys. 11.8. Zapora łukowa; naprężenia pionowe w linii środkowej. Oznaczenia — jak na rys. 11.7



Rys. 11.9. Zapora łukowa; naprężenia poziome (rozpór) na linii środkowej (+ rozciąganie)

Podział na elementy prostokątne zastosowano z uwagi na prosty, walcowy kształt zapory, mimo że przybliżenie do linii posadowienia nie jest tu zbyt dobre. Zastosowano dwie siatki podziału na elementy; wyniki przedstawione na rys. 11.7, 11.8 i 11.9 wskazują, że stosując gęstszą siatkę uzyskano nieznaczne polepszenie rezultatów. Wynika stąd, że zbieżność zarówno geometrycznej aproksymacji do właściwej postaci powierzchni, jak i matematycznego przybliżenia, wynikającego ze sformułowania skończonych elementów, jest dobra. Dla porównania pokazano naprężenia i przemieszczenia uzyskane za pomocą innych metod.

Podwójnie zakrzywiona zapora łukowa była obliczana w podobny sposób przy zastosowaniu płaskich elementów trójkątnych. Wyniki dały nieco lepsze przybliżenie [6].

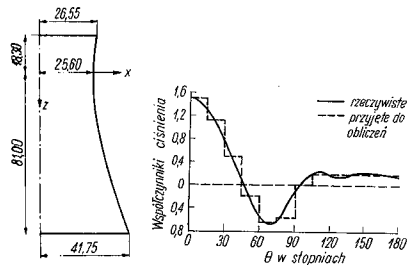
Sporo przykładów obliczył Parekh [20] za pomocą trójkątów „niedostosowanych”. Istotnie, przy takim samym podziale wyraźnie widać wyższość tych ele-



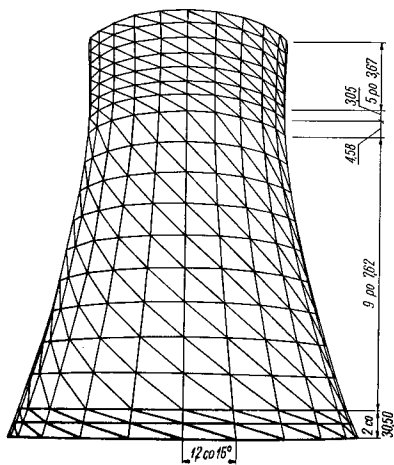
mentów nad elementami „dostawianymi” w ujęciu Clougha i Johnsona [5]. Niektóre przykłady z pracy Parakha [20] pokazano dalej.

**Chłodnia wieżowa.** Jest to przykład zadania owłowo-symetrycznego; mogło ono być, oczywiście, rozwiązane za pomocą metod podanych w rozdz. 12 i 13, w sposób bardziej efektywny. Jednakże tutaj zastosowano metodę ogólną dla zbadania uzyskanej dokładności. Rozwiązania, z którymi porównywano wyniki obliczeń numerycznych, były podane przez Albasiny i Martina [21]. Rysunki 11.10 ÷ 11.13 przedstawiają geometrię zastosowanej siatki i niektóre wyniki. Uwzględniono przypadek niesymetrycznego obciążenia wiatrem.

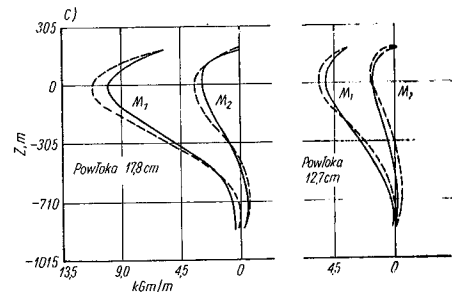
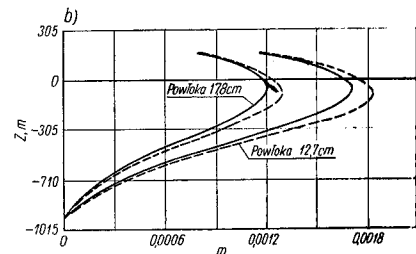
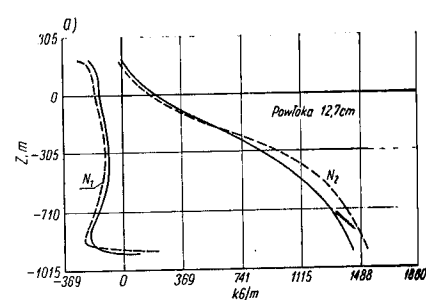
**Sklepienie beczkowe.** Ta typowa powłoka stosowana jest często w budownictwie. Była ona badana za pomocą ustalonego sposobu w metodzie elementów skoń-



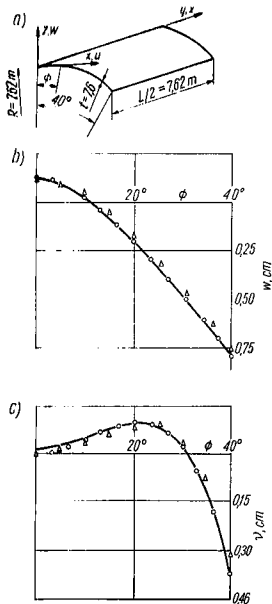
Rys. 11.10. Wieża chłodni. Geometria i rozkład obciążeń obwodowych [21]



Rys. 11.11. Wieża chłodni. Przyjęta siatka elementów



Rys. 11.12. Wyniki obliczeń dla wieży chłodni z rys. 11.10 i 11.11: a) siły błonowe przy  $\theta = 0$ :  $N_1$  — równoleżnikowe,  $N_2$  — południkowe, b) przemieszczenia promieniowe przy  $\theta = 0$ , c) momenty zginające przy  $\theta = 0$ :  $M_1$  — równoleżnikowe,  $M_2$  — południkowe; oznaczenia: — — — — — metoda elementów skończonych; - - - - - rozwiązanie wg Albasiny i Martina

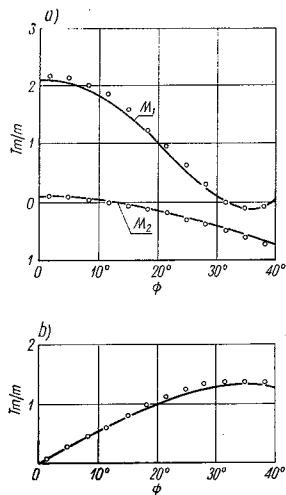


Rys. 11.13. Przekrycie walcowe (faldy): a) geometria, b) rozwiązanie: — ścisłe;  $\Delta$  metodą elementów skończonych przy siatce  $8 \times 12$ ;  $\circ$  jak wyżej, przy siatce  $12 \times 18$ . (Obciążenie — ciężar własny [22], c) przemieszczenia podłużne podpor; przyjęto:  $E = 2,11 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $q = 439 \text{ kg/m}^2$ ,  $\nu = 0$

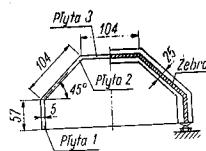
czonych przez Scordelis i Lo [22]. Sklepienie oparte jest na sztywnych przepo-  
nach i obciążone ciężarem własnym. Rys. 11.14 i 11.15 przedstawiają niektóre  
porównawcze wyniki.

**Konstrukcja z płyt faldowych.** Ponieważ nie ma ścisłego rozwiązania tego za-  
gadnienia, porównanie przeprowadzono z wynikami doświadczalnej analizy wy-  
konanej przez Marka i Riesa [23].

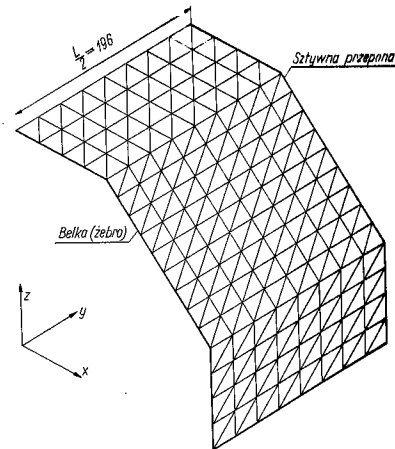
Przykład pokazuje, że pierwszy podział na elementy jest poprawny. Sztywność  
ramy równic została włączona do analizy poprzecz odpowiednie elementy belko-  
we. Na rys. 11.16 i 11.17 pokazano wyniki.



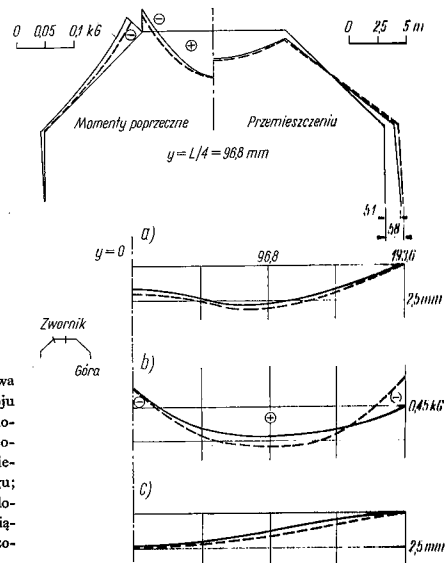
Rys. 11.14. Przekrycie walcowe z rys. 11.13: a) momenty równoleżnikowe —  $M_1$ , momenty południkowe w przekroju środkowym —  $M_2$ , b) moment skręcający na podporze —  $M_{12}$



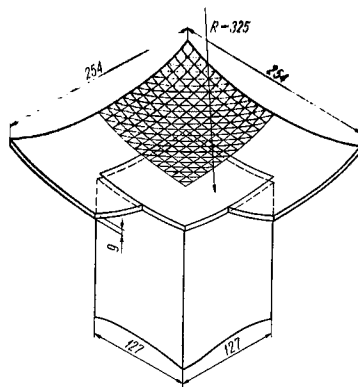
Płyta	Obc. pionowe $\text{kg/cm}^2$
1	0,0006
2	0,0006
3	0,0094



Rys. 11.15. Konstrukcja faldowa [23]. Geometria modelu, obciążenie i podział na elementy. Przyjęto  $E = 250 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0,43$

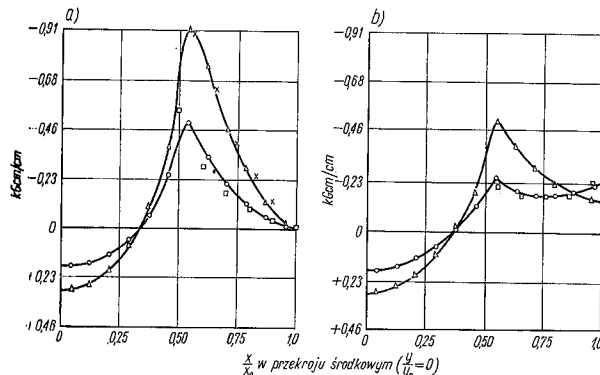


Rys. 11.16. Konstrukcja faldowa z rys. 11.15. Wartości w przekroju środkowym: a) przemieszczenia pionowe zwornika, b) momenty południkowe zwornika, c) przemieszczenia poziome wzdłuż brzo-; oznaczono: — wyniki doświadczalne, - - - rozwiązanie metodą elementów skończonych



Rys. 11.17. Sferyczna „wkłosa” powłoka kwadratowa w planie (model);  $E = 7,03 \cdot 10^4$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\nu = 0,5$ ,  $q = 0,07$  kG/cm<sup>2</sup>

Powłoka o dowolnym kształcie. Na rys. 11.18 pokazano bardzo ogólną postać powłoki podpartej w narożach. Występują tutaj znaczne odkształcenia wskutek zginania; zastosowany podział na elementy jest wystarczająco dokładny dla wszelkich potrzeb.



Rys. 11.18. Momenty zginające dla modelu powłoki z rys. 11.17; a)  $M_1$  — podłużny, b)  $M_2$  — poprzeczny w przekroju środkowym ( $\frac{y}{y_0} = 0$ )

	Oznaczenia	model
Powłoka sferyczna	○ — ○	□
Powłoka płaska	△ — △	×

## 11.7. Zbieżność

Przy definiowaniu macierzy dla naprężeń „w płaszczyźnie” (rozdz. 4) była zabezpieczona ciągłość przemieszczeń sąsiadujących elementów. W rozdz. 10 podobną ciągłość uzyskano dla elementów zginanych, chociaż pokazano, że dobre wyniki można uzyskać także i wówczas, gdy zgodność kątów nachylenia nie jest zachowana.

Funkcje przemieszczeń spełniające warunek ciągłości między elementami łączącymi w tej samej płaszczyźnie mają, ogólnie biorąc, nieciągłości, jeżeli na połączeniach występuje zmiana ukształtowania płaszczyzny. Przybliżenia za pomocą elementów skończonych, zastosowane w niniejszym rozdziale są zatem oparte na niezgodności funkcji przemieszczeń i ich zbieżność może być wykazana jedynie za pomocą bezpośrednich obliczeń.

Jeśli wymiary elementu maleją, wówczas — gdy nie ma nieciągłości kształtu powłoki — ta niezgodność staje się coraz mniejsza i zarówno błędy spowodowane przez przybliżenie geometryczne wskutek zastosowania płaskich elementów, jak też błędy wskutek braku ciągłości, mają tendencję do zanikania.

Niezbędna dla otrzymania sensownego przybliżenia gęstość podziału powłoki nie jest również oczywista. Im cieńsza jest powłoka, tym momenty zginające bardziej ograniczają swój zakres działania do „strefy brzegowej” i w jej otoczeniu szybko się zmieniają. W takich przypadkach dobre przybliżenie do stanu „blonowego” można uzyskać nawet przy dość grubym podziale w obszarach oddalonych od brzegów; niezbędne jednak jest w celu odtworzenia zmienności momentów szczególnie dokładne zbadanie (i gęsty podział) w otoczeniu brzegów. Na szczęście w tych przypadkach mogą być stosowane inne metody i rozwiązywanie za pomocą elementów skończonych może być zalecane głównie dla powłok średniej grubości, w których wpływ momentów zginających jest tego samego rzędu jak wpływ sił działających w płaszczyźnie.

### Cytowane publikacje

- [1] W. Flügge: Stresses in Shells, Springer-Verlag, Berlin. 1960.
- [2] B. E. Greene, D. R. Strome, R. C. Weibel: Application of the stiffness method to the analysis of shell structures, Proc. Aviation Conference, Amer. Soc. Mech. Eng., Los Angeles, marzec 1961.
- [3] R. W. Clough, J. L. Tocher: Analysis of thin arch dams by the finite element method, in Proc. of Symposium on Theory of Arch Dams, Southampton Univ., 1964 (Pergamon Press, 1965).
- [4] J. H. Argyris: Matrix displacement analysis of anisotropic shells by triangular elements, R. Roy. Aer. Soc., 69, s. 801—5, listopad 1965.
- [5] R. W. Clough, C. P. Johnson: A finite element approximation for the analysis of thin shells, J. Solids & Struct., 4, s. 43—60, 1968.
- [6] O. C. Zienkiewicz, C. Parkh, I. P. King: Arch Dams by a linear finite element shell solution program, Proc. Symp. Arch Dams, Inst. Civ. Eng., London, 1968.
- [7] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: Finite element procedures in the solution of plate and shell problems, In Stress Analysis (Chapter 8), ed.: O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, J. Wiley, 1965.
- [8] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: Finite element method of analysis for arch dam shells and comparison with finite difference procedures, Proc. of Symposium on Theory of Arch Dams, Southampton Univ., 1964 (Pergamon Press 1965).
- [9] F. K. Bogner, R. L. Fox, L. A. Schmidt: A cylindrical shell element, J. A.I.A.A., 5, s. 745—750, 1967.

- [10] *G. Cantin, R. W. Clough*: A refined, curved, cylindrical shell element, A.I.A.A. Conference, paper 68—176, New York, 1968.
- [11] *G. Honno, G. Dhutt, Y. M. Giroux, L. P. A. Huh-handi*: Curved triangular elements for analysis of shells, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
- [12] *G. E. Strickland, W. A. Loden*: A doubly curved triangular shell element, Proc. 1st Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
- [13] *H. E. Greens, R. E. Jones, D. R. Strome*: Dynamic analysis of shells using doubly curved finite elements, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
- [14] *J. I. Connor, C. Brebbia*: Stiffness matrix for shallow rectangular shell element, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 93 E.M., s. 43—65, 1967.
- [15] *A. J. Carr*: A refined finite element analysis of thin shell structures including dynamic loading, SEL Report No. 67—9, Univ. of California, Berkeley, 1967.
- [16] *G. R. Cowper, G. M. Lindberg, M. D. Olson*: A Shallow shell finite element of triangular shape. Inst. J. Solids & Structs. 6, 1133—1156, 1970.
- [17] *S. Utku*: Stiffness matrices for thin triangular elements of non zero Gaussian curvature, J. A.I.A.A., 5, s. 1659—1667, 1967.
- [18] *S. Ahmad*: Curved finite elements in the analysis of solid shell and plate structures, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea 1969.
- [19] *S. Ahmad, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz*: A simple matrix-vector handling scheme for tree dimensional and shell analysis. In. J. Num. Meth. Eng. 2, 509—22, 1970.
- [20] *C. Pateh*: Finite Element Solution System. Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1969.
- [21] *E. L. Albasiny, D. W. Martin*: Bending and Membrane equilibrium in cooling towers, Proc. Am. Soc. Civ. Eng. 93, EM3, 1—17, 1967.
- [22] *A. C. Scordelis, K. S. Lo*: Computer analysis of cylindrical shells, J. Am. Concr. Inst., 61, maj 1964.
- [23] *R. Mark, J. D. Riesa*: Photoelastic analysis of folded plate structures, Proc. Am. Cos. Civ. Eng., 93, EM4, 79—83, 1967.

## 12. Powłoki osiowo-symetryczne

### 12.1. Wstęp

Problem powłok osiowo-symetrycznych ma istotne znaczenie praktyczne, co upoważnia do przedstawienia w niniejszym rozdziale specjalnych metod jego rozwiązywania.

Aczkolwiek metody ogólne opisane w poprzednich rozdziałach znajdują także zastosowanie i w niniejszym przypadku, okazuje się, że można uzyskać znaczne uproszczenia, jeśli uwzględni się osiową symetrię konstrukcji. W szczególnym przypadku, gdy zarówno obciążenie jak i powłoka są osiowo-symetryczne, elementy stają się „jednowymiarowe”. Jest to najprostszy typ elementów, nie rozpatrywany jednak w poprzednich rozdziałach.

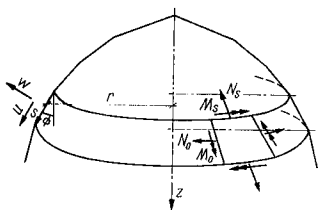
Pierwszą próbę rozwiązania problemu osiowo-symetrycznej powłoki za pomocą elementów skończonych uczynił *Grafton* i *Strome* [1]. Zastosowane przez nich elementy były po prostu ściętymi stożkami, do których zastosowano bezpośrednio funkcje przemieszczeń. Bardziej dokładny sposób wyprowadzenia macierzy sztywności elementów przedstawił *Popov* i inni [2] oraz *Jones* i *Strome* [3], a rozszerzenie na przypadek obciążeń niesymetrycznych, sugerowane przez *Graftona* i *Stromego* [1], opracowane zostało przez *Percy* i in. [4], *Kleina* [5] oraz *Jonesa* i *Stromego* [6].

Ostatnio pracowano intensywnie nad rozszerzeniem metody na elementy zakrzywione i nad udoskonaleniem stopnia przybliżenia. Literatura zagadnienia rośnie z każdym dniem; przyczyną tego jest w szczególności rozwój techniki raketowej. Kompletna bibliografia zagadnienia nie byłaby tutaj celowa. Prace [7] do [11] pokazują, jak można wprowadzić różne współrzędne krzywoliniowe do analizy metodą elementów skończonych; prace [10] i [12] omawiają zastosowanie bezwzwołych parametrów dla polepszenia dokładności.

W powłokach osiowo-symetrycznych, podobnie jak w innych, bierze się pod uwagę zarówno zginanie jak i siły błonowe. Uwidacznia się to jednoznacznie w wyrażeniach na uogólnione „odkształcenia”, które teraz zawierają zarówno wydłużenia, jak i krzywizny powierzchni środkowej. Jeśli przemieszczenia każdego punktu powierzchni środkowej są wyznaczone, takie „odkształcenia” można

określić (jak i wypadkowe napiętn lub proceje, „napięzenia”) za pomocą wzorów znanych z teorii powłok.

Na przykład dla powłoki osiowo-symetrycznej obciążonej osiowo-symetrycznie (rys. 12.1) przemieszczenie punktu powierzchni środkowej określone jest jednoznacznie przez dwie składowe  $u$  i  $w$ , odpowiednio, w kierunku stycznej i normalnej do powierzchni.



Rys. 12.1. Powłoka osiowo-symetryczna; przemieszczenia i wypadkowe napiętn; powłoka reprezentowana jest jako zbiór elementów stożkowych

Cztery składowe odkształcenia dane są poprzez następujące wyrażenia (przy założeniu, że kąt  $\phi$  nie zmienia się) [1], [3]

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds \\ (w \cos \phi + u \sin \phi)/r \\ d^2 w / ds^2 \\ -\frac{\sin \phi}{r} \frac{dw}{ds} \end{Bmatrix} \quad (12-1)$$

Składowe sił wewnętrznych pokazane na rys. 12.1 powiązane są z odkształceniami poprzez macierz sprężystości  $[D]$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\}, \quad (12-2)$$

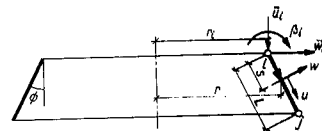
Dla powłoki izotropowej macierz  $[D]$  jest

$$[D] = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \nu t^2/12 \\ 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 \end{bmatrix} \quad (12-3)$$

Górna jej część jest macierzą sztywności od stanu płaskiego, a dolna — od stanu zginania; wpływy sił poprzecznych w obu częściach są pominięte.

## 12.2. Charakterystyka elementu. Obciążenie osiowo-symetryczne, elementy prostoliniowe

Podzielimy powłokę na szereg elementów w postaci stożków ściętych (rys. 12.2). Przeszaczenia linii węzłowych w punktach takich jak  $i$  oraz  $j$  mają określać jednoznacznie odkształcenia elementów, za pomocą odpowiednio założonych funkcji kształtu.



Rys. 12.2. Element powłoki osiowo-symetrycznej

W każdym węźle założone są osiowe i radialne przeszaczenia i obroty. Wazymne trzy składowe są niezbędne, powłoka bowiem może przenosić momenty zginające. Przeszaczenie zatem punktu  $i$  może być określone przez trzy składowe

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (12-4)$$

z których pierwsze dwie są zgodne z ogólnym układem współrzędnych. Element o dwu węzłach  $ij$  ma więc sześć stopni swobody, określonych przez przeszaczenia

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (12-5)$$

Przeszaczenia wewnątrz elementu można zdefiniować jednoznacznie przez przeszaczenia węzłów  $\{\delta\}^e$  i zmienną (długość łuku)  $s$ , przy zachowaniu ciągłości przeszaczenia i ich pochodnych

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e. \quad (12-6)$$

Jeśli przyjąć, że  $u$  zmienia się liniowo wraz z  $s$ , zaś  $w$  — jak trzecia potęga  $s$ , otrzymamy sześć nieokreślonych stałych, które można wyznaczyć z wartości węzłowych  $\bar{u}, \bar{w}, \beta$ .

W węźle  $i$  mamy

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & +\sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = [L] \{\delta_i\}. \quad (12-7)$$

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 s, \\ w &= \alpha_3 \cdot \alpha_4 s \cdot \alpha_5 s^2 \cdot \alpha_6 s^3 \end{aligned} \quad (12-8)$$

łatwo ustawimy sześć niezbędnych warunków i otrzymamy<sup>1)</sup>

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-s' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3s'^2+2s'^3 & L(s'-2s'^2+s'^3) & 0 \\ 0 & 0 & 3s'^2-2s'^3 & (-s'^2+s'^3)L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s' \\ \frac{dw}{ds} \\ u_j \\ w_j \\ \frac{dw}{ds} \\ \frac{dw}{ds} \end{Bmatrix}_i \quad (12-9)$$

gdzie:

$$s' = s/L.$$

Oznaczając powyższą macierz rzędu  $2 \times 6$  przez  $[N]$  możemy teraz napisać

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N]^T \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \{\delta\}^e = [[N]_i^T [\lambda], [N]_j^T [\lambda]] \{\delta\}^e = [N]^T \{\delta\}^e. \quad (12-10)$$

Z równań (12-10) w prosty sposób otrzymamy macierz odkształceń  $[B]$  stosując definicję (12-1). Daje ona

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e = [[B]_i [\lambda], [B]_j [\lambda]] \{\delta\}^e, \quad (12-11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} [B]_i &= \begin{bmatrix} -1/L & 0 & 0 \\ (1-s') \sin \phi / r & (1-3s'^2+2s'^3) \cos \phi / r & L(s'-2s'^2+s'^3) \cos \phi / r \\ 0 & (-6+12s')/L^2 & (-4+6s')/L \\ 0 & (6s'-6s'^2) \sin \phi / rL & (-1+4s'-3s'^2) \sin \phi / r \end{bmatrix} \\ [B]_j &= \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 \\ s' \sin \phi / r & (3s'^2-2s'^3) \cos \phi / r & L(-s'^2+s'^3) \cos \phi / r \\ 0 & (6-12s')/L^2 & (-2+6s')/L \\ 0 & (-6s'+6s'^2) \sin \phi / rL & (2s'-3s'^2) \sin \phi / r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12-12)$$

Tak więc wszystkie składowe niezbędne do obliczenia macierzy sztywności (albo obciążenia, naprężeń, czy naprężeń początkowych) za pomocą wzorów standardowych z rozdz. 2 są znane.

<sup>1)</sup> Funkcje, które tutaj występują, są w istocie wielomianem *Hermita*'a rzędu 0 lub 1, por. p. 10.11.

Niezbędne całkowanie należy wykonać na polu  $A$  elementu przy

$$dA = 2\pi r ds = 2\pi r L ds', \quad (12-13)$$

przy czym  $s'$  zmienia się w granicach od 0 do 1.

Stąd, macierz sztywności  $k$  wg równania (2-10) staje się równa

$$[k] = \int_0^1 [B]^T [D] [B] 2\pi r L ds'. \quad (12-14)$$

Po podstawieniach, element  $[k_{rs}]$  tej macierzy dany jest przez

$$[k_{rs}] = [\lambda]^T \left( \int_0^1 [B_r]^T [D] [B_s] r ds' \right) [\lambda] 2\pi L. \quad (12-15)$$

Przed wykonaniem całkowania należy  $r$  wyrazić jako funkcję  $s$ .

I znowu wygodnie jest stosować całkowanie numeryczne. *Grafton* i *Strome* [1] stosując macierz  $[D]$  odpowiadającą materiałowi ortotropowemu podali wzór zamknięty na macierz sztywności, oparty na wartości średniej wyrażenia podcałkowego. Już przy tym niezbyt dobrym przybliżeniu otrzymuje się wyjątkowo dobre wyniki, jeżeli zastosowane będą elementy o małych wymiarach.

*Percy* i in. [4] oraz *Klein* [5] wykonali 7-punktowe całkowanie (por. Dodatek 5) i otrzymali nieco ulepszoną macierz, nie wyrażoną jednakże w postaci zamkniętej.

Trzeba wspomnieć, że jeśli istnieje obciążenie zewnętrzne ciągłe rozłożone na linii, albo moment zewnętrzny, do analizy należy użyć całą ich wartość obwodową, podobnie jak w przypadku ciał obrotowo-symetrycznych (rozdz. 5).

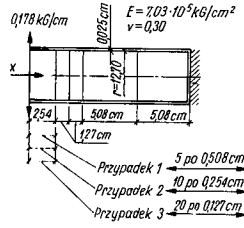
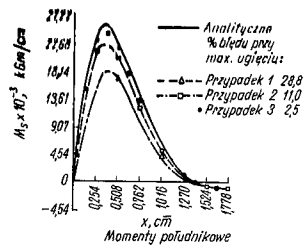
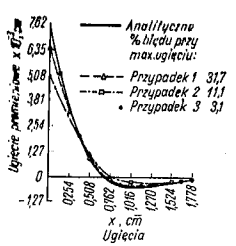
### 12.3. Przykłady i dokładność wyników

W przypadku powłok osiowo-symetrycznych opisanych powyżej ciągłość jest zachowana w każdym przypadku. Dla wielobocznych zatem kształtów powłok zbieżność wyników zawsze będzie mieć miejsce.

Problem geometrycznego przybliżenia powłoki wielobocznej do powłoki zakrzywionej jest podobny do problemu rozważanego w rozdz. 11. Intuicyjnie wyuczujemy, że zbieżność powinna być osiągnięta i, istotnie, przykłady to potwierdzają.

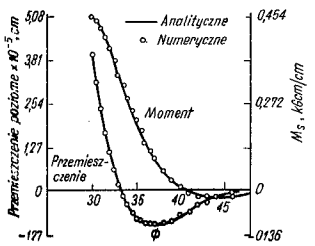
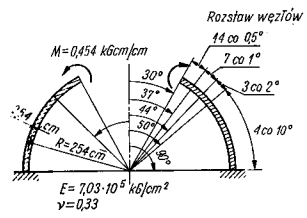
Jeśli obciążenie jest tego typu, że wywołuje dominujący stan błonowy, rozbieżności w momentach zginających wystąpią nawet w tym przypadku, gdy stosuje się dość drobny podział. Rozbieżności te można zlikwidować zagęszczając podział i stosując uśrednianie wartości momentów. Jest to niezbędne dla złagodzenia skutków geometrycznego przybliżenia polegającego na zastąpieniu powłoki szeregiem stożkowych pierścieni.

Na rysunku 12.3 i 12.4 pokazane są wyniki typowych przykładów, zaczerpnięte z pracy *Graftona* i *Strome* [1].



Podział na elementy

Rys. 12.3. Rozwiązanie powłoki walcowej metodą elementów skończonych (Grafton i Strome [1])



Rys. 12.4. Rozwiązanie powłoki półkulistej za pomocą metody elementów skończonych (Grafton i Strome [1])

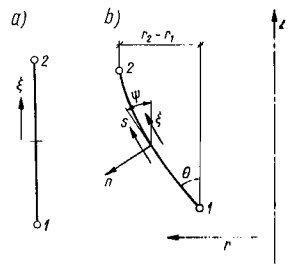
## 12.4. Elementy zakrzywione i ich funkcje kształtu

Zastosowanie elementów zakrzywionych było opisane w rozdz. 8; podano tam definicję odkształceń za pomocą tylko pierwszej pochodnej. Tutaj jednak istnieją drugie pochodne [por. równanie (12-1)] i pewnych twierdzeń z rozdz. 8 nie można zastosować.

Podane poniżej rozumowanie oparte jest na pracy Ironsa i Delpaka [10] i — zgodnie z nomenklaturą użytą w rozdziale 8 — zaproponowane elementy zakrzywione należą do typu subparametrycznego.

Podstawą do określenia elementów zakrzywionych jest wymaganie wspólnej stycznej pomiędzy dwoma elementami (lub — alternatywnie — wspólnej pochodnej w określonym kierunku). Jest to fizycznie niezbędne, aby uniknąć skręceń, uniemożliwiających wytworzenie gładkiej powłoki.

Rozpatrzmy najpierw prosty element „macierzysty”, wewnątrz którego wiadoma  $\phi$  jest opisana poprzez jej wartości i pochodne w punktach 1, 2 (rys. 12.5). Współrzędna  $\xi$  opisuje położenie i zmienia się od -1 do 1 (por. przykłady w rozdz. 8).



Rys. 12.5. Zakrzywiony izoparametryczny element powłoki dla zadania osiowo-symetrycznego: a) element pierwotny, prosty, b) współrzędne krzywoliniowe

Możemy przeto napisać

$$\phi = \sum_{i=1}^2 \left( N_i \phi_i + N_i' \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)_i \right) = [N] \{ \bar{\phi} \}^e \quad (12-16)$$

Tutaj  $N'$  i  $N''$  są skalarnymi funkcjami kształtu. Gdy założymy, że są one wielomianami, będą to po prostu wielomiany sześciennic (podobnie, jak w (12-8) opisano zmienność  $w$ )

$$N_i' = \frac{1}{4} \{ \xi_0 \xi^2 - 3\xi_0 + 2 \}; \quad (12-17)$$

$$N_i'' = \frac{1}{4} (1 - \xi_0)^2 (1 + \xi_0),$$

gdzie

$$\xi_0 = \xi_i \xi.$$

Równocześnie możemy zastosować powyższej podane funkcje dla opisu zmian przemieszczeń  $\bar{u}$  i  $\bar{w}$ ) względem układu współrzędnych  $r$  i  $z$  opisujących powłokę.

Takie elementy będą wówczas izoparametryczne. Określamy zatem geometrię elementu jako

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^2 \left( N_i r_i + N_i' \left( \frac{dr}{d\xi} \right)_i \right), \\ z &= \sum_{i=1}^2 \left( N_i z_i + N_i' \left( \frac{dz}{d\xi} \right)_i \right), \end{aligned} \quad (12-18)$$

i zakładając, że wartości w węzłach można określić, otrzymujemy jednoznaczny związek między  $\xi$  i położeniem na zakrzywionej powierzchni elementu (rys. 12.5 b).

Ponieważ określenie  $r_i$  i  $z_i$  na końcach jest oczywiste, należy tam znaleźć jedynie pochodną

$$(\operatorname{tg} \psi)_i = \left( \frac{dr}{dz} \right)_i. \quad (12-19)$$

Sposób w jaki należy tego dokonać ze względu na pochodne występujące w równaniu (12-18) zależy od przebiegu współrzędnej  $\xi$  wzdłuż odcinka boku  $s$ .

Tylko następujący związek jest określony w sposób jasny

$$\left( \frac{dr}{dz} \right)_i = \frac{\left( \frac{dr}{d\xi} \right)_i}{\left( \frac{dz}{d\xi} \right)_i}. \quad (12-20)$$

Pochodne  $\left( \frac{dr}{d\xi} \right)_i$  lub  $\left( \frac{dz}{d\xi} \right)_i$  mogą mieć dowolną wartość. Interwenują tu jednak względy praktyczne, gdyż zły wybór wartości pochodnych powoduje mało ustabilizowaną zmienność  $\xi$  zależnie od  $s$ . Przy niewłaściwym wyborze kształt krzywej może bardzo odbiegać od gładkiego i zwiijać się w pętle między wartościami końcowymi.

<sup>1)</sup> Łatwo zauważyć różnicę między tym sformulowaniem, a sformulowaniem zastosowanym poprzednio. Teraz obie składowe przemieszczenia zmieniają się w sposób co najmniej sześcienny wzdłuż elementu, gdy poprzednio zakładano liniową zmienność przemieszczenia stycznego. Ten dodatkowy stopień swobody nie wprowadza jednak „nadmiernej ciągłości”, jeśli powłoka ma stałą grubość.

Dla dostatecznie monotonicznej zmiany kształtu wystarcza (dla regularnych powłok) założyć

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{r_2 - r_1}{2} = \frac{\Delta r}{\Delta \xi} \quad (12-21)$$

pamiętając, że całkowity obszar zmienności  $\xi$  między węzłami jest równy 2.

## 12.5. Wyrażenia dla odkształceń i cechy elementów zakrzywionych

Zmienność przemieszczeń została określona w układzie ogólnym, podczas gdy wg (12-1) odkształcenia są wyrażone w postaci pochodnych względem współrzędnych lokalnych (jedną z osi jest styczna  $s$ ). Wynika stąd konieczność pewnych transformacji przed wyznaczeniem odkształceń.

Jeżeli zakładamy, że przemieszczenia w układzie ogólnym są zdefiniowane poprzez funkcje kształtu (12-16) jako

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{i=1}^2 \left( N_i \bar{u}_i + N_i' \left( \frac{d\bar{u}}{d\xi} \right)_i \right), \\ \bar{w} &= \sum_{i=1}^2 \left( N_i \bar{w}_i + N_i' \left( \frac{d\bar{w}}{d\xi} \right)_i \right), \end{aligned} \quad (12-22)$$

to przemieszczenia skierowane lokalnie  $u, w$  można znaleźć poprzez transformacje przytoczone we wzorze (12-7)

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}. \quad (12-23)$$

Tutaj  $\psi$  jest kątem między styczną do krzywej a osią  $z$  (rys. 12.5).

Zanim jednak posuniemy się dalej, należy te transformacje wyrazić w funkcji współrzędnej  $\xi$ . Mamy

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\left( \frac{dr}{d\xi} \right)_i}{\left( \frac{dz}{d\xi} \right)_i}, \quad (12-24)$$

a więc i to można łatwo wykonać.

Z kolei musimy zastanowić się, czy można narzucić ciągłość parametrów wg (12-22) w węzłach. Oczywiście jest, że przemieszczenia w układzie ogólnym muszą być ciągłe. Jednak poprzednio sprecyzowaliśmy jedynie ciągłość obrotu stycznnej. Tutaj dopuszczamy ciągłość pochodnych przemieszczeń względem  $s$ . Zatem  $\frac{d\bar{u}}{ds}$  lub  $\frac{d\bar{w}}{ds}$  muszą mieć wspólne wartości w węzłach.



$$\frac{d\bar{u}}{ds} = \frac{d\bar{u}}{d\xi} \quad \text{oraz} \quad \frac{d\bar{w}}{ds} = \frac{d\bar{w}}{d\xi}, \quad (12-25)$$

nie ma trudności w podstawieniu tych nowych zmiennych do (12-22) lub (12-23), które teraz przyjmą postać:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N(\xi)] \{\delta\}^e, \quad \text{gdzie} \quad \delta_i = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \frac{d\bar{u}}{ds} \\ \frac{d\bar{w}}{ds} \end{Bmatrix}_i \quad (12-26)$$

Postać macierzy  $2 \times 4$  jest dość złożona, lecz może być wyznaczona explicite.

Jeżeli mamy rozważać powłoki uźebrowane lub takie, których grubość zmienia się nagle, wówczas nie wystarczą parametry określone w (12-26). Lepiej wtedy przepisać to wyrażenie w postaci

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \\ \left(\frac{du}{ds}\right)_i \end{Bmatrix}$$

i powiązać z elementem tylko pierwsze trzy parametry ( $\beta_i = \frac{dw}{ds}$  jest obrotem w węzle). Czwarty jest teraz niepowiązany parametrem elementu, można jednak zawsze zminimalizować funkcjonal względem tego parametru.

Transformacje potrzebne do rozwiązania powyższego były już pokazane w równaniu (12-23).

Przy wyprowadzeniu macierzowego wyrażenia [B], określającego odkształcenia, występują pierwsze i drugie pochodne względem  $s$ , jak podano we wzorze (12-1)<sup>1)</sup>. Zauważmy, że pochodne można otrzymać za pomocą prostych reguł podanych w (12-25).

<sup>1)</sup> Zauważmy, że tutaj  $s$  jest traktowane jako kierunek stycznej do prostej, a więc

$$\frac{ds}{ds} = 0.$$

Dla każdej funkcji  $F$  można zatem napisać

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dF}{d\xi} \left/ \frac{ds}{d\xi} \right.$$

oraz

(12-27)

$$\frac{d^2F}{ds^2} = \frac{d^2F}{d\xi^2} \left/ \left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 \right. - \frac{dF}{d\xi} \left(\frac{d^2s}{d\xi^2}\right) \left/ \left(\frac{ds}{d\xi}\right)^3 \right.$$

i w ten sposób znaleźć wszystkie składowe [B].

Wreszcie macierz sztywności otrzymujemy w podobny sposób, jak w (12-14), wprowadzając zmienną

$$ds = \frac{ds}{d\xi} d\xi \quad (12-28)$$

i całkując w granicach od  $-1$  do  $1$ .

Wielkości zawarte w wyrażeniach podcałkowych nie pozwalają na całkowanie algebraiczne; należy stosować całkowanie numeryczne. Ponieważ wykonujemy je tylko względem jednej zmiennej, nie jest ono zbyt pracochłonne; można zatem przyjąć dostateczną liczbę punktów *Gaussa* i obliczyć macierz sztywności bardzo dokładnie.

Podobnie otrzymuje się macierze naprężeń i innych wielkości.

Przytoczone tutaj sformułowanie izoparametryczne różni się nieco od podanych w pracach [7], [8], [9], [11] i ma tę zaletę, że dzięki postaci izoparametrycznej można spełnić warunek przemieszczeń elementu jako ciała sztywnego, jak też warunek stałej pierwszej pochodnej. Sprawdzenie tego jest podobne do przytoczonego w p. 8.5. Fakt, że postacie podane w odmiennych sformułowaniach mogą powodować powstawanie odkształceń w warunkach przemieszczeń ciała sztywnego nie ma dla niektórych przypadków istotnego znaczenia, jak to podają *Heister* i *Stricklin* [14]. Jednak w pewnych przypadkach obciążenia asymetrycznych (patrz rozdz. 13), może to być istotną wadą i doprowadzić do poważnych błędów.

Warunek stałej krzywizny dla elementów skończonych nie może być spełniony dla żadnej z podanych tutaj postaci; nie jest to fizycznie możliwe, można jednak wykażać, że gdy wymiary elementu maleją, warunek dowolnej, lecz stałej krzywizny może być ostatecznie osiągnięty.

## 12.6. Dodatkowe zmienne pozawęzłowe

Wprowadzenie zmiennych pozawęzłowych do badania osiowo-symetrycznych powłok jest pożyteczne wówczas, gdy mamy do czynienia z dużymi elementami, można bowiem wówczas uzyskać za ich pomocą lepszą dokładność.

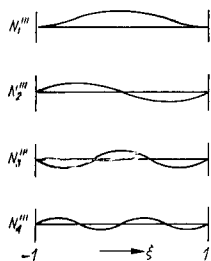
$$\sum_{j=1}^n N_j'' a_j \quad (12-29)$$

do funkcji określających przemieszczenia normalne, zdefiniowane przez (12-6), gdzie  $a_j$  jest zbiorem wewnętrznych parametrów elementu,  $N_j''$  zaś — zbiorem funkcji mających wartości zero i zerowe pierwsze pochodne w węzłach, otrzymujemy znaczne polepszenie opisu przemieszczeń bez uchybienia żadnemu z wymagań zbieżności (por. rozdz. 7).

Dla przemieszczeń stycznych można pominąć wymaganie zerowej pierwszej pochodnej w węzłach.

Webster [12] użył tych dodatkowych funkcji w powiązaniu z elementami prostoliniowymi.

Nie ma znaczenia czy elementy są prostoliniowe, czy zakrzywione. W istocie, możemy uzupełnić wyrażenia na przemieszczenia (12-22) przez wyrażenia (12-29) dla każdej składowej. Gdy wykonamy to tylko w wyrażeniach na przemieszczenia, lecz nie w wyrażeniach na współrzędne (12-18), elementy stają się subparametrycznymi<sup>1)</sup>. W rozdz. 7 omówiono zalety tego sposobu.



Rys. 12.6. Wewnętrzne funkcje kształtu dla elementu liniowego

Kwestia jakich wyrażeń należy użyć dla opisu owych wewnętrznych, dodatkowych funkcji kształtu, ma pewne znaczenie, jako że wybór ich jest szeroki. Ponieważ nie ma potrzeby stosować tutaj wyrażeń wielomianowych, Delpak [10] zastosował np. specjalną postać wielomianów Legendre'a, proponowaną przez Ironsa. Ogólne postacie pokazane są na rys. 12.6.

<sup>1)</sup> Chociaż, oczywiście, można włączyć te nowe funkcje kształtu do opisu elementu, uzyskuje się z tego niewielką korzyść praktyczną, ponieważ reprezentacja sześcienna dostatecznie dobrze odpowiada kształtom rzeczywistym.

- [1] P. E. Grafton, D. R. Strome: Analysis of axis-symmetric shells by the direct stiffness method, J. A.I.A.A., 1, s. 2342—47, 1963.
- [2] E. P. Popov, J. Pensien, Z. A. Lu: Finite element solution for axis-symmetric shells, Proc. A.S.C.E., EM, s. 119—45, 1964.
- [3] R. E. Jones i D. R. Strome: Direct Stiffness Method of Analysis of shells of revolution utilizing curved elements, J. A.I.A.A., 1966.
- [4] J. H. Percy, T. H. H. Pian, S. Klein, D. R. Navaratna: Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution, J. A.I.A.A., styczeń 1965.
- [5] S. Klein: A study of the matrix displacement method as applied to shells of revolution, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1963.
- [6] R. E. Jones, D. R. Strome: A survey of analysis of shells by the displacement method, Proc. Conf. on Matrix Method in Structural Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.
- [7] R. E. Jones, D. R. Strome: Direct Stiffness method analysis of shells of revolution utilizing curved elements, A.I.A.A. Inst., 4, s. 1519—1525, 1966.
- [8] J. A. Stricklin, D. R. Navaretta, T. H. H. Pian: Improvements in the analysis of shells of revolution by matrix displacement method (curved elements) A.I.A.A. Int., 4, s. 2069—2072, 1966.
- [9] M. Khajasteh-Bakht: Analysis of elastic-plastic shells of revolution under axisymmetric loading by the finite element method, Dept. Civ. Eng. Univ. of California, SE SA 67—8, 1967.
- [10] R. Delpak: Axisymmetric vibration of shells of revolution by the finite element method, M. Sc. Thesis. Univ. of Wales, Swansea, 1967.
- [11] M. Giannini, G. A. Miles: A curved element approximation in the analysis of axis-symmetric thin shells Int. J. Num. Meth. in Eng. 2, 1970.
- [12] J. J. Webster: Int. J. Mech. Sci., 9, s. 559, 1967.
- [13] V. V. Novozhilov: Theory of Thin Shells (tłum. z ros.) P. Noordhoff, 1959.
- [14] W. E. Heister, J. A. Stricklin: Rigid body displacement of curved elements in the analysis of shells by the matrix displacement method, J. A.I.A.A. 5, s. 1525—1527, 1967.

## 13. Półanalityczne sposoby w metodzie elementów skończonych. Zastosowanie funkcji ortogonalnych

### 13.1. Wstęp

Standardowe sposoby stosowane w metodzie elementów skończonych, jak pokazano, nadają się do rozwiązywania, w zasadzie, wszystkich dwu- i trójwymiarowych (a także czterowymiarowych, por. rozdz. 16) zadań. Jednakże koszt rozwiązania wzrasta wraz ze zwiększeniem wymiaru zadania i czasem nawet przekracza możliwości istniejących maszyn. Tak więc staje się ze wszech miar pożądane poszukiwanie sposobów, mogących zredukować pracę rachunkową<sup>1)</sup>. Tutaj omówiona zostanie jedna z możliwości takiego postępowania o dość szeroki zakres stosowalności.

W wielu problemach fizycznych sytuacja jest taka, że geometria i własności fizyczne materiału pozostają niezmiennie w jakimś określonym kierunku. Jednakże wyrazy zależne od obciążenia mogą wykazywać zmienność w tym kierunku, nie pozwalając na przyjęcie takich uproszczeń, jak np. zastosowanie dwuwymiarowego stanu odkształcenia w zagadnieniach trójwymiarowych. W takich przypadkach można jednak rozpatrywać „zastępcze” zagadnienie, nie zawierające tej szczególnej współrzędnej, wzdłuż której własności się nie zmieniają i budować pełne rozwiązanie z szeregu takich uproszczonych rozwiązań „składowych”.

Opisywany poniżej sposób ma dość ogólny zakres stosowalności, nie ograniczając się zatem do zagadnień budowlanych. Wygodniej jednak jest tutaj zastosować terminologię mechaniki budowli i jako przykładu użyć problemu minimalizacji energii potencjalnej.

Skupmy więc naszą uwagę na problemie minimalizacji funkcjonału kwadratowego (por. rozdz. 2 i 3).

<sup>1)</sup> Interesujące prace z tej dziedziny, choć oparte na innych przesłankach, prowadzi prof. dr inż. J. Samolter (przyp. tłum.).

Niech  $x, y, z$  są współrzędnymi opisującymi obszar (w omawianym przypadku nie muszą to być współrzędne kartezjańskie). Współrzędna  $z$  jest tą, wzdłuż której geometria i własności materiału pozostają niezmiennie. Niech granice badanego obszaru ze względu na  $z$  wynoszą  $0 \leq z \leq a$ . Załóżmy, że funkcje kształtu definiujące zmienność przemieszczeń  $\{f\}$  [por. równanie (2-1)] można zapisać jako iloczyn

$$\{f\} = [N(x, y, z)] \{\delta\}^e = \sum_{l=1}^L \left\{ [\bar{N}(x, y)] \cos \frac{l\pi z}{a} + [\bar{\bar{N}}(x, y)] \sin \frac{l\pi z}{a} \right\} \{\delta\}^e. \quad (13-1)$$

W tej postaci zapewniona jest ogólność funkcji  $\{f\}$ , ponieważ za pomocą szeregów *Fouriera* można przedstawić każdą funkcję ciągłą wewnątrz danego przedziału (naturalnie, przy założeniu, że funkcje kształtu  $\bar{N}$  i  $\bar{\bar{N}}$  spełniają te same wymagania w rozważanym obszarze).

Podobnie wyrazy przedstawiające obciążenie zapiszmy w postaci

$$\{p\} = \sum_{l=1}^L \left\{ \{\bar{p}(x, y)\} \cos \frac{l\pi z}{a} + \{\bar{\bar{p}}(x, y)\} \sin \frac{l\pi z}{a} \right\} \quad (13-2)$$

stosując podobną postać dla obciążeń skupionych i sił brzegowych (por. rozdz. 2).

Jeśli istnieją naprężenia i odkształcenia początkowe, należy je wyrazić w podobnej postaci.

Stosując standardowe postępowanie podane w rozdz. 2 dla określenia udziału poszczególnych elementów w równaniach minimalizujących energię potencjalną i uwzględniając tylko udział  $\{p\}$  możemy napisać

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\delta\}^e} = [k]^e \begin{Bmatrix} \{\delta^1\}^e \\ \vdots \\ \{\delta^L\}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F^1\}^e \\ \vdots \\ \{F^L\}^e \end{Bmatrix} \quad (13-3)$$

Aby uniknąć w wyrażeniu (13-3) sumowania, wektory  $\{\delta\}^e$  wypisane są oddzielnie dla każdego  $l$ . Typowa podmacierz  $[k]^e$  jest

$$[k^{lm}]^e = \iiint_{V_e} [B]^T [D] [B^m] dx dy dz, \quad (13-4)$$

typowe zaś wyrażenie na wektor „siły” staje się równe

$$\{F^l\}^e = \iiint_{V_e} [N]^T \{p\} dx dy dz. \quad (13-5)$$

Jest oczywiste, że macierz (13-4) będzie zawierała jako wynik mnożenia poszczególnych podmacierzy następujące całki

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \sin \frac{l\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} dz, \\ I_2 &= \int_0^a \sin \frac{l\pi z}{a} \sin \frac{m\pi z}{a} dz, \\ I_3 &= \int_0^a \cos \frac{l\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} dz. \end{aligned} \quad (13-6)$$

Całki te powstają z iloczynów pochodnych zawartych w definicji macierzy  $[B]$  i wskutek znanych własności ortogonalności dają

$$I_1 = I_2 = I_3 = 0 \quad \text{dla} \quad l \neq m, \quad (13-7)$$

przy czym

$$l = 1, 2, \dots \quad \text{oraz} \quad m = 1, 2, \dots$$

Oznacza to, że macierz  $[k]^e$  jest diagonalną i zbiór równań końcowych układu ma postać

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & 0 & 0 & \dots \\ 0 & [K^{22}] & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [K^{LL}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{\delta^L\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{F^L\} \end{Bmatrix} = 0. \quad (13-8)$$

W ten sposób duży układ równań rozpada się na  $L$  oddzielnych podukładów

$$[K^{ll}] \{\delta^l\} + \{F^l\} = 0, \quad (13-9)$$

w których

$$[k_{ij}^l] = \iiint_{V_e} [B_i]^T [D] [B_j] dx dy dz. \quad (13-10)$$

Następnie na podstawie wyrażeń (13-2) i (13-5) stwierdzamy, że wskutek ortogonalności całek (13-6) typowy wyraz „obciążeniowy” jest po prostu równy

$$\{F_i\}^e = \iiint_{V_e} [N]^T \{p\} dx dy dz. \quad (13-11)$$

Oznacza to, że wyraz obciążeniowy  $l$ -tej harmonicznej wpływa jedynie na układ „ $l$ -ty” równań (13-9) i nie bierze udziału w pozostałych równaniach. Ma to doniosłe znaczenie praktyczne, bowiem jeżeli wyrażenie określające człon obciążeniowy zawiera tylko jeden wyraz, należy rozwiązywać tylko jeden układ równań. Rozwiązanie tego układu będzie zdążyć do dokładnego przywrócenie zagęszczenia podziału tylko względem płaszczyzny  $x-y$ . W ten sposób pierwotnie trójwymiarowe zagadnienie sprowadziło się do dwuwymiarowego i odpowiednio zmniejszył się czas potrzebny na rozwiązanie.

Przytoczony powyżej wywód dotyczył badania stanu trójwymiarowego, sprężonego. Oczywiście rozumowanie będzie takie samo przy wprowadzaniu zadania dwuwymiarowego do jednowymiarowego itd., przy czym nie dotyczy ono wyłącznie problemów sprężystości. Każde zagadnienie fizyczne, którego rozwiązanie opiera się na minimalizacji funkcjonału kwadratowego (rozdz. 3), nadaje się do podobnego traktowania (które, pod różnymi nazwami, stosowane było w mechanice od dawna).

Celowe jest zwrócenie uwagi, że należy ostrożnie podchodzić do warunków brzegowych założonych dla  $\{f\}$ . Dla kompletnego rozprężenia równań konieczne jest, aby warunki te spełnione były *oddzielnie* przez każdy wyraz rozwinięcia (13-1). Wprowadzenie przemieszczeń zerowych do ostatecznej, zredukowanej postaci zadania oznacza w istocie, że założenie zerowych przemieszczeń w kierunku  $z$  wynika z definicji. Należy więc szczególnie uważać, aby nie potraktowano macierzy końcowej jako prostego zadania zredukowanego. Jest to jednym z istotnych ograniczeń stosowalności procesu.

Gdy obciążenie jest złożone i zachodzi potrzeba zbadania wielu wyrazów rozwinięcia *Fouriera*, zalety powyższego sposobu zanikają i czasem rozwiązanie okazuje się nieekonomiczne.

Możliwe są także inne odmiany sformułowania zadania na bazie definicji (13-1). Można np. przyjąć dwie niezależne rodziny parametrów  $\{\delta\}^e$  rozwijalnych w szeregi trygonometryczne. Możliwe jest też zastosowanie innych funkcji ortogonalnych.

Ponieważ funkcje trygonometryczne występują często, warto przypomnieć następujące całki

$$\int_0^a \sin \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{l\pi x}{a} dx = 0, \quad \text{gdy } l = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{l\pi x}{a} dx = \int_0^a \cos^2 \frac{l\pi x}{a} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{gdy } l = 1, 2, 3, \dots$$
(13-12)

### 13.2. Pręt pryzmatyczny

Rozpatrmy pręt pryzmatyczny pokazany na rys. 13.1. Zakładamy, że jest on zamocowany w przekrojach  $z = 0$  i  $z = a$  w sposób uniemożliwiający jakikolwiek ruch.

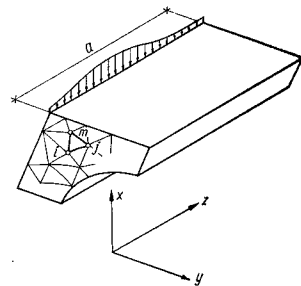
Zadanie jest trójwymiarowe. Należy rozpatrzyć trzy składowe przemieszczenia:  $u, v$  i  $w$ .

Podział na elementy skończone w płaszczyźnie  $x-y$  pozwala założyć składową  $l$  przemieszczenia w kierunku  $x$  jako

$$u^l = [N_1^l, N_2^l, \dots] \sin \frac{l\pi x}{a} \{u^l\}^e, \quad (13-13)$$

i podobne wyrażenia dla składowych  $v^l$  i  $w^l$ .

Tutaj  $N_i^l$  itd. są po prostu skalarnymi funkcjami kształtu, używanymi dla zastosowanych elementów. Jeżeli zastosowano proste trójkąty (rys. 13.1), wówczas funkcje kształtu dane są przez (4-8), lecz każda z bardziej rozbudowanych postaci elementów (por. rozdz. 7) — niezależnie od zastosowania transformacji wg rozdz. 8 — może być stosowana równie dobrze.



Rys. 13.1. Pręt pryzmatyczny zredukowany do układu dwuwymiarowych elementów skończonych

Użyliśmy tutaj tylko wyrazów sinusowych rozwinięcia, ponieważ żądamy zerowych przemieszczeń na obu końcach pręta. W ten sposób warunki te spełnione są automatycznie wskutek sformułowania zadania.

Wyrazy zależne od obciążenia można teraz zapisać za pomocą zwykłego szeregu *Fouriera*

$$\{p\}^l = \{\bar{p}\} \sin \frac{l\pi x}{a}. \quad (13-14)$$

Ponieważ zadanie jest trójwymiarowe, należy rozpatrzyć pełne wyrażenie odkształcenia, obejmujące sześć składowych. Podano je w równaniach (6-9) do (6-11). Podstawiając funkcję kształtu wg (13-13) znajdujemy ogólny wyraz macierzy  $[B]$

$$[B]^l = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^l}{\partial x} \sin \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^l}{\partial y} \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & N_1^l \frac{l\pi}{a} \cos \gamma \\ \frac{\partial N_1^l}{\partial y} \sin \gamma & \frac{\partial N_1^l}{\partial x} \sin \gamma & 0 \\ 0 & N_1^l \frac{l\pi}{a} \cos \gamma & \frac{\partial N_1^l}{\partial y} \sin \gamma \\ N_1^l \frac{l\pi}{a} \cos \gamma & 0 & \frac{\partial N_1^l}{\partial x} \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (13-15)$$

gdzie  $\gamma = \frac{l\pi z}{a}$ .

Dogodnie jest rozdzielić powyższą macierz na dwie

$$[B] = [B] \sin \frac{l\pi x}{a} + [H] \cos \frac{l\pi x}{a}. \quad (13-16)$$

Wszędzie powyżej przyjmuje się, że parametry mają postać

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i^l \\ v_i^l \\ w_i^l \end{Bmatrix} \quad (13-17)$$

i że osie współrzędnych są takie jak pokazano na rys. 13.1.

Macierz sztywności może być obliczona w zwykły sposób z uwzględnieniem, że

$$[k_{ij}]^e = \iiint_{V^e} [B_i]^T [D] [B_j] dx dy dz. \quad (13-18)$$

Podstawiając (13-16), mnożąc i uwzględniając wartość całki (13-12) redukuje się to do

$$[k_{ij}]^e = \frac{\pi}{2} \int_0^a \{ [B_i]^T [D] [\bar{B}_j] + [\bar{B}_i] [D] [\bar{B}_j] \} dx dy, \quad (13-19)$$

gdzie  $l = 1, 2, \dots$

Teraz można powyższe łatwo scałkować względem *pola* elementu<sup>1)</sup>.

Podobnie udział sił masowych, naprężeń początkowych itd. można uwzględnić za pomocą wyrazów „obciążeniowych”. Obciążenie rozłożone wzdłuż linii należy wyrazić wprost jako siły węzłowe

$$\{F_i^l\} = \int_0^a \sin \frac{l\pi x}{a} \begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{zi} \end{Bmatrix} \sin \frac{l\pi x}{a} dx = \{\bar{F}^l\} \frac{a}{2}, \quad (13-20)$$

gdzie  $\{\bar{F}^l\}$  są intensywnościami obciążenia na jednostkę długości.

W przykładzie tym założyliśmy pełne zamocowanie końców pręta. Rozpatrzmy np. takie warunki:  $u = v = 0$  na końcach, lecz bez ograniczenia przemieszczenia  $w$  (każde inne warunki też można uwzględnić podobnie). Teraz możemy zastosować wyrażenia podobne do (13-13) dla  $u$  i  $v$ , ale rozwinięcie  $w$  należy mnożyć przez wyrażenia kosinusowe, które nie dają wartości zerowych na końcach.

Podczas gdy dwa pierwsze wyrażenia zabezpieczają spełnienie warunków brzegowych zamocowania, ostatnie odpowiada swobodnemu podparciu, przy istnieniu więzi ograniczających ruch w płaszczyźnie  $xy$ .

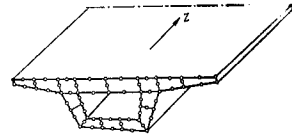
Omówiony tutaj sposób rozwiązania można zastosować do wielu zadań praktycznych, np. do mostu żelbetowego (rys. 13.2). Tutaj w szczególności wygodny jest kształt elementów zniekształconych, typu *Serendipa*, kwadratowych lub sześciennych (por. rozdz. 7 i 8).

<sup>1)</sup> Trzeba zauważyć, że teraz, także i dla najprostszych trójkątów, całkowanie nie jest łatwe, gdyż w macierzy  $[B]$  pozostają wyrazy liniowe.

Wreszcie wspomnieć należy, że pewne ograniczenia, ważne dla postaci ogólnej podanej w (13-1) lub (13-3), mogą wystąpić przy podwajaniu liczby parametrów i pisaniu rozwinięcia w postaci sumy

$$\{f\} = \sum_{i=1}^L \bar{N}(x, y) \cos \frac{l\pi x}{a} \{\delta^{4i}\}^e + \sum_{i=1}^L \bar{N}(x, y) \sin \frac{l\pi x}{a} \{\delta^{5i}\}^e. \quad (13-21)$$

Parametry  $\{\delta^{4i}\}^e$  i  $\{\delta^{5i}\}^e$  są niezależne i dla każdej składowej przemieszczenia należy znaleźć dwie wartości i ułożyć dwa równania.



Rys. 13.2. Grubościenny wycinek mostu skrzynkowego rozpatrywany jako zagadnienie dwuwymiarowe przez zastosowanie izoparametrycznych kwadratowych elementów

Inaczej można też zapisać funkcję w postaci

$$\{f\} = \sum_{i=1}^L [N(x, y) e^{i\frac{l\pi x}{a}}] \{\delta^i\}^e$$

i założyć, że zarówno  $[N]$  jak i  $\{\delta\}$  są wielkościami zespolonymi. Liczby zespolone mogą być stosowane do obliczeń na maszynach cyfrowych; łatwo stwierdzić, że wyrażenie powyższe jest identyczne z (13-21), jeśli przypomnimy, że  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

### 13.3. Cienkościenna skrzynkowa konstrukcja przeponowa

W poprzednich rozdziałach zadanie trójwymiarowe redukowane było do dwuwymiarowego. Tutaj pokażemy, jak zadanie dwuwymiarowe można zredukować do jednowymiarowego.

Rozpatrzmy konstrukcję skrzynkową, wykonaną z elementów cienkościennych, zdolnych do przeniesienia jedynie naprężeń w swej płaszczyźnie (rys. 13.3).

Teraz, podobnie jak poprzednio, należy rozpatrzeć trzy przemieszczenia w każdym punkcie i należy przypisać im podobną zmienność. Jednak element typowy  $ij$  jest teraz „jednowymiarowy” w tym sensie, że całkowania muszą być wykonywane wzdłuż linii  $ij$ , i naprężenia rozpatrywane są tylko wzdłuż tej linii. Okazuje się, że rozwiązanie tego zadania jest podobne do rozwiązania kratownicy.

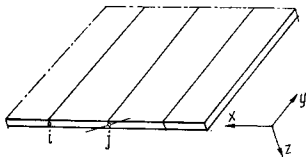


Rys. 13.3. Skrzynka „membranowa”, elementy jednowymiarowe

### 13.4. Płyty lub skrzynki zginane

Rozpatrzmy teraz prostokątną płytę swobodnie podpartą na końcach, w której całkowita energia odkształcenia pochodzi od zginania. Teraz należy określić jedno tylko przemieszczenie  $w$  (rys. 13.4) definiując całkowicie stan odkształcenia.

Dla zwartości zapisu, kierunku, w którym geometria i własności materiału nie ulegają zmianie, oznaczono przez  $y$  (rys. 13.4). Aby zapewnić ciągłość pochodnej, funkcje powinny teraz zawierać parametr obrotu  $\theta_i$ .



Rys. 13.4. Przykład zastosowania metody „pasmowej” w płytach

Stosując proste funkcje belki, możemy zapisać dla typowego elementu

$$w^t = [\bar{N}(x)] \sin \frac{lxy}{a} \{\delta^t\}^a, \quad (13-22)$$

gdzie typowymi parametrami są

$$\{\delta_i^t\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad (13-23)$$

Teraz z łatwością napiszemy funkcje kształtu typu sześciennego; są one w istocie identyczne z tymi, które użyto do zagadnienia powłok osiowo-symetrycznych (por. rozdz. 12).

Wykorzystując definicje podane w rozdz. 10 znajdziemy odkształcenia (krzywizny) i wyznaczmy macierz [B].

Tutaj zagadnienie dwuwymiarowe sprowadzone zostało do jednowymiarowego.

Sposób ten zaproponowany przez Cheunga [1] [2] [3] i nazwany przez niego „metodą skończonych odcinków” stosowany był do rozwiązania szeregu problemów płyt prostokątnych. Pouczające jest przytoczenie jednego przykładu z wymienionej właśnie publikacji. Dotyczy on kwadratowej równomiernie obciążonej płyty o trzech bokach swobodnie podpартych i jednym swobodnym. Zastosowano dziesięć odcinków skończonych w kierunku  $x$  (elementów). Tablica 13.1 podaje rezultaty odpowiadające pierwszym trzem harmonicznym rozwinięciem.

Widąc tu nie tylko dokładność rozwiązania (przy prostych rachunkach uwzględniających tylko 9 niewiadomych), ale i to, że wpływ wyższych harmonicznych szybko maleje.

Rozciągnięcie powyższego postępowania na konstrukcje skrzynkowe, w których występują zarówno efekty blonowe, jak i zginanie, jest już proste. Przykład powyższy należy rozpatrzeć wspólnie z przykładem z poprzedniego paragrafu.

Tablica 13.1

Płyta kwadratowa (obciążenie równomierne  $q$ , trzy boki swobodnie podparte, czwarty swobodny)

$\nu = 0,3$	Ugięcie w środku	Moment $M_x$ w środku	Maksymalny moment ujemny
$l = 1$	0,002832	0,0409	-0,0858
$l = 2$	-0,000050	-0,0016	0,0041
$l = 3$	0,000004	0,0003	-0,0007
$\Sigma =$	0,002786	0,0396	-0,0840
Dokładnie	0,0028	0,039	-0,084
Mnożnik	$qa^4/D$		$qa^2$

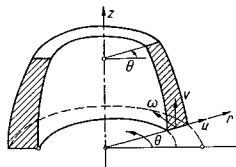
W innej pracy Cheung [4] pokazał, że można zastosować inne niż trygonometryczne rozwinięcia; wówczas jednak występuje tylko częściowe rozprzężenie układu równań.

### 13.5. Ciała osiowo-symetryczne z niesymetrycznym obciążeniem

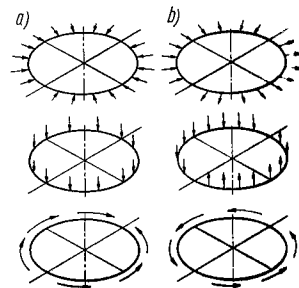
Jednym z najbardziej naturalnych i najwcześniejszych zastosowań pojedynczego szeregu *Fouriera* jest obliczenie osiowo-symetrycznych ciał poddanych niesymetrycznym obciążeniom.

Należy w tym przypadku rozpatrzeć nie tylko przemieszczenia osiowe  $u$  i promieniowe  $v$  (jak w rozdz. 5), lecz także przemieszczenie styczne  $w$ , związane ze współrzędną kątową  $\theta$  (rys. 13.5). Własności geometryczne i fizyczne materiału są stałe ze względu na tę współrzędną, toteż można tutaj zastosować eliminację (5-6).

Dla uproszczenia rozważań rozpatrzmy najpierw składowe obciążenia symetryczne względem osi  $\theta = 0$ , a następnie składowe antysymetryczne. Opisując tylko



Rys. 13.5. Ciało osiowo-symetryczne; współrzędne i przemieszczenia



Rys. 13.6. Symetryczne (a) i antysymetryczne (b) składowe obciążenia i przemieszczenia w ciele osiowo-symetrycznym

obciążenia w węzłach (za pomocą okoliczność podobnych do tych jakie zastosowaliśmy dla sił masowych, brzegowych, odkształceń początkowych itd.) określimy siły na jednostkę długości obwodu w kierunku każdej ze współrzędnych dla obciążenia symetrycznego (rys. 13.6 a)

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^L \bar{R}^i \cos l\theta, \\ Z &= \sum_{i=1}^L \bar{Z}^i \cos l\theta, \\ T &= \sum_{i=1}^L \bar{T}^i \sin l\theta. \end{aligned} \quad (13-24)$$

Dla obciążeń stycznych  $T$  zastosowano niesymetryczne wyrażenie sinusowe, aby zachować symetrię tego obciążenia przy  $\theta > \pi$ .

Składowe przemieszczenia wyrażamy znów przez dwuwymiarowe funkcje kształtu  $(r, z)$ , dobrane odpowiednio do podziału na elementy i po uwzględnieniu symetrii piszemy

$$\begin{aligned} u^i &= [N_1^i, N_2^i, \dots] \cos l\theta \{u^i\}^e, \\ v^i &= [N_1^i, N_2^i, \dots] \cos l\theta \{v^i\}^e, \\ w^i &= [N_1^i, N_2^i, \dots] \sin l\theta \{w^i\}^e. \end{aligned} \quad (13-25)$$

Dalej należy określić ogólne trójwymiarowe wyrażenia na odkształcenia we współrzędnych walcowych (p. Love [5])

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (13-26)$$

Jak poprzednio następuje rozprężenie poszczególnych postaci i możemy wyliczyć sztywności itd., dla każdej harmonicznej. Np. po podstawieniu (13-25) i zebraniu zmiennych, jak w (13-17) mamy

$$[B^i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^i}{\partial r} \cos l\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^i}{\partial z} \cos l\theta & 0 \\ \frac{N_1^i}{r} \cos l\theta & 0 & -\frac{N_1^i}{r} l \cos l\theta \\ \frac{\partial N_1^i}{\partial z} \cos l\theta & \frac{\partial N_1^i}{\partial r} \cos l\theta & 0 \\ -\frac{1}{r} N_1^i \sin l\theta & 0 & \left( \frac{\partial N_1^i}{\partial r} - \frac{N_1^i}{r} \right) \sin l\theta \\ 0 & -\frac{1}{r} N_1^i \sin l\theta & \frac{\partial N_1^i}{\partial z} \sin l\theta \end{bmatrix} \quad (13-27)$$

Dalsze postępowanie odbywa się dokładnie tak, jak opisano poprzednio.

Dla obciążenia antysymetrycznego wg rys. 13.6b powinniśmy po prostu w równaniach (13-24) i (13-25) zastąpić sinusy przez cosinusy i odwrotnie.

Wyrazy „obciążeniowe” dla każdej harmonicznej otrzymamy z zasady pracy wirtualnej. Dla obciążenia symetrycznego będziemy mieli

$$\begin{aligned} \{F_l^i\} &= \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \bar{R}^i \cos^2 l\theta \\ \bar{Z}^i \cos^2 l\theta \\ \bar{T}^i \sin^2 l\theta \end{Bmatrix} d\theta = \pi \begin{Bmatrix} \bar{R}^i \\ \bar{Z}^i \\ \bar{T}^i \end{Bmatrix} \quad \text{gdy } l = 1, 2, \dots \\ &= 2\pi \begin{Bmatrix} \bar{R}^i \\ \bar{Z}^i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{gdy } l = 0, \end{aligned} \quad (13-28)$$

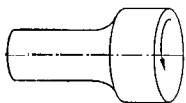
natomiast dla przypadku antysymetrycznego odpowiednio

$$\begin{aligned} \{F_l^i\} &= \pi \begin{Bmatrix} \bar{R}^i \\ \bar{Z}^i \\ \bar{T}^i \end{Bmatrix} \quad \text{gdy } l = 1, 2, \dots \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{gdy } l = 0. \end{aligned} \quad (13-29)$$

Po uzyskaniu wyrażeń na  $[k^e]$  można się przekonać, że dla  $l = 0$  problem redukuje się do dwu zmiennych i dla obciążeń symetrycznych uzyskuje się przypadek osiowej symetrii.



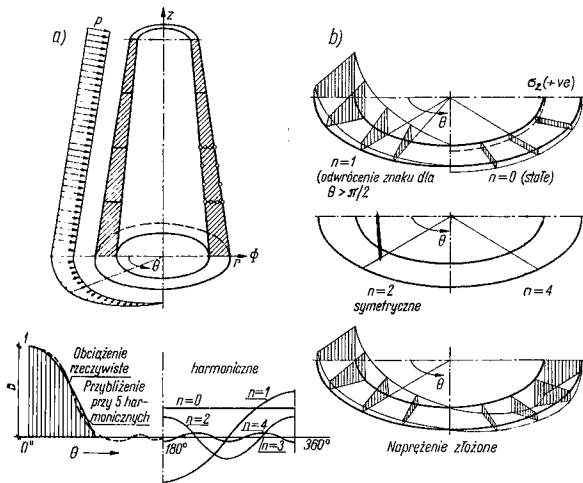
Podobnie gdy  $l = 0$  pozostaje tylko jedna rodzina równań dla zmiennej  $w$  w przypadku antysymetrii. Odpowiada to stałemu stycznemu rozciąganiu i pozwala na proste rozwiązanie problemów skręcania pręta poddanego znanemu obciążeniu skręcającemu (rys. 13.7). Zadanie to w teorii sprężystości rozwiązuje się za pomocą funkcji naprężeń, a ostatnio rozwiązano je za pomocą metody elementów skończonych [6] [7], pozwalającej w większym stopniu uwzględnić fizyczną stronę zagadnienia.



Rys. 13.7. Pręt o zmiennym przekroju (skręcanie)

Pierwszy zastosował powyższe rozwiązania do badania ciał osiowo-symetrycznych Wilson [8].

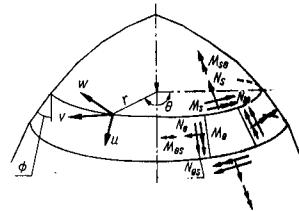
Prosty przykład ilustrujący wpływ poszczególnych harmonicznych pokazano na rys. 13.8a, b.



Rys. 13.8. Osiowo-symetryczna wieża pod niesymetrycznym obciążeniem (ciśnienie sinusoidalne na połowie obwodu): a) rozwiązanie za pomocą czterech elementów, b) rozkład naprężenia pionowego na podstawie wieży wywołany różnymi harmonikami obciążenia i ich kombinacje; pierwsze dwie harmoniczne dają praktycznie zadowalające rozwiązanie

### 13.6. Powłoki osiowo-symetryczne z niesymetrycznym obciążeniem

Rozwinięcie powyższej analizy na powłoki osiowo-symetryczne, podane w rozdz. 12, jest już proste i odbywa się wg opisanych zasad. Należy jednak określając odkształcenia uwzględnić wszystkie trzy składowe przemieszczenia i składowe sił



Rys. 13.9. Osiowo-symetryczna powłoka przy niesymetrycznym obciążeniu. Przemieszczenia i wypadkowe naprężenia

(rys. 13.9). Występują obecnie trzy efekty błonowe i trzy efekty zginania, rozszerzając zatem równanie (12-1) napiszemy [9]<sup>1)</sup>

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{1}{2r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + (w \cos \phi + u \sin \phi) \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - 2 \sin \phi \frac{v}{r} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \phi}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \\ 2 \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin \phi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{r^2} v \right) \end{Bmatrix} \quad (13-30)$$

Odpowiadająca macierz naprężeń jest teraz równa

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ m_s \\ m_\theta \\ m_{s\theta} \end{Bmatrix}$$

Zawiera ona trzy składowe sił i trzy momenty pokazane na rys. 13.9.

<sup>1)</sup> Proponowano tutaj kilka wariantów wynikających z różnych teorii powłok. Opisani jest jedną z najpowszechniej przyjętych.

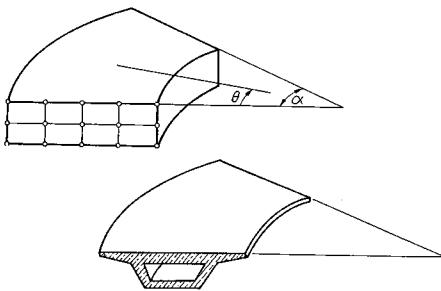
I znów, jak poprzednio, można założyć symetryczną i antysymetryczną zmienność obciążenia. Dalsze postępowanie jest zupełnie takie samo jak poprzednio. Czytelnika odesłać należy do prac oryginalnych (np. *Grafton i Strome* [10], gdzie problemem tym zajęto się po raz pierwszy) i do wielu późniejszych prac podanych w rozdz. 12.

Kilka przykładów, ilustrujących sposób postępowania w przypadku grubościennych powłok, podano w rozdz. 14.

### 13.7. Uwagi końcowe

Całkowicie ogólny sposób postępowania, łączący pewne zalety metody elementów skończonych z prostotą wyrażen uzyskaną dzięki zastosowaniu funkcji ortogonalnych, sprawdzony był w wielu zastosowaniach. Należy jednak pamiętać, że opłacalność wspomnianego sposobu jest do uzyskania tylko w przypadku określonych układów geometrycznych, takich mianowicie, gdzie liczba wyrazów rozwinięcia, wystarczająca do uzyskania poprawnego wyniku, nie jest wielka.

Podobnie można badać inne przypadki „pryzmatyczne”, w których rozważa się tylko wycinek ciała obrotowego (rys. 13.10). Oczywiście należy teraz dokonywać rozwinięcia w zależności od kąta  $\ln\theta/\alpha$ , ale postępowanie jest w dalszych szczegółach takie samo, jak podano poprzednio.



Rys. 13.10. Układ segmentowo-pryzmatyczny

Istnieją, oczywiście, inne możliwości kombinowania zalet rozwiązań analitycznych z uniwersalnością, możliwą do uzyskania w metodach numerycznych. Na przykład gdy występują osobliwości (np. siła skupiona), można je wyeliminować przez rozwiązanie ścisłe, a następnie rozwiązać numerycznie zadanie dodatkowe, w którym np. dokonuje się usunięcia rozłożonego w sposób ciągły obciążenia. Rozwiązanie numeryczne może być wówczas wykonane z mniejszą dokładnością i może w ten sposób okazać się bardziej oszczędne. Opis takiego postępowania podano w pracy *Zienkiewicza* i in. [11], [12].

Nieco odmienne zastosowanie takich kombinowanych metod podał *Morley*

[13]; rozważał tam osobliwości w postaci wklęsłych kątów. Brak miejsca nie pozwalała na dalsze omówienie zagadnienia, jednak i tutaj zmniejszenie stopnia ogólności jest ceną jaką należy zapłacić za uzyskane oszczędności.

W podanych w niniejszym rozdziale metodach zakładano, że własności materiału pozostają niezmiennie wzdłuż jednej ze współrzędnych. To ograniczenie może czasem być osłabione przy zachowaniu ogólnych zasad omawianego postępowania. Ciekawy przykład tego typu podali *Stricklin i De Andrade* [14].

W jeszcze innym typie metod „wymiar” zagadnienia można zredukować poprzez zastosowanie poprawnych rozwiązań osobliwych i przedstawienie np. pełnego zadania trójwymiarowego za pomocą równania całkowego, rozciągniętego na powierzchnię. Na ogół mamy wówczas do rozwiązania zadanie typu

$$f(p) + \int_S K(p, q) f(q) dS = F(p), \quad (13-31)$$

gdzie  $p$  i  $q$  określają współrzędne poszczególnych punktów na powierzchni  $S$ , zaś  $f(p)$  jest nieznaną funkcją rozwiązującą zagadnienia.  $K$  i  $F$  są znanymi funkcjami.

Takie równanie całkowite można w sposób bardzo naturalny rozwiązać za pomocą metody elementów skończonych, dzieląc powierzchnię  $S$  na obszary, odpowiadające tym elementom i stosując przybliżone wyrażenie na  $f$ .

Typowe sformułowanie tego rodzaju podał *Massonet* [15] w pracy z teorii sprężystości. *Fried* [16] wykazał, jak problem nieograniczonego płynięcia wokół pewnego obiektu może być opisany za pomocą elementów skończonych przybliżających tylko do powierzchni obiektu.

#### Cytowane publikacje

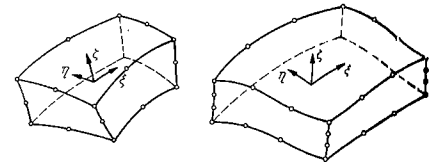
- [1] Y. K. Cheung: The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends. Proc. Inst. Civ. Eng., 40, s. 1—7, 1968.
- [2] Y. K. Cheung: Finite strip method of analysis of elastic slabs. Proc. Am. Soc. Civ. Eng., E.M.S., s. 1268—70, 1968.
- [3] Y. K. Cheung: Folded plate structures by the finite strip method. Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 95, s. 2063—79, 1969.
- [4] Y. K. Cheung: The analysis of cylindrical orthotropic curved bridge decks. Publ. Int. Ass. Struct. Eng., 20-11, s. 41—52, 1969.
- [5] A. E. H. Love: The mathematical theory of elasticity, 4 wyd. Cambridge Univ. Press, 1927, s. 56.
- [6] S. Timoshenko, J. H. Goodier: Theory of Elasticity, 2 wyd., McGraw-Hill, 1951. Książka ta ukazała się w polskim wydaniu: Teoria sprężystości. Arkady, Warszawa 1962.
- [7] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: Stresses in Shafts, The Engineer, 24 Nov., 1967.
- [8] E. L. Wilson: Structural analysis of axi-symmetric solids, J. A.I.A.A., 3, s. 2269—74, 1965.
- [9] V. V. Novozhilov: Theory of thin shells (Translation), P. Noordhoff, 1959.
- [10] P. E. Grafton, D. R. Strome: Analysis of axi symmetric shells by the direct stiffness method, J. A.I.A.A., 1, s. 2342—47, 1963.
- [11] O. C. Zienkiewicz, R. W. Gerstner: The method of interface stress adjustment and its uses in some plane elasticity problems, Int. J. Mech. Sci., 2, s. 267—276, 1961.
- [12] O. C. Zienkiewicz, R. G. Gerstner: Stress analysis and special problems of prestressed dams, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 87, POI, s. 7—43, 1961.
- [13] L. S. D. Morley: A finite element application of modified Rayleigh—Ritz method, Int. J. Num. Meth. In Eng., To be published, 1970.
- [14] J. A. Stricklin, J. C. De Andrade: Linear and non linear analysis of shells of revolution with asymmetrical stiffness properties, Proc. 2nd Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base Ohio, 1968.
- [15] C. E. Massonet: Numerical use of integral procedures, Chapter 10 of Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Hollister, J. Wiley, 1965.
- [16] I. Fried: Finite element analysis of problems formulated by an integral equation; Application to potential flow, Inst. für Statik u. Dynamik u. Raumfahrtstatik, Stuttgart, 1968.

## 14. Powłoki grubościenne jako szczególny przypadek problemu trójwymiarowego

### 14.1. Wstęp

W rozdziale 8 i 9 podano opis i przykłady zastosowania złożonych zakrzywionych dwu- i trójwymiarowych elementów. Oczywiście można bezpośrednio zastosować takie elementy trójwymiarowe do obliczania powłok zakrzywionych zmniejszając po prostu wymiar w kierunku grubości powłoki (rys. 14.1). Taki sposób postępowania przedstawiony został w rozdz. 9 dla powłok osiowo-symetrycznych, rys. 9.6.

Gdybyśmy jednak chcieli zastosować bezpośrednio elementy trójwymiarowe dla dowolnej powłoki, napotkalibyśmy pewne trudności.



Rys. 14.1. Zakrzywione sześciściany izoparametryczne stanowiące bezpośrednie odwzorowanie powłoki

Po pierwsze, zachowanie trzech stopni swobody w każdym węźle prowadzi do dużych współczynników sztywności dla przemieszczeń względnych wzdłuż grubości powłoki. Stanowi to poważny problem numeryczny i gdy grubość powłoki staje się mała w stosunku do pozostałych wymiarów elementu, fakt ten może doprowadzić do wynaturzonych (zdegenerowanych) równań.

Po drugie, powstaje kwestia oszczędności i czasu obliczenia. Użycie kilku węzłów rozmieszczonych w poprzek grubości powłoki oznacza ignorowanie dobrze znanego faktu, że nawet dla grubych powłok prosta normalna do powierzchni środkowej pozostaje, po deformacji wskutek obciążenia, prosta. Tworzy się więc niepotrzebnie dużą liczbę stopni swobody, powodując straty czasu pracy maszyny.

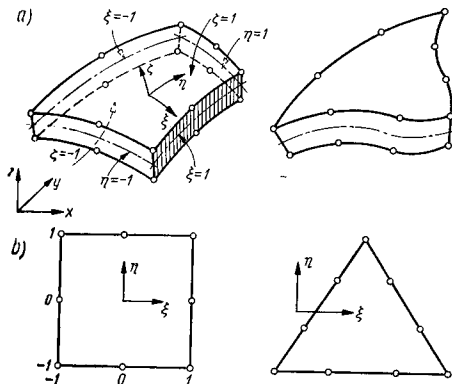
Przytoczone poniżej postępowanie pozwala na ominięcie tych obydwo trudności [1], [2], [3]. Dla polepszenia ekonomii rozwiązania wprowadzono założenie „prostych normalnych”; pominięto energię odkształcenia odpowiadającą naprężeniem prostopadłym do środkowej powierzchni powłoki, poprawiając w ten sposób wspomnianie zle uwarunkowanie równań analizy numerycznej. Przy tych modyfikacjach powstaje możliwość uzyskania sprawnego narzędzia do badania zakrzywionych powłok grubościennych. Dokładność proponowanego sposobu i szeroki zakres możliwości jego zastosowań przedstawiono na kilku przykładach.

Czytelnik zechce zauważyć, że wprowadzone powyżej dwa ograniczenia odpowiadają tylko części zwykłych założeń przyjmowanych w teorii powłok. Rozmyślnie pominięto założenie, że po odkształceniu normalne do powierzchni środkowej pozostają normalnymi. Pominięcie to pozwala uwzględniać deformacje od sił stycznych; jest to ważne dla powłok grubościennych.

## 14.2. Opis geometrii elementu

Rozważmy typowy element powłoki grubościenną (rys. 14.2). Powierzchnie zewnętrzne elementu są zakrzywione, podczas gdy przekroje przez jego grubość (równą grubości powłoki) tworzone są przez linie proste. Pary punktów  $i$  górny oraz  $i$  dolny, każdy o zadanych współrzędnych kartezjańskich, opisują kształt elementu.

Niech  $\xi$  i  $\eta$  będą dwiema współrzędnymi krzywoliniowymi w płaszczyźnie środkowej powłoki, a  $\zeta$  — współrzędną liniową w kierunku grubości. Jeżeli założymy, że  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  zmieniają się od  $-1$  do  $+1$  na odpowiednich ściankach elementu, to możemy napisać zależność między współrzędnymi kartezjańskimi



Rys. 14.2. Zakrzywione grubościennie elementy powłokowe różnych postaci

w każdym punkcie powłoki a współrzędnymi krzywoliniowymi w postaci

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} 1+\xi \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{gór.}} + \sum N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} 1-\xi \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{dol.}} \quad (14-1)$$

Tutaj  $N_i(\xi, \eta)$  jest funkcją kształtu przybierającą wartość 1 w węzłach  $i$  oraz zero w pozostałych (por. rozdz. 8). Jeśli te podstawowe funkcje  $N_i$  są uzyskane jako funkcje kształtu dwuwymiarowych, „macierzystych”, kwadratowych lub też trójkątnych elementów<sup>1)</sup> na płaszczyźnie i są tak dobrane, że istnieje zgodność na ich krawędziach, wtedy zakrzywione elementy przestrzenne będą również pasować do siebie (będą zgodne ze sobą). Można uzyskać dowolnie zakrzywione postaci elementów przy użyciu funkcji kształtu różnych stopni. Kwadratowe i sześciennie funkcje zastosowano do elementów pokazanych na rys. 14.2. Jeśli zachodzi potrzeba, na powierzchniach elementu można umieścić większą liczbę węzłów (będą zgodne ze sobą). Można uzyskać dowolnie zakrzywione każdą dwuwymiarową funkcję kształtu spośród omówionych w rozdz. 7.

Skoro już ustalono związek między współrzędnymi kartezjańskimi a krzywoliniowymi, wygodniej będzie operować dalej współrzędnymi krzywoliniowymi. Należy przy tym zauważyć, że kierunek współrzędnej  $\zeta$  jest tu w przybliżeniu normalny do powierzchni środkowej.

Wygodnie jest przepisać zależność (14-1) w postaci określonej przez wektor wiążący górny i dolny punkt (tj. wektor, którego długość równa jest grubości powłoki  $t$ ) i współrzędne powierzchni środkowej. Mamy wówczas związek<sup>2)</sup>

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{środk.}} + \sum N_i \frac{\zeta}{2} V_{3i}, \quad (14-2)$$

gdzie

$$V_{3i} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{gór.}} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{dol.}}$$

## 14.3. Pole przemieszczeń

Określmy teraz pole przemieszczeń dla elementu. Przyjmując, że odkształcenia w kierunku normalnym do powierzchni środkowej są znikome i można je pominąć, przemieszczenie elementu będzie jednoznacznie określone przez trzy kartezjańskie składowe przemieszczenia węzła na powierzchni środkowej i dwa obroty wektora  $V_{3i}$  wokół ortogonalnych kierunków normalnych do tego wektora. Jeżeli dwa takie kierunki dane są przez wektory  $v_{2i}$  i  $v_{1i}$  (o długości jednostkowej) z odpo-

<sup>1)</sup> W tym przypadku zamiast  $\xi$  i  $\eta$  muszą być użyte współrzędne powierzchniowe (por. rozdz. 7).

<sup>2)</sup> Patrz Dodatek 5 o algebrze wektorów.

wielającymi im skalarnymi rotacjami  $\alpha_i$  i  $\beta_i$ , to możemy podobnie do (14-2) napisać związek, opuszczając dla prostopadłości wektorki określające powierzchnię środkową

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum N_i \zeta \cdot \frac{t_i}{2} [v_{1i} - v_{2i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}, \quad (14-3)$$

gdzie  $u, v, w$  są przemieszczeniami w kierunkach osi kartezjańskich  $x, y, z$ .

Ponieważ można utworzyć nieskończenie wiele wektorów normalnych do danego kierunku, opracowano schematy dla zapewnienia jednoznaczności definicji. Niektóre z tych schematów były omawiane w rozdz. 11. Tutaj podamy jeden z wariantów takiego schematu.

Gdy zatem  $V_{3i}$  jest wektorem, dla którego mamy skonstruować normalne, tworzymy pierwszą z nich w kierunku prostopadłym do płaszczyzny utworzonej przez ten wektor i oś  $x^1$ .

Wektor  $V_{1i}$  utworzony w ten sposób jest iloczynem wektorowym

$$V_{1i} = i \times V_{3i}, \quad (14-4)$$

gdzie:  $i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$  jest wektorem jednostkowym w kierunku osi  $x$ .

Dzielicz otrzymamy tak wektor przez jego długość, znajdujemy wektor jednostkowy  $v_{1i}$ . Ostatni wektor, normalny do obydwu pozostałych, znajdujemy ze związku

$$V_{2i} = V_{1i} \times V_{3i}, \quad (14-5)$$

a wszystkie kosinusy kierunkowe osi lokalnych możemy określić przez normowanie ich względem  $v_{2i}$ . Mamy w ten sposób trzy lokalne ortogonalne osie określone przez

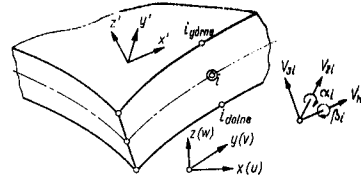
$$v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}. \quad (14-6)$$

Jżeli dalej  $N_i$  są funkcjami zgodnymi, wtedy — jak wiadomo — zachowana jest zgodność przemieszczeń między stykającymi się elementami.

Współrzędne elementu wyrażone są przez związek (14-1) zawierający więcej stopni swobody niż wyrażenie (14-3) określające przemieszczenia. Element jest zatem typu superparametrycznego (p. 8.3), kryteria stałego odkształcenia nie są zatem w nim automatycznie spełnione.

Tym niemniej, jak zobaczymy, z definicji składowych odkształcenia wynika, że zarówno warunki ruchu elementu jako ciała sztywnego, jak i warunki stałego odkształcenia mogą być spełnione.

<sup>1)</sup> Jest to niemożliwe, gdy  $V_{3i}$  pokrywa się z osią  $x$ . Łatwo jednak napisać program uwzględniający tę okoliczność; w takich przypadkach kierunki lokalne otrzymuje się zastępując oś  $x$  przez oś  $y$ .



Rys. 14.3. Współrzędne i układy odniesienia elementu zakrzywionego

Z fizycznego punktu widzenia założono w definicji (14-3), że nie zachodzi odkształcenia w kierunku grubości powłoki  $\zeta$ . Mimo że kierunek ten nie jest dokładnie normalny do powierzchni środkowej, przedstawia on dobrą aproksymację jednego z podstawowych założeń teorii powłok.

W każdym węzle na powierzchni środkowej powłoki mamy obecnie (rys. 14.3) trzy główne stopnie swobody.

#### 14.4. Definicje odkształceń i naprężeń

W celu wyprowadzenia podstawowych związków w elemencie należy zdefiniować odkształcenia i naprężenia. Podstawowymi są składowe w kierunkach osi ortogonalnych odniesionych do powierzchni  $\zeta = \text{const}$ , co wynika z omówionych powyżej założeń. Jeśli więc w dowolnym punkcie tej powierzchni wystawimy normalną  $z'$  i dwie prostopadłe do niej  $x'$  i  $y'$  leżące w płaszczyźnie stycznej do tej powierzchni (rys. 14.3), wówczas interesujące nas składowe odkształcenia są zadane przez trójwymiarowe związki przytoczone w rozdziale 6

$$\{e'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{z'x'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \end{Bmatrix} \quad (14-7)$$

gdzie, jak zakładaliśmy, odkształcenie w kierunku osi  $z'$  jest pomijalnie małe. Zauważmy, że ogólnie biorąc, żaden z tych kierunków nie pokrywa się z kierunkami współrzędnych krzywoliniowych  $\xi, \eta, \zeta$ , chociaż  $x'$  i  $y'$  leżą w płaszczyźnie  $\xi - \eta = \text{const}^1$ .

<sup>1)</sup> Rzeczywiście, kierunki te tylko w przybliżeniu pokrywają się z kierunkami  $v_{1i}$  wprowadzonymi poprzednio, gdyż w ogólności wektor  $v_{3i}$  jest tylko w przybliżeniu normalny do powierzchni środkowej.

Naprężenia odpowiadające tym odkształceniom zdefiniowane są poprzez macierz  $\{\sigma'\}$  i związane z odkształceniami poprzez macierz sprężystości  $[D']$ , czyli

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = [D'](\{e'\} - \{e'_0\}) + \{\sigma'_0\}, \quad (14-8)$$

gdzie  $\{e'_0\}$  i  $\{\sigma'_0\}$  może przedstawiać każdy początkowy stan odkształcenia bądź naprężenia.

Macierz  $[D']$  o wymiarze  $5 \times 5$  może teraz zawierać dowolne własności anizotropowe i nawet może być zadana jako funkcja  $\zeta$  (np. jeśli badamy konstrukcję warstwową). Na razie zdefiniujemy ją dla materiału izotropowego. Mamy

$$[D'] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \quad (14-9)$$

gdzie  $E$  i  $\nu$  są, odpowiednio, modułem Younga i współczynnikiem Poissona. Czynniki  $k$  zawarty w ostatnich dwu wyrażeniach przyjmuje się jako  $k = 1, 2$ . Celem jego jest poprawienie przybliżenia dla przemieszczenia poprzecznego. Z założonej funkcji przemieszczeń widać, że rozkład naprężeń stycznych jest prawie stały na grubości powłoki, podczas gdy w rzeczywistości jest on w przybliżeniu paraboliczny. Wartość  $k = 1, 2$  jest współczynnikiem poprawkowym dla energii odkształcenia.

Ważne jest odnotować, że macierzy (14-9) nie otrzymano po prostu przez skrócenie odpowiednich członów z macierzy zadania trójwymiarowego podanej w równaniu (6-14). Należy ją otrzymać przez podstawienie do (6-13) wartości  $\sigma_z = 0$  i stosowne przekształcenie.

## 14.5. Własności elementu i niezbędne transformacje

Macierz sztywności (i wszystkie inne własności elementu) zawierają całki po objętości elementu, których postać ogólna jest następująca

$$\int_{V^e} [S] dx dy dz, \quad (14-10)$$

gdzie macierz  $[S]$  jest funkcją współrzędnych.

W macierzy sztywności

$$[S] = [B]^T [D] [B] \quad (14-11)$$

np. przy uwzględnieniu zależności z rozdziału 2

$$\{e\} = [B] \{\delta\}^e \quad (14-12)$$

mamy  $[B]$  zdefiniowane przez pochodne przemieszczeń względem współrzędnych lokalnych kartezjańskich  $x', y', z'$  [równanie (14-7)].

Aby zatem można było skalować element względem współrzędnych krzywoliniowych  $\xi, \eta, \zeta$ , potrzebne są teraz *dwa etapy transformacji*. Po pierwsze, podobnie jak w rozdz. 8, należy otrzymać pochodne ze względu na osie  $x, y, z$ . Ponieważ (14-3) wiąże przemieszczenia globalne  $u, v, w$  ze współrzędnymi krzywoliniowymi  $\xi, \eta, \zeta$ , pochodne tych przemieszczeń względem osi  $x, y, z$  dane są poprzez związek

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (14-13)$$

Tutaj Jakobian (macierz *Jacobiego*) zdefiniowany jest tak jak poprzednio

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (14-14)$$

i oblicza się go korzystając ze związków (14-2).

Z kolei, dla każdego układu współrzędnych krzywoliniowych pochodne przemieszczeń globalnych mogą być znalezione na drodze numerycznej.

Druga transformacja do kierunków lokalnych  $x', y', z'$  pozwoli dopiero obliczyć naprężenia, a następnie macierz  $[B]$ .

Należy więc przede wszystkim ustalić kierunki osi lokalnych. Wektor normalny do powierzchni  $\zeta = \text{const}$  można znaleźć jako iloczyn wektorowy dwu dowolnych wektorów stycznych do tej powierzchni.

$$V_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (14-15)$$

Postępując dalej zgodnie z podanym wcześniej sposobem jednoznacznie określenia dwu wektorów prostopadłych, wyznaczamy te wektory, redukujemy je do wartości jednostkowej i konstruujemy macierz wektorów jednostkowych w kierunkach  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  (w rzeczywistości jest to macierz kosinusów kierunkowych)

$$[\theta] = [v_1, v_2, v_3]. \quad (14-16)$$

Pochodne globalnych przemieszczeń  $u$ ,  $v$ ,  $w$  są teraz przetransformowane za pomocą standardowej operacji na pochodne lokalnych przemieszczeń ortogonalnych

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} [\theta] \quad (14-17)$$

Stąd możemy już explicite znaleźć składowe macierzy  $[B]$ . Zważywszy, że w każdym węzle jest pięć stopni swobody, mamy

$$\{\varepsilon'\} = [B'] \begin{Bmatrix} \{\delta_1\}^e \\ \vdots \\ \{\delta_j\}^e \end{Bmatrix}; \quad \{\delta_j\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ z_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (14-18)$$

Elementarna objętość dla współrzędnych krzywoliniowych dana jest za pomocą

$$dx dy dz = \det |J| d\xi d\eta d\zeta. \quad (14-19)$$

To wyrażenie standardowe uzupełnia nasze podstawowe sformułowania.

Całkowanie numeryczne w odpowiednich granicach od  $-1$  do  $+1$  przeprowadzamy dokładnie w taki sam sposób, jak dla elementu trójwymiarowego opisanego w rozdz. 8.

Dokładnie takie samo postępowanie stosować będziemy także dla określenia pozostałych niezbędnych macierzy elementu.

Ponieważ zmienność składowych odkształceń w kierunku grubości elementu  $\zeta$  jest liniowa, wymagane są w tym kierunku tylko dwa punkty *Gaussa*, podczas gdy w kierunkach  $\xi$  i  $\eta$  trzeba użyć trzech lub czterech takich punktów, odpowiednio, dla kwadratowych i sześciennych funkcji kształtu.

## 14.6. Niektóre uwagi o przedstawianiu naprężeń

Zakładamy, że własności elementu są już określone. Budowanie macierzy sztywności układu i rozwiązywanie równań są procesami standardowymi. Pozostaje przedyskutować zagadnienie przedstawiania wyników odnośnie do naprężeń; problem ten ma pewne znaczenie. Mając odkształcenia w układzie lokalnym łatwo jest znaleźć wektor naprężeń  $\{\sigma'\}$ . Jednak ponieważ kierunki osi lokalnych nie są łatwe do uzmysłowienia, wygodnie jest przetransformować składowe tego wektora do układu globalnego, stosując następujące wyrażenia

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = [\theta] \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} [\theta]^T. \quad (14-20)$$

Jeżeli naprężenia obliczamy dla punktów węzłowych, w których styka się kilka elementów, wyznacza się wówczas wartość średnią.

Jednakże, w ogólnym przypadku, nawet naprężenia we współrzędnych globalnych nie dają jasnego obrazu ich rozkładu w powłoce. Jest zatem zawsze celowe wyznaczenie naprężeń głównych za pomocą odpowiedniego przekształcenia.

Badając naprężenia powierzchniowe powłoki zauważymy, że składowe atencja  $\tau_{x'z'}$  i  $\tau_{y'z'}$  są na niej w rzeczywistości równe zeru; można więc je wyzerować jeszcze przed przekształceniem układu naprężeń do współrzędnych globalnych. Wartości tych składowych stycznych otrzymane bezpośrednio przedstawiają średnie wartości w przekroju. Maksymalna wartość ścinania poprzecznego występuje na osi neutralnej i równa jest 1,5-krotnej średniej wartości obliczonej.

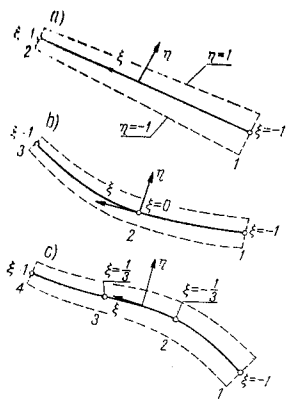
## 14.7. Szczególny przypadek zakrzywionej grubościenniej powłoki osiowo-symetrycznej

Dla powłok osiowo-symetrycznych sformułowanie zagadnienia, oczywiście, upraszcza się [1]. Element powierzchni środkowej jest teraz zdefiniowany tylko poprzez dwie współrzędne  $\xi$  i  $\eta$ , co prowadzi do znacznej oszczędności czasu maszyny.

Elementy otrzymuje się tak samo jak poprzednio, wychodząc jednak z układu dwuwymiarowego (rys. 14.4). Równania (14-1) i (14-2) zastąpione są teraz ich







Rys. 14.6. Elementy powłok: a) liniowy, b) paraboliczny, c) sześcienny

### 14.8. Szczególne przypadki płyt grubych

Transformacje, niezbędne w niniejszym rozdziale, są dość skomplikowane, a programowanie wymagane dla ich opisu dość złożone. Tym niemniej zastosowanie omówionych zasad jest możliwe i dla obliczania grubych płyt dostępne są programy. Czytelnikowi proponuje się sprawdzić stopień opanowania podanych tu wiadomości na poniższym prostym przykładzie, w którym wprowadzono następujące uproszczenia:

1)  $\xi = x$ ; wektory jednostkowe  $v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}$  należy skierować odpowiednio wzdłuż osi  $x, y, z$ ,

2)  $\alpha_i$  oraz  $\beta_i$  potraktować po prostu jako rotacje  $\theta_i$  i  $\theta_x$  (por. rozdz. 10).

3) nie ma już potrzeby transformować składowych naprężeń i odkształceń z układu współrzędnych lokalnego do ogólnego. Można więc stosować definicje dla układu ogólnego przez cały tok obliczenia. Ponadto dla elementów prostej postaci można pominąć całkowanie numeryczne. Jako ćwiczenie zaleca się Czytelnikowi wprowadzić wyrażenia na sztywności itd., np. dla liniowego elementu prostokątnego.

### 14.9. Zbieżność

Podczas gdy w przypadku trójwymiarowym można mówić o absolutnej zbieżności do ścisłego rozwiązania zadania sprężystego, w równoważnym problemie płyt lub powłok zbieżność taka może nie mieć miejsca. Tak zwane zbieżne rozwiązanie zadania, np. zginania płyt, zdąża przy malejących rozmiarach elementu do „ściśłego” rozwiązania ograniczonego założeniami, leżącymi u podstaw sformułowania

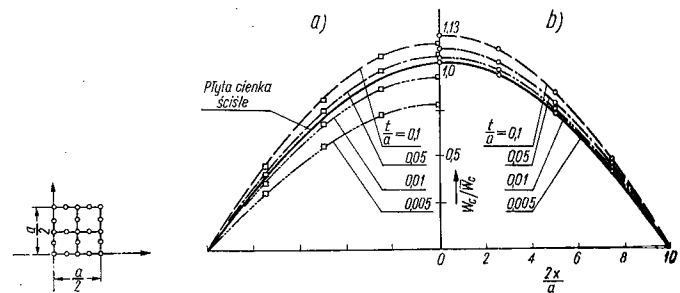
tego zadania. W rozważanym przypadku zatem zbieżność jest możliwa do wyniku „ściśłego” powiązane z założeniem, że pierwotnie proste normalne do powierzchni środkowej pozostały prostymi po odkształceniu.

Należy zauważyć, że w elementach o skończonych rozmiarach, deformacjom czysto-zgięciowym towarzyszą zawsze określone naprężenia ścinające, które — zgodnie z konwencjonalną teorią zginania płyt lub powłok — są nie uwzględniane. Duże zatem elementy, silnie deformowane wskutek zginania (np. w przypadku elementu powłoki zdegenerowanego do elementu płyty) stają się jak gdyby zbyt sztywne. W takich przypadkach należy ograniczyć wymiary elementu „w powierzchni powłoki” w stosunku do jej grubości.

Okazuje się jednak, że te ograniczenia można pominąć przez zastosowanie prostego wybiegu polegającego na redukcji rzędu całkowania [4].

Na rysunku 14.7 pokazano zastosowanie elementów parabolicznych dla przypadku płyty kwadratowej. Podano tutaj wyniki całkowania przy  $3 \times 3$  i  $2 \times 2$  punktach Gaussa oraz dla różnych stosunków grubości płyty do jej rozpiętości. W przypadku dostatecznej grubości płyty wyniki są podobne i wskazują na istnienie dodatkowej deformacji stycznej nie dającej się określić w teorii płyt cienkich. Dla płyt cienkich wyniki uzyskane z bardziej poprawnego całkowania mają tendencję do odchylania się od wyników poprawnych dla płyty cienkiej. Tymczasem dla mniejszej dokładności całkowania (przy wyeliminowaniu fałszywych efektów ścinania) otrzymuje się doskonałą zbieżność wyników.

Ograniczenia, wynikające ze stosowania pokazanych w niniejszym rozdziale elementów, są w praktyce dobrze znane; opracowano też kilka sposobów w celu pokonania tych trudności [5], [6], [7]. Najprostszy wybieg, polegający na redukcji rzędu całkowania, wydaje się dość skuteczny, a ponadto jest dość ogólny.



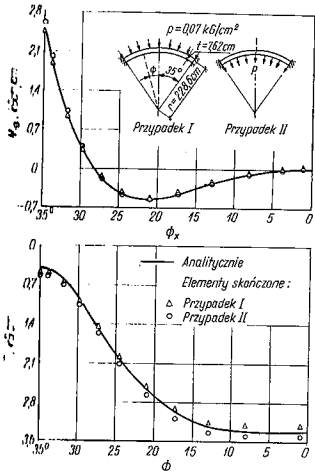
Rys. 14.7. Kwadratowa płyta swobodnie podparta pod równomiernie rozłożonym obciążeniem  $q_0$ ; ugięcie w osi płyty: a) dla elementów jak w pracy [1], b) przy zredukowanym rzędzie całkowania (usunięty efekt poprzeczny); ugięcie w osi płyty wg teorii płyt cienkich oblicza się ze wzoru  $w_c = 0,004062 \frac{q_0 a^4}{D}$ , gdzie  $a$  — bok płyty,  $t$  — grubość płyty,  $D$  — sztywność płyty

Podamy poniżej kilka przykładów pokazujących możliwości stosowania i uzyskiwaną dokładność omówionej teorii powłok grubościennych. Dalsze szczegóły podano w [1], [2], [3].

**Kopuła kulista pod równomiernym ciśnieniem.** Dla tego zadania (rys. 14.8) znane jest rozwiązanie „Aciela” w oparciu o teorię powłok. W celu rozwiązania numerycznego zastosowano podział na 24 elementy typu sześciennego (trzeciego stopnia). Rozmiar elementów zmniejszał się ku podpornom. Rozwiązanie okazało się dokładniejsze, niż „dokładne”, pozwala bowiem na rozróżnienie przypadków przyłożenia ciśnienia na zewnętrznej i na wewnętrznej powierzchni powłoki.

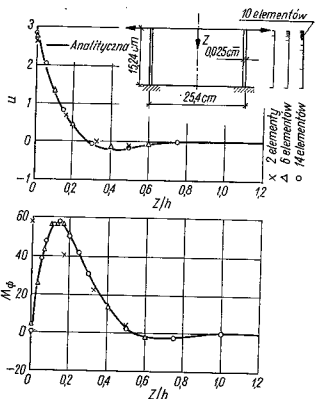
**Walec obciążony na krawędzi** (rys. 14.9). Zastosowano dwa, sześć i czternaście elementów o nierównej długości. Wyniki dla ostatnich dwu podziałów pokrywają się ze „ścistyymi”, ale nawet dwuelementowe rozwiązanie daje wyniki sensowne; odchylenia obserwuje się tylko w pobliżu obciążonych krawędzi.

**Parabolka walcowa.** Na rysunku 14.10 pokazano geometrię, szczegóły fizyczne zagadnienia i podział na elementy, a na rys. 14.11 porównanie wyników całkowania  $3 \times 3$  i  $2 \times 2$  przy zastosowaniu elementów parabolicznych na przykładzie obliczonych przemieszczeń. W przypadku bardziej dokładnego całkowania zbieżność jest raczej powolna, podczas gdy dla zredukowanego rzędu

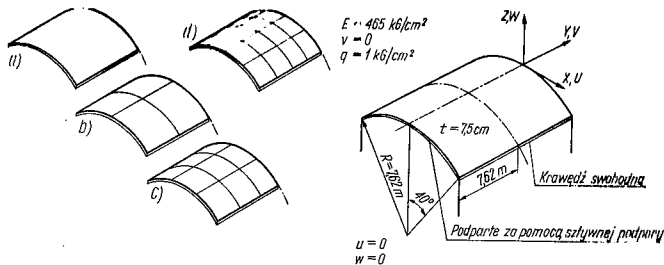


Rys. 14.8. Kopuła sferyczna obliczona przy podziale na 24 elementy typu sześciennego (pierwszy element obejmuje kąt  $0,1^\circ$  licząc od zamocowanego brzegu, dalsze w postępie arytmetycznym)

$M_\phi$  — moment południkowy,  $T$  — siła obwodowa,  $\nu = \frac{1}{6}$ .



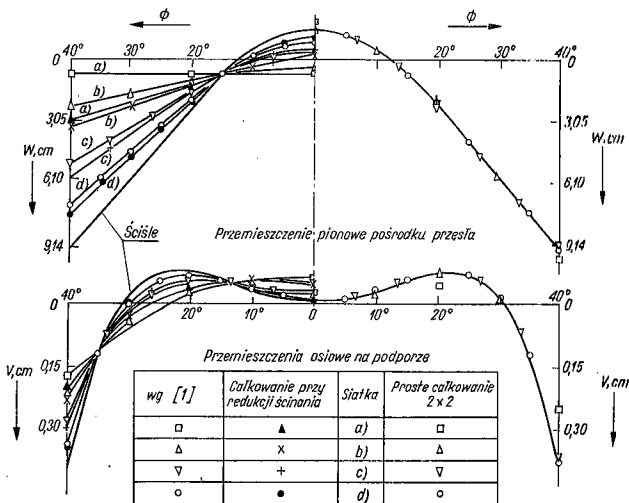
Rys. 14.9. Cienki walec obciążony na krawędzi promieniowo  
 $u$  — przemieszczenie promieniowe w mm,  
 $M_\phi$  — moment południkowy w kGcm/cm,  
 $E = 7 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$



Rys. 14.10. Powłoka walcowa obciążona ciężarem własnym; zastosowane siatki podziału

Przyjęte do obliczeń liczby stopni swobody

siatka	paraboliczne	sześciennie
a	23	37
b	76	124
c	159	261
d	272	448



Przemieszczenia osiowe na podporze

wg [1]	Całkowanie przy redukcji ścinania	Siatka	Proste całkowanie $2 \times 2$
$\square$	$\blacktriangle$	a)	$\square$
$\triangle$	$\times$	b)	$\triangle$
$\nabla$	$+$	c)	$\nabla$
$\circ$	$\bullet$	d)	$\circ$

Rys. 14.11. Powłoka z rys. 14.10. Przemieszczenia (elementy paraboliczne)

całkowania otrzymamo dobre wyniki przy zastosowaniu podziału na jeden element. Jak przewidywano oba całkowania dają wyniki zbliżone. Przykład powyższy najbardziej wskazuje na zalety tego prostego wybiegu i jest opisany bardziej dokładnie w pracach [4] i [8]. Scisłe rozwiązanie omawianego zadania podano u *Scordelis* i *Lo* [9].

Wymagana zbieżność przemieszczeń kojarzy się w tym przypadku ze zbieżnością składowych naprężeń.

*Chłodnia wieżowa.* Chłodnia wieżowa, omawiana już w rozdz. 11 (rys. 11.10), została dodatkowo obliczona przez podział na 15 elementów typu sześciennego. Przy użyciu dziesięciu harmonicznych przedstawiono dokładnie obciążenie wiatrem. Wyniki pokrywają się z wynikami doświadczalnymi, pokazanymi w rozdz. 11. Jak się okazało, zaproponowany obecnie sposób rozwiązania jest znacznie niezbędniejszy niż zastosowany w rozdz. 11.

*Zapora łukowa.* Wszystkie poprzednie przykłady można było raczej traktować jako przykłady powłok cienkościennych, celem ich było pokazanie, że proponowaną metodę można zastosować także i do ich rozwiązania. Przykładem zastosowania metody do analizy konstrukcji grubościennych jest badanie podwójnie zakrzywionej zapory (por. rozdz. 9, rys. 9.8). *Użyto dokładnie takiego samego podziału, jak w rozdz. 9 i wyniki powtarzają prawie dokładnie rozwiązanie trójwymiarowe* [3]. Ten godny uwagi wynik uzyskano przy bardzo znacznym ograniczeniu zarówno liczby stopni swobody, jak i czasu pracy maszyny.

Oczywiście, wachlarz zastosowań elementów tego typu jest bardzo szeroki.

#### Cytowane publikacje

- [1] *S. Ahmad, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz:* Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems. Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Wright-Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
- [2] *S. Ahmad:* Curved finite elements in the analysis of solid, shell and plate structures, Ph. D. thesis, University of Wales, Swansea, 1969.
- [3] *S. Ahmad, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz:* Analysis of thick and thin shell structures by general curved elements.
- [4] *O. C. Zienkiewicz, J. Tao, R. L. Taylor:* Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 1971.
- [5] *S. W. Key, Z. E. Besinger:* The analysis of thin shells with transverse shear strain by the finite element method. Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Air Force Inst. Tech. Wright Patterson Base, Ohio 1968.
- [6] *G. A. Wempner, J. T. Oden, D. A. Kross:* Finite element analysis of thin shells. Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 94, EM6, 1273—94, 1968.
- [7] *J. A. Stricklin, W. E. Haister, P. R. Tidale, R. Ganderston:* A rapidly converging triangular plate element, J.A.I.A.A. 7, 180—1, 1969.
- [8] *Pavley:* Dept. of Structural Mechanics, Ph. D. Thesis, Univ. of California, Berkeley 1970.
- [9] *A. C. Scordelis, K. S. Lo:* Computer analysis of cylindrical shells, J. Am. Concr. Inst., 61, 539—61, 1969.

## 15. Problemy ustalone pola – przewodnictwo ciepłe, potencjał elektryczny, przepływy cieczy itd.

### 15.1. Wstęp

W poprzednich rozdziałach omawiane były szczegółowo problemy kontinuum sprężystego; ogólne zasady postępowania można jednak zastosować do wielu innych problemów fizycznych. Niektóre z tych możliwości omawialiśmy w rozdz. 3. Tutaj poświęcimy więcej miejsca dalszym zastosowaniom metody elementów skończonych.

W szczególności zajmiemy się zagadnieniami opisywanymi przez równanie quasiharmoniczne, którego szczególnymi przypadkami są równania *Laplace'a* i *Poissona* [1] ÷ [6]. Zakres problemów fizycznych ujmowany za pomocą tych równań jest szeroki. Aby wymienić tylko niektóre, często spotykane w praktyce inżynierskiej, wspomniemy:

przewodnictwo ciepła,  
filtracja cieczy przez ośrodki porowate,  
laminarne przepływy cieczy idealnych,  
rozkład potencjału elektrycznego (lub magnetycznego),  
skręcanie prętów pryzmatycznych,  
zginanie belek pryzmatycznych,  
smarowanie łożysk tocznych.

Zasady podane w niniejszym rozdziale stosują się jednakowo do wszystkich tych problemów, toteż rzadka tylko odwoływać się będziemy do konkretnych wielkości fizycznych.

Zauważymy, że będą tu zastosowane takie same funkcje kształtu jak stosowaliśmy poprzednio dla dwu- i trójwymiarowych zagadnień sprężystości. Zasadnicza różnica jest tylko jedna: każdemu punktowi rozważanej przemieszczeni odpowiadają nieznana wielkość skalarna  $\phi$  (nieznana funkcja), gdy poprzednio poszukiwaliśmy szeregu nieznanymi wielkościami, reprezentowanych przez wektor przemieszczeń.

Dyskretyzacja za pomocą elementów skończonych będzie więc tutaj zastosowana

w formie wariacyjnej, jak wskazano w rozdz. 3, poprzez funkcjonal, równoważny postaci różniczkowej, zadanej czyta matematycznie. Funkcjonal ten w szczególnych zastosowaniach może mieć sens fizyczny, związany zwykle z rozpraszaniem energii. Jednakże identyczne sformułowanie można otrzymać stosując reszty ważone wg *Galerkina*. Czytelnik zapoznał się już ze stosowaniem tego procesu w sposób wskazany w rozdz. 3.

W uzupełnieniu prostszych zagadnień opisywanych przez równanie quasiharmoniczne zostaną także omówione pewne problemy lepkiego płynięcia, opisywane przez równania wyższego rzędu [7]. Podane zostanie także odmienne sformułowanie niektórych zagadnień sprężystych [8].

## 15.2. Problem ekstremum

Ogólne quasiharmoniczne równanie opisujące zachowanie się pewnej nieznannej wielkości fizycznej  $\phi$  można przedstawić jak niżej

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0, \quad (15-1)$$

gdzie  $\phi$  jest funkcją, o której zakłada się, że jest jednoznacznie określona wewnątrz rozważanego obszaru;  $k_x, k_y, k_z$  i  $Q$  są znanymi funkcjami od  $x, y, z$ .

Czytelnik obeznany np. ze stacjonarnym przepływem ciepła natychmiast zidentyfikuje funkcje  $k_x, k_y, k_z$  jako anizotropowe współczynniki przewodnictwa cieplnego, funkcję  $Q$  jako prędkość wytwarzania ciepła, a nieznaną funkcję  $\phi$  jako temperaturę (w założeniu, że współrzędne pokrywają się z głównymi osiami materiału). W zastosowaniu do elektryczności pokrywają się z głównymi osiami materiałnie od znaczenia fizycznego problem matematyczny pozostaje ten sam.

Warunki fizyczne dla poszczególnych problemów nakładają określone warunki brzegowe. Dwa najczęściej spotykane wymienimy poniżej:

a) albo wartość  $\phi$  jest zadana na brzegu obszaru

$$\phi = \phi_\beta \quad (15-2)$$

b) albo też zachodzi na brzegu

$$k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q + \alpha \phi = 0, \quad (15-3)$$

gdzie:  $l_x, l_y$  i  $l_z$  są kosinusami kierunkowymi normalnej zewnętrznej do powierzchni ograniczającej obszar.

Jeżeli  $k_x, k_y, k_z$  są sobie równe, a  $q$  oraz  $\alpha$  są równe zeru, powyższe równanie redukuje się do znanego warunku dla nieprzewodzącej powierzchni

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (15-4)$$

W problemach przewodnictwa cieplnego  $q$  przedstawia przepływ ciepła przez jednostkę powierzchni, zaś  $\alpha \phi$  straty konwekcyjne.

Równanie (15-1) wraz z warunkami brzegowymi określa problem w sposób jednoznaczny. Możliwe jest jednak odmienne jego przedstawienie za pośrednictwem rachunku wariacyjnego. Z dobrze znanego twierdzenia *Eulera* [9] wynika, że jeśli całka

$$\chi(\phi) = \iiint_V f(x, y, z, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}) dx dy dz \quad (15-5)$$

ma być zminimalizowana w obszarze ograniczonym  $V$ , to warunkiem koniecznym i dostatecznym dla osiągnięcia minimum jest, aby nieznaną funkcję  $\phi(x, y, z)$  spełniała następujące równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial \phi / \partial x)} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial \phi / \partial y)} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial \phi / \partial z)} \right\} - \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \quad (15-6)$$

wewnątrz tego samego obszaru, w założeniu, że  $\phi$  spełnia te same warunki graniczne w obu przypadkach.

Czytelnik potrafi stwierdzić bezpośrednio, że żądanie rozwiązania równania (15-1) jest równoważne uzyskaniu minimalnej wartości całki rozciągniętej na cały obszar

$$\chi = \iiint_V \left[ \frac{1}{2} \left\{ k_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - Q \phi \right] dx dy dz \quad (15-7)$$

w założeniu, że  $\phi$  spełnia te same warunki brzegowe.

Równocześnie nałożenie warunków brzegowych a) i b) na badaną funkcję bywa jednak niepraktyczne z następującego powodu. Podczas, gdy warunek a) jest łatwy do spełnienia, warunek b) nasuwa czasem trudności nie do pokonania.

Abymy ominąć, lepiej jest nie rozciągać warunków brzegowych na te obszary brzegu, w których zachodzi b), lecz dodać do funkcjonału z równania (15-5) inną całkę, odnoszącą się do powierzchni granicznej, która po minimalizacji automatycznie prowadzi do warunku brzegowego. W ogólnym zapisie równania *Eulera* jest to po prostu całka

$$\int_S \left( q \phi + \frac{1}{2} \alpha \phi^2 \right) dS, \quad (15-8)$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią, na której ważny jest warunek brzegowy b).

Całkę tę należy po prostu dodać do wyrażenia  $\chi$  w równaniu (15-5) lub (15-7); przy minimalizacji znajdziemy, że warunek brzegowy b) zostaje spełniony automatycznie. Czytelnik interesujący się szczegółami wyprowadzenia tej zupełnie ogólnej postaci równania *Eulera* znajdzie to w Dodatku 6.

### 15.3. Dykretyzacja za pomocą elementów skończonych

**15.3.1. Ogólny przypadek trójwymiarowy.** Jeżeli nieznaną funkcją  $\phi$  jest określona, element po elemencie, w postaci

$$\phi = [N_i, N_j, \dots] \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \vdots \end{pmatrix} = [N] \{\phi\}^e, \quad (15-9)$$

gdzie  $\phi_i$  itd. są parametrami w węzłach, to można dokonać przybliżonej minimalizacji funkcjonatu.

Postępując ogólnie, obliczamy udział każdego elementu za pomocą wzorów (15-7) do (15-9). Dla każdego węzła można napisać, różniczkując (15-7) i (15-8)

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \phi_i} = \int_{V^e} \left\{ k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - Q \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} \right\} dx dy dz + \int_{S^e} \left( q \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} \right) dS, \quad (15-10)$$

przy czym drugą całkę stosuje się tylko wtedy, gdy element ma powierzchnię zewnętrzną, na której panuje warunek brzegowy typu b). Pamiętając, że

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_j}{\partial x}, \dots \right] \{\phi\}^e \text{ itd.},$$

a poza tym, że

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} = N_i \text{ itd.},$$

otrzymujemy bezpośrednio dla całego elementu (por. rozdz. 3)

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} = [k]^e \{\phi\}^e + \{F\}^e, \quad (15-11)$$

gdzie „macierz sztywności”  $[k]^e$  określa się poprzez

$$k_{ij}^e = \int_{V^e} \left\{ k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dx dy dz \quad (15-12)$$

oraz

$$F_i^e = - \int_{V^e} Q N_i dV + \int_{S^e} q N_i dS + \left( \int_{S^e} [N] \alpha N_i dS \right) \{\phi\}^e. \quad (15-13)$$

Zbieranie całkowitego układu równań minimalizujących odbywa się wg zwykłych reguł. Dla całego obszaru mamy zatem

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\phi\}} = [H] \{\phi\} + \{F\} = 0, \quad (15-14)$$

gdzie

$$H_{ij} = \sum k_{ij}, \\ F_i = \sum F_i^e,$$

sumowania zaś dokonuje się po wszystkich elementach, w zwykły sposób.

Gdy badamy jedną tylko zmienną, w powyższym występują tylko wielkości skalarne. Można tu zastosować analogię do sprężystej konstrukcji i wtedy odpowiednio współczynniki będą odpowiednikami sztywności lub siły.

Badając składowe wyrażenia na „siły” w elementach [równanie (15-13)], można zauważyć podobieństwo pierwszej z nich do sił masowych w problemach sprężystości. Druga składowa tej „siły” występuje tylko w razie istnienia w elemencie fragmentu brzegu badanego obszaru, a więc przedstawia „wypływ (odpływ)”  $q$ . Odpowiada to w zadaniu sprężystym siłom wywołanym na brzegu przez obciążenie. Istotnie, w przypadku nieprzepuszczalnego (nieprzewodzącego) brzegu [równanie (15-4)] odpowiada to dokładnie warunkowi nieobciążonego i nieodkształcanego brzegu w zadaniu sprężystym.

Ostatni jednak wyraz w równaniu (15-13) reprezentuje nową okoliczność.

Tutaj „siła brzegowa” jest proporcjonalna do „przemieszczenia brzegu”, a zatem do  $\{\phi\}^e$ . Zachowuje się ona zatem w taki sam sposób, jak zewnętrzna „sztywność” przyłożona do elementu

$$[\bar{k}]^e = \int_{S^e} [N]^T \alpha [N] dS \quad (15-15)$$

i wpływa jedynie na całkę brzegową.

Warunki brzegowe powodujące taką „dodatkovą sztywność” występują wtedy, gdy zachodzą straty radiacyjne (wypromieniowanie) lub konwekcyjne. Dotyczy to szczególnie problemów przewodności ciepła.

Wskutek zupełnej analogii omawianych zagadnień do zagadnień mechaniki budowli, można przy ich rozwiązywaniu dokonywać standardowych operacji. Istotnie, w końcowym etapie rachunku możemy określić nie tylko wartości  $\phi$  (odpowiadające przemieszczeniom), ale i wartości jej pochodnych (odpowiadające naprężeniom). Gdy więc zapiszemy

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = [S]^e \{\phi\}^e, \quad (15-16)$$

otrzymujemy pełną analogię do macierzy odkształceń (2-17) oznaczonej tam jako *macierz nachyleń*.

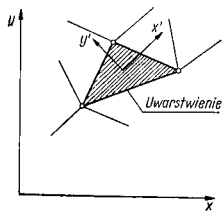
$$\{S_i\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (15-17)$$

Obliczenie takich gradientów bywa nieraz bardzo ważne z fizycznego punktu widzenia, reprezentują one bowiem prędkości przepływów w odpowiednich okolicznościach.

**15.3.2. Warunki zbieżności.** Ponieważ funkcjonal  $\phi$  określa się poprzez jego pierwsze pochodne, ciągłość  $\phi$  jest niezbędna tylko do celu wyboru odpowiednich funkcji kształtu. Muszą one być takie, aby można było uzyskać stałe wartości każdej pierwszej pochodnej wewnątrz elementu przy odpowiednich wartościach węzłowych  $\{\phi\}^e$ . Tak więc, w problemach praktycznych każda z omawianych w rozdz. 7 rodzin funkcji kształtu może być przyjęta dla odpowiedniego typu elementu. Wszelkie uwagi dotyczące elementów zniekształconych z rozdz. 7 znajdują zastosowanie i tutaj.

**15.3.3. Niejednorodność i anizotropia.** Warto zauważyć, że w minimalizowanym funkcjale nie występują pochodne współczynników przewodności  $k_x, k_y, k_z$ . Pełne zatem sformułowanie zagadnienia jest jednakowo ważne dla stałych i dla zmiennych wartości tych współczynników. Przewodności mogą zmieniać się nagle od elementu do elementu albo też wewnątrz elementu, w założeniu, że wpływ tych zmienności jest brany pod uwagę w całkach określających macierze elementu.

W przypadku materiału anizotropowego, równanie (15-1) jest ważne tylko wtedy, gdy osie  $x, y, z$  pokrywają się z głównymi osiami anizotropii. W materiale uwarstwowionym (por. rys. 15.1) warunek ten może nie być spełniony. W takich przypadkach konieczne jest sformułowanie własności elementu w lokalnych współrzędnych  $x', y', z'$ . Najlepiej uczynić to za pomocą odpowiedniego programu na maszynie cyfrowej.



Rys. 15.1. Materiał anizotropowy. Współrzędne lokalne pokrywają się z głównymi kierunkami uwarstwienia

Należy jednak wkładć do istotną różnicę między zagadnieniem zagadnienia budowlu i pozostałymi. Jeżeli macierze elementu, takie jak np.  $[h]^e$  wg (15-12), określają związki między wielkościami skalarnymi, które nie zależą od kierunków osi, to dla każdego elementu można użyć — jeśli potrzeba — innego układu lokalnego bez konieczności transformacji macierzy i bez różnicy w technice zbierania ich we wspólną macierz układu.

**15.3.4. Zagadnienie dwuwymiarowe.** Ogólne równanie zagadnienia (15-1) w przypadku dwuwymiarowym ma po prostu postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (15-18)$$

wynikającą z założenia, że  $\phi$  nie zależy od  $z$ . Funkcjonał podlegający minimalizacji jest teraz

$$\chi = \iint \left[ \frac{1}{2} \left\{ k_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - Q\phi \right] dx dy \quad (15-19)$$

Wszystkie stosowane dotąd macierze elementu można łatwo znaleźć. Na przykład z równania (15-12) składowe macierzy  $[h]$  są równe

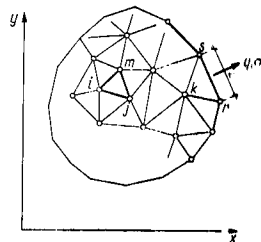
$$h_{ij}^e = \int_{v^e} \left( k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (15-20)$$

Dalsze omawianie nie wydaje się tutaj celowe. Jednak byłoby źle nie wspomnieć o najprostszym i najbardziej użytecznym elemencie trójkątnym (rys. 15.2); tutaj podobnie jak w równaniu (4-8)

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta,$$

macierz „sztywności” więc jest równa

$$[h]^e = \frac{k_x}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_m \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_m \\ \text{sym.} & & b_m b_m \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_m \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_m \\ \text{sym.} & & c_m c_m \end{bmatrix} \quad (15-21)$$



Rys. 15.2. Podział dwuwymiarowego obszaru na elementy trójkątne

„obciążenia” otrzymuje się w podobny sposób i np., dla  $Q$  Czytnik może łatwo stwierdzić, że

$$\{F\}^e = -\frac{QA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (15-22)$$

Równanie (15-18) można zapisać we współrzędnych walcowych i zastosować do rozwiązania zagadnień osiowo-symetrycznych. Wspomniane równanie różniczkowe jest teraz

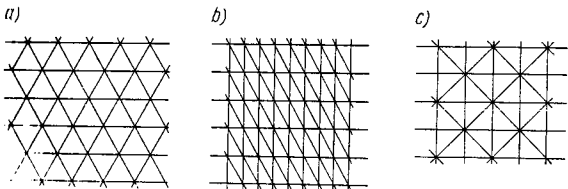
$$\frac{\partial}{\partial r} \left( k_r r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0. \quad (15-23)$$

Zasada wariacyjna może być także zastosowana tutaj, łatwiej jednak podstawić wartości  $k_r r$  i  $k_z r$  jako „zmodyfikowane” przewodności i zastosować bezpośrednio poprzednie wyrażenie. Całkowanie lepiej teraz wykonywać numerycznie, podobnie jak w odpowiednich zadaniach w rozdz. 5.

#### 15.4. Przykłady, oszacowanie dokładności

Łatwo wykazać, że przy zbieraniu obliczonych explicite „sztywności” elementów trójkątnych dla siatek regularnych, pokazanych na rys. 15.3, uzyskane równania są identyczne z tymi, jakie można otrzymać stosując metodę różnic skończonych [10].

Oczywiście wyniki otrzymane z obydwu metod muszą być identyczne i taki sam będzie rząd przybliżenia<sup>1)</sup>.



Rys. 15.3. Regularne (a)(b) i nieregularne (c) siatki podziału

Jeśli założono siatkę nieregularną, opartą na kwadratowej siatce węzłów (rys. 15.3c), różnice z zastosowaniem obu wspomnianych metod będą widoczne. Ograniczają się one do wektora „obciążenia”  $\{F\}^e$ . Zebrane równania zawierają będą „obciążenia” różniące się nieznacznie od węzła do węzła. Mimo ich jednak będzie taka sama jak podana w wyrażeniach różnic skończonych. Tym samym rozwiązania różnić się będą tylko lokalnie i będą reprezentować te same wartości średnie.

Na rysunku 15.4 pokazano porównanie wyników uzyskanych z „nieregularnej” siatki (rys. 15.4b) z rozwiązaniem relaksacyjnym za pomocą różnic skończonych i z wynikami przy siatce regularnej (rys. 15.4a) Wyniki dają dokładności tego samego rzędu, jak omówiono powyżej.

<sup>1)</sup> W przypadku, gdy wartości na brzegach są zadane.

W tym miejscu Cytelnik może przewidzieć pytanie, po co przedstawiamy metodę, którą stosujemy powtarzając efekty dobrze znanych i wypróbowanych metod. Otóż nowe metody mają pewne istotne zalety. Są nimi:

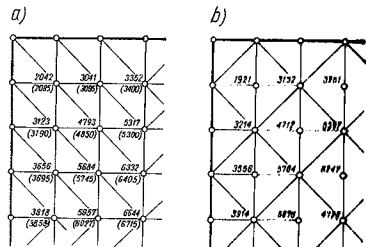
a) prostota operowania przy niejednorodnych i anizotropowych zagadnieniach (szczególnie zaś, gdy kierunki anizotropii są zmienne),

b) elementy mogą mieć różne powierzchnie i kształty, co zezwala na możliwie ściśle opisywanie dowolnych warunków brzegowych i pozwala na dokładne zbadanie obszarów o skomplikowanych kształtach,

c) określone warunki brzegowe typu gradientu lub wypromieniowywania wprowadzane są w sposób naturalny i z lepszą dokładnością niż w metodzie różnic skończonych,

d) dla zwiększenia dokładności można bez trudu wprowadzić elementy wyższych rzędów, nie komplikując warunków brzegowych. Trudność ta zawsze występuje w metodzie różnic skończonych przy stosowaniu różnic wyższych rzędów,

e) wreszcie, co ma znaczenie w dobie maszyn cyfrowych — do obliczania macierzy i rozwiązywania różnorodnych zagadnień mogą być użyte standardowe programy (konstrukcyjno-budowlane).



Rys. 15.4. Skracanie pręta prostokątnego; liczby w nawiasach podają wyniki bardziej dokładnego obliczenia wg Southwella przy stosowaniu podziału  $12 \times 16$  (podane wartości  $\phi/G\theta^2$ ); opis w tekście

Poniżej podajemy dwa bardziej skomplikowane przykłady, aby zilustrować dokładność uzyskiwaną w praktyce. Pierwszy — to problem czegostego skracania niejednorodnego przewodu, pokazanego na rys. 15.5. Równanie różniczkowe zagadnienia ma postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + 2\theta = 0, \quad (15-24)$$

gdzie  $\phi$  jest funkcją naprężeń,  $G$  — modulem sprężystości poprzecznej i  $\theta$  — kątem skrócenia na jednostkę długości przewodu.

W rozwiązaniu za pomocą elementów skończonych wyrażenie w środku jest zapełnione materiałem, dla którego  $G$  ma rząd wielkości  $10^{-3}$  w stosunku do pozostałych materiałów<sup>2)</sup>. Wynikaty dokładnie pokrywają się z wynikami rozwiązania otrzymanymi metodą różnic skończonych [11].

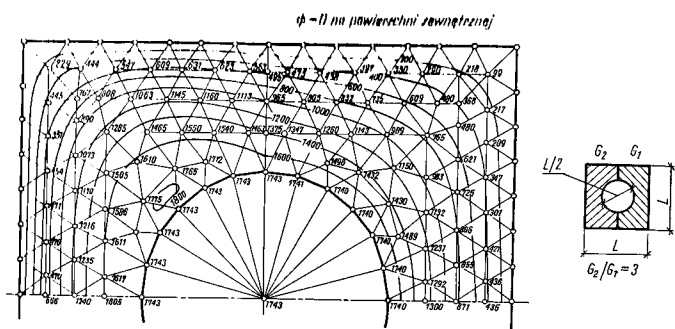
Przykład rozwiązania problemu przepływu poprzez podłoże porowate i anizotropowe pod fundamentem pokazano na rys. 15.6.

Tutaj równanie zagadnienia ma postać:

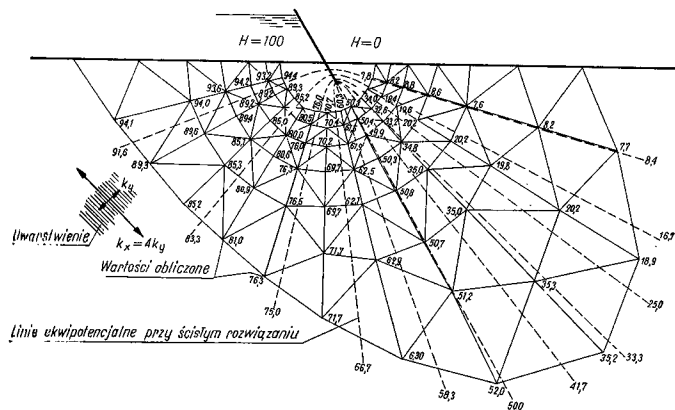
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0, \quad (15-25)$$

gdzie  $k_x$  i  $k_y$  są współczynnikami przepuszczalności w kierunkach (pochylnych) osi uwarunkowania. Wyniki były tutaj porównane z wynikami rozwiązania ścisłego. Możliwość użycia różnych wyników elementów wykazują swe zalety właśnie w tym przykładzie.

<sup>2)</sup> Zrobiono to, aby uniknąć trudności z wielopojnością obszaru i umożliwić zastosowanie programów standardowych.



Rys. 15.5. Skręcanie wydłużonego przewodu bimetalicznego. Wartości  $\phi/GL^2 \times 10^4$  z rozwiązania metodą elementów skończonych

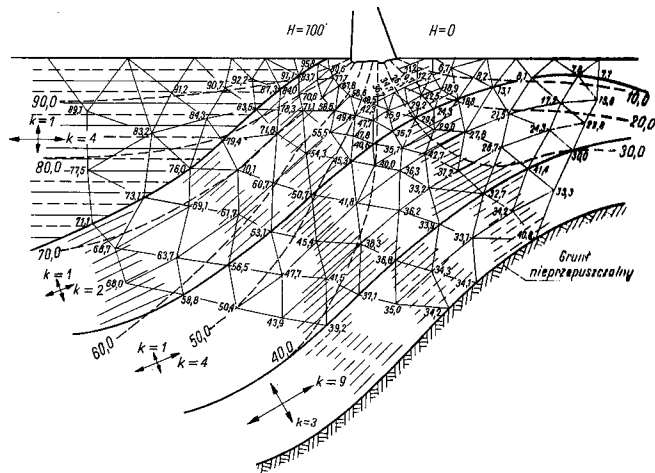


Rys. 15.6. Filtracja pod nachyloną ścianką szczelną w podłożu uwarstwowionym; drobny podział na elementy u stopy ścianki nie został pokazany; porównanie z rozwiązaniem dokładnym pokazano w postaci linii ekwipotencjalnych

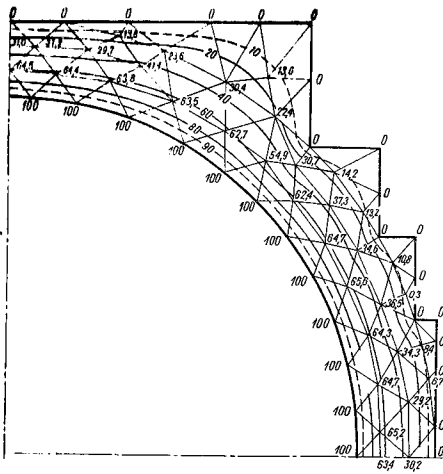
## 15.5. Niektóre problemy praktyczne

**Filtracja anizotropowa.** Pierwszym z zagadnień jest przepływ przez wycoce niejednorodne, anizotropowe i sfaldowane warstwy. Równaniem problemu jest równanie (10-30). Jednak, specjalne cechy zadania wymagały wprowadzenia do programów maszyny uzupełnień pozwalających uwzględnić zmiany głównych kierunków  $x'$  i  $y'$  od elementu do elementu.

Nie było to trudne do wykonania i zadanie wraz z jego rozwiązaniem [3] pokazano na rys. 15.7.







Rys. 15.8. Rozkład temperatury przy stacjonarnym przepływie ciepła w osiowo-symetrycznym zbiorniku ciśnieniowym

**Cisnienie hydrodynamiczne na ruchomych powierzchniach.** Jeśli powierzchnia zatopiona porusza się w cieczy z zadaniem przyspieszeniem i małą amplitudą ruchu, wówczas można pokazać [12], że dodatkowe ciśnienie wywołane tym ruchem spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2 p = 0.$$

Na ruchomych (lub stacjonarnych) brzegach warunki brzegowe opisane są z równania (15-3) i mają postać

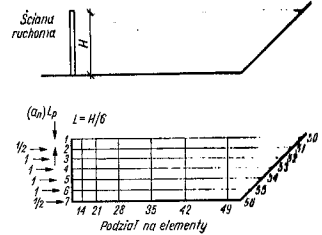
$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n, \quad (15-27)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością cieczy,  $a_n$  zaś — normalną składową przyspieszenia na brzegu.

Warunek brzegowy na powierzchni swobodnej jest po prostu

$$p = 0. \quad (15-28)$$

Jako przykład rozpatrzmy przypadek pionowej ściany w zbiorniku (rys. 15.9) i wyznaczmy rozkład ciśnień w punktach wzdłuż powierzchni ściany i na dnie zbiornika dla pewnego zadanego ruchu punktów brzegu 1 do 7.



Rys. 15.9. Zadanie o ścianie zbiornika poruszającej się poziomo

Podział badanego obszaru na elementy (w liczbie 42) pokazano na rysunku. Zastosowano tutaj elementy prostokątne. Uzyskane wyniki można przystosować do dowolnego układu przyspieszeń; rozwiązano zatem siedem oddzielnych zadań. W każdym po kolei, kawałek brzegu przyległy do rozważanego punktu, jest podany jednostkowemu przyspieszeniu, sprowadzającemu się do obciążenia  $\rho \frac{L}{2}$ ,  $\rho L$ , ...  $\rho L$ ,  $\rho \frac{L}{2}$  przyłożonemu po kolei w punktach 1 do 7. Dla dowolnego rozkładu przyspieszeń, ciśnienia wywołane w punktach 1 do 56 można zebrać w macierz, zależną od przyspieszeń punktów 1 do 7. Otrzymuje się

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_7 \\ p_{14} \\ p_{21} \\ p_{28} \\ p_{35} \\ p_{42} \\ p_{49} \\ p_{56} \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{pmatrix} \quad (15-29)$$

Macierz  $M$  podana jest w tabl. 15.1.

Dla przykładu, jeżeli przyspieszenie jest jednakowe, ciśnienia można obliczyć przyjmując

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{pmatrix} = \bar{a} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15-30)$$

Wynik — rozkład ciśnień na ścianę i na podłoże zbiornika — jest pokazany na rys. 15.10. Rezultaty dla ciśnień na ścianę zgadzają się z dokładnością do 1% ze zmiennym rozwiązaniem wykonanym przez Westergaarda.

$$[M] = \rho \frac{H}{6}$$

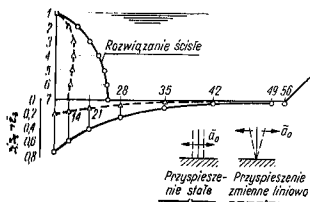
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0,7249	0,3685	0,2466	0,1963	0,1743	0,0840
3	0	0,3685	0,9715	0,5648	0,4210	0,3644	0,1744
4	0	0,2466	0,5648	1,1459	0,7329	0,5954	0,2804
5	0	0,1963	0,4210	0,7329	1,3203	0,9292	0,4210
6	0	0,1744	0,3644	0,5954	0,9292	1,5669	0,6489
7	0	0,1680	0,3488	0,5607	0,8420	1,2977	1,1459
14	0	0,1617	0,3332	0,5260	0,7548	1,0285	0,6429
21	0	0,1365	0,2754	0,4171	0,5573	0,6793	0,3710
28	0	0,0879	0,1731	0,2519	0,3187	0,3657	0,1918
35	0	0,0431	0,0838	0,1195	0,1478	0,1661	0,0863
42	0	0,0186	0,0359	0,0150	0,0626	0,0699	0,0362
49	0	0,0078	0,0150	0,0213	0,0261	0,0291	0,0151
56	0	0,0069	0,0134	0,0190	0,0232	0,0259	0,0134

$$(L = H/6)$$

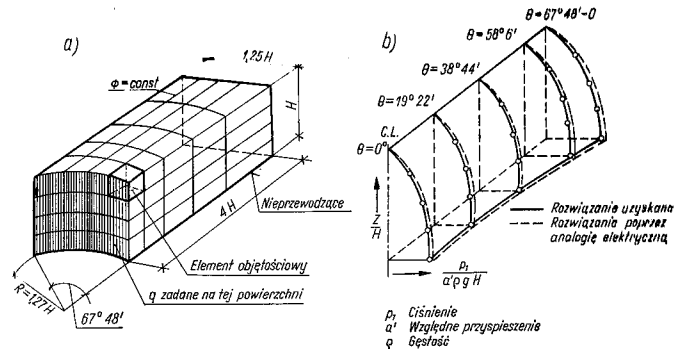
Podobnie można wyznaczyć ciśnienia dla każdego innego ruchu ściany. Jeśli np. ściana jest zamocowana przegubowo u podstawy i może wahać się wokół punktu zamocowania z przyspieszeniem  $\bar{a}$  w punkcie 1, wtedy

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{Bmatrix} = \bar{a} \begin{Bmatrix} 1 \\ 5/6 \\ 4/6 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15-31)$$

Rozkład ciśnień otrzymany z tego założenia pokazany jest także na rys. 15.10.



Rys. 15.10. Rozkład ciśnień na poruszającą się ścianę zbiornika i jego dno



Rys. 15.11. Ciśnienia na poruszającą się z przyspieszeniem ścianę zapory w przypadku cieczy nieściśnialwej (a, b)

Znaczenie wprowadzenia takiej „macierzy wpływowej” najlepiej uwidacznia się w zagadnieniach drgań. Jeżeli ściana drga, wówczas — ogólnie biorąc — przyspieszenie jej nie jest znane. Z równania (15-29) można napisać dla ciśnień w punktach 1 do 7, przyjmując górną część macierzy  $[M]$  w postaci, powiedzmy,  $[M_0]$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_7 \end{Bmatrix} = [M_0] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{Bmatrix} = [M_0] \{\delta\}. \quad (15-32)$$

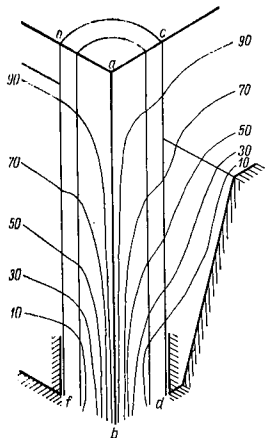
Ciśnienie wypadkowe zatem (jako siły w węzłach) będzie

$$\{R_p\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_7 \end{Bmatrix} = [A][M_0] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{Bmatrix} = -[M_p]\{\delta\}, \quad (15-33)$$

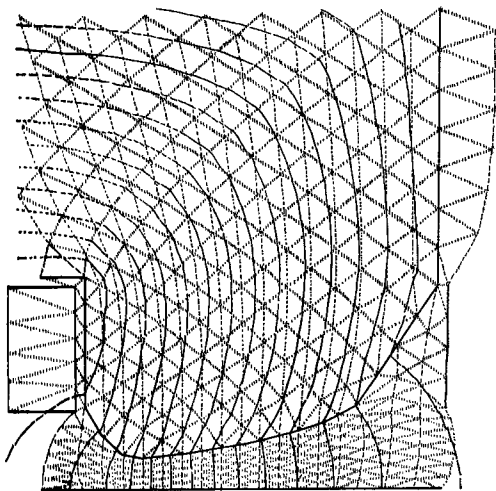
gdzie  $[A]$  jest to odpowiednia macierz przekazywania się obciążeń,  $\{\delta\}$  zaś przedstawia przyspieszenia węzłowych punktów ściany. Można to powiązać z dynamicznym równaniem ściany. Problem ten omawiany będzie szczegółowo w rozdz. 16.

Na rysunku 15.11 pokazano rozwiązanie zagadnienia trójwymiarowego [4]. Zastosowano tutaj proste czworosieczne elementy i osiągnięto bardzo dobrą dokładność.

Zadanie elektrostatyczne. Na rysunku 15.12 pokazano trójwymiarowe rozwiązanie prostego równania Laplace'a [4]. Pokazano tutaj pole elektrostatyczne w otoczeniu izolatora. Na rys. 15.13 pokazano bardziej złożony rozkład pola magnetycznego w dwu wymiarach [6].



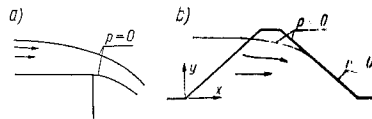
Rys. 15.12. Trójwymiarowy rozkład potencjału elektrostatycznego wokół porcelanowego izolatora w uzziemionym przewodzie



Rys. 15.13. Pole wokół magnesu (wg Winsłowa [6])

Laminarny i swobodny przepływ powierzchniowy [13] : [19]. Podstawowe równanie Laplace'a opisujące płynięcie lepkiej cieczy przy filtracji nadaje się również do opisu laminarnego ruchu poza obrębem warstwy przyściennej, wywołanej efektami lepkości. Podane niżej przykłady pozwalają zilustrować przydatność naszej metody w tych przypadkach. Dalsze przykłady cytuje Martin [13]. Szczególnym przypadkiem płynięcia cieczy, zasługującym na uwagę, jest przypadek, gdy ciecz ograniczona jest powierzchnią swobodną, a powierzchnia ta nie jest a priori znana.

Rys. 15.14. Typowe zagadnienie powierzchni swobodnej cieczy płynącej, spełniające także dodatkowy warunek ciśnienia na powierzchniach  $p = 0$ : a) przepływ ponad jazem, b) filtracja przez zaporę ziemną



Ten przypadek charakteryzują dwa przykłady: przelewu swobodnego (rys. 15.14a) i filtracji poprzez zaporę ziemną (rys. 15.14b). W obydwu przypadkach powierzchnia swobodna jest linią prądu i w obu jej kształt nie jest znany a priori, lecz powinien być wyznaczony tak, żeby spełnić *dotychczasowe warunki* na tej powierzchni. Na przykład w drugim zadaniu sformułowanym jako funkcja potencjału  $H$  problem opisuje równanie (15-25).

Powierzchnia swobodna, będąc linią prądu, narzuca warunek

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0, \quad (15-34)$$

który musi być na niej spełniony.

Dodatkowo jednak ciśnienie na powierzchni musi być równe zero, gdyż jest to powierzchnia styku z atmosferą. Ponieważ

$$H = \frac{p}{\gamma} + y, \quad (15-35)$$

gdzie  $\gamma$  jest gęstością cieczy,  $p$  — ciśnieniem w cieczy i  $y$  — wzniesieniem ponad pewien poziom odniesienia, przeto na powierzchni musimy mieć

$$H = y. \quad (15-36)$$

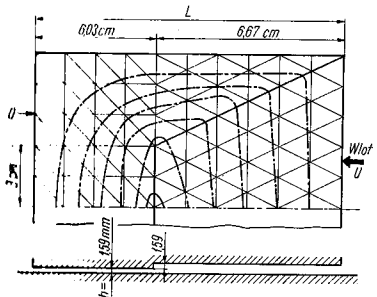
Rozwiązanie może być dokonane iteracyjnie. Rozpoczynając od założonej linii prądu na powierzchni swobodnej rozwiązuje się zadanie zwykłą drogą. Należy uważać, czy równanie (15-36) jest spełnione, a jeżeli nie — należy poprawić powierzchnię swobodną, aby uzyskać znów  $y = H$ . Kilka iteracji tego rodzaju wskazuje, że zbieżność jest dostatecznie szybka. To postępowanie proponują Brown i Taylor [19]. W rozdz. 16 opisany będzie sposób odmienny.

Różnorodność zagadnień należących do odpywającej klasy jest tak duża, że nie byłoby sensu wspominać o wszystkich.

**Zagadnienia smarowania.** Tutaj znów spotykać my się ze standardowym równaniem *Poissona* w dwuwymiarowym obszarze opisującym łożysko oporowe. W najprostszym przypadku smaru o stałej gęstości i lepkości do rozwiązania mamy równanie *Reynoldsa* [20]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu V \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (15-37)$$

gdzie  $h$  jest grubością warstewki smaru,  $p$  ciśnieniem wywołanym w łożysku,  $\mu$  lepkością oraz  $V$  prędkością łożyska w kierunku  $x$ .



Rys. 15.15. Schodkowe łożysko oporowe. Rozkład ciśnień. Warstewki warstości  $\frac{\rho h^2}{6\mu UL}$

Na rysunku 15.15 pokazano rozkład ciśnień w przypadku schodkowego łożyska oporowego. Warunki brzegowe polegają na braku ciśnienia; należy zauważyć, że schodek powoduje jak gdyby „liniowe obciążenie” po scałkowaniu prawej strony równania (15-37) [21].

Bardziej ogólne przypadki zagadnień smarowania, włączając pionowe ruchy łożyska (warstewki smaru ulegają ściskaniu) i ściśliwość samego smaru można badać oczywiście w podobny sposób. Ostatnio na ten temat ukazało się kilka prac [22], [23], [24].

### 15.6. Problemy opisywane równaniem biharmonicznym; płynięcie lepkie

W dotychczasowych rozważaniach nad zagadnieniem quasi-harmonicznym funkcjonal, który ma być zminimalizowany, traktowany był jako czysto matematyczne wyrażenie. Nie usiłowaliśmy precyzować jego sensu fizycznego z uwagi na różnorodność opisywanych przezeń zagadnień. W szczególnym przypadku lepkiego płynięcia przez ośrodki porowate jego znaczenie fizyczne można łatwo uwidocznić, ponieważ przedstawia on *prędkość rozpraszania energii*. Istotnie rozkład prędkości

uzyskany w wyniku rozwiązania jest taki, że minimalizuje to rozpraszanie — jakby to można dobrze wyrazić wskutek zwykłego „lenistwa natury”. Taka interpretacja przepływu filtracyjnego dana była przez *Zienkiewicza* i in. [3]. Jednak zasada minimum rozpraszania energii znana jest w mechanice cieczy od końca ubiegłego stulecia, byłoby zatem interesujące prześledzić jej stosowność do przepływów lepkich w ogóle.

W rozdz. 3, jako przykład zastosowania ważonych procesów resztkowych (residualnych), rozpatrywaliśmy równanie *Naviera-Stokesa* z pominięciem członu bezwładnościowego; jest to sytuacja zachodząca przy powolnym (pełzającym) płynięciu cieczy.

Równanie (3-4) opisuje dwuwymiarowe płynięcie. Jednak równanie to można bezpośrednio wyprowadzić z *Eulerowskiego* procesu minimalizacji funkcjonału, przedstawiającego prędkość rozpraszania energii. Jeżeli składowe prędkości w kierunkach  $x$  i  $y$  są odpowiednio  $u$  i  $v$  i jeżeli są one wyrażone w funkcji prądu  $\theta$  jako

$$u = -\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (15-38)$$

to łatwo pokazać, że dla przypadku stałej lepkości  $\mu$  funkcjonal ma postać [7]

$$\chi = \mu \int_V \left\{ 4 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right\} dV. \quad (15-39)$$

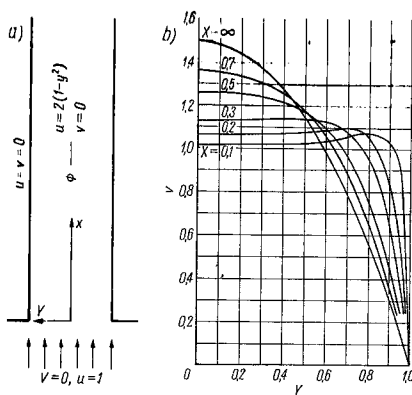
Taki funkcjonal można zminimalizować dokładnie w ten sam sposób, jak to przedstawiliśmy w niniejszym i poprzednich rozdziałach, po wyrażeniu wartości  $\theta$  jako parametrów w węzłach. Można następnie znów zastosować standardowe postępowanie znajdując związki „sztywności”, gdyż funkcjonal jest „kwadrato-owy”.

Ponieważ w definicji funkcjonału występują drugie pochodne, ciągłość  $\theta$  i jej normalnej pochodnej między elementami należy założyć z góry. Parametry węzłowe są teraz równe

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_i \\ \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_i \end{Bmatrix} \quad (15-40)$$

i można zastosować takie same funkcje kształtu jak w przypadku zginania płyt (rozdz. 10).

*Atkinson* i in. [7] użyli takiego sformułowania do zbadania rozkładu prędkości w obszarze wlotu przy płynięciu między dwiema równoległymi płytami. Warunki brzegowe i prosty obszar prostokątny badany przez nich, pokazane są na rys. 15.16a i 15.16b. Na tym ostatnim pokazano profile prędkości uzyskane z obliczeń, które znakomicie zgadzają się z doświadczeniem. Oczywiście, inne postacie warunków brzegowych łatwo rozwiązać za pomocą tego samego programu.



Rys. 15.16. Rozkład prędkości przy lepkiem przepływie laminarnym między płytami równoległymi: a) geometria obszaru, b) profile prędkości w różnych odległościach poziomych

Warto zauważyć, że w rozwiązaniu tego zadania użyto prostych, niedostosowanych elementów trójkątnych z rozdz. 10, z pominięciem pełnej ciągłości pochodnych.

Ci sami autorzy podali postać funkcjonału nadającego się do badania przypadków osiowo-symetrycznych i, w związku z tym, do badania przepływów w przewodach cylindrycznych. Atkinson i in. [25] rozwinęli to zagadnienie dalej.

## 15.7. Analogie

Warto zauważyć, że można w ogóle pominąć pełne sformułowanie problemu lepkiego płynięcia i zastosować do jego rozwiązania bezpośrednio każdy program zginania płyt pamiętając, że równanie różniczkowe opisujące funkcję prądu [równanie (3-4)] jest identyczne z równaniem opisującym ugięcie płyty (rozd. 10 praca [1]).

Analogie takie mają szczególnie duże znaczenie w inżynierii i często pozwalają na pożyteczne rozszerzenie rozwiązań przy minimum zużycia czasu.

Innym przykładem takiej analogii jest przypadek prostego, płaskiego zadania sprężystego. Ponieważ tutaj stosuje się ogólnie znaną funkcję *Airy'ego* [26], definiującą naprężenia jako

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad (15-41)$$

widzimy znów, że spełnione jest równanie biharmoniczne lepkiego płynięcia lub zginania płyty. Zatem program dla zginania płyty może być bezpośrednio użyty do rozwiązywania także płaskiego zadania sprężystego.

Jesli sformulujemy odpowiedni sposób sformułowania, a twierdzenia, że uzyskane rozwiązanie automatycznie spełnia warunki równowagi i daje *górną granicę* energii odkształcenia, podczas gdy *dolną granicę* otrzymuje się w wyniku zwykłego sformułowania problemu w przemieszczeniach.

Odwracając proces, bezpośrednio sformułowanie w przemieszczeniach zagadnienia płaskiego stanu sprężystego może być użyte do otrzymania górnej granicy rozwiązań zginania płyt. Możliwość ta była wskazana przez *Veubeke'go* i *Zienkiewicza* [8] i została przez nich dokładnie omówiona.

## 15.8. Uwagi końcowe

W rozdziale niniejszym poruszyliśmy szerokie możliwości, jakie w naukach inżynierskich i fizycznych daje ogólne sformułowanie metody elementów skończonych. Niewątpliwie znacznie więcej zastosowań zostanie jeszcze opracowanych w przyszłości.

### Cytowane publikacje

- [1] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: Finite elements in the solution of field problems, *The Engineer*, s. 507-10, wrzesień 1965.
- [2] W. Visser: A finite element method for the determination of non-stationary temperature distribution and thermal deformations, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Ohio, 1965.
- [3] O. C. Zienkiewicz, P. Meyer, Y. K. Cheung: Solution of Anisotropic seepage problems by finite elements, *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.*, EMI, s. 111-20, 1966.
- [4] O. C. Zienkiewicz, P. L. Arlett, A. K. Bahrami: Solution of three dimensional field problems by the finite element method, *The Engineer*, s. 27, październik 1967.
- [5] L. Herrmann: Elastic torsion analysis of irregular shapes, Proc. Am. Soc. Civ. Eng. 91, EM6, s. 11-10, 1965.
- [6] A. M. Winslow: Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a non uniform triangle mesh, *J. Computational Physics*, 1, s. 149-172, 1966.
- [7] B. Atkinson, M. P. Brocklebank, C. C. M. Card, J. M. Smith: Low Reynolds number developing flows, *A.I.Ch.E.* 15, s. 548-553, 1969.
- [8] B. Fraeijs de Veubeke, O. C. Zienkiewicz: Strain Energy bounds in finite element analysis by slab analogy, *J. Strain Anal.*, 2, s. 267-271, 1967.
- [9] P. N. Berg: Calculus of variations in Handbook of Eng. Mechanics, Chapter 16, ed. N. Flugge, McGraw-Hill 1962.
- [10] D. N. de G. Allen: Relaxation Methods, McGraw-Hill, s. 199, 1955.
- [11] Y. F. Ely, O. C. Zienkiewicz: Torsion of Compound bars — a relaxation solution. *Int. J. Mech. Sci.*, 1, s. 356-65, 1960.
- [12] O. C. Zienkiewicz, B. Nath: Earthquake hydrodynamic pressures on arch dams — an electric analogue solution Proc. Inst. Civ. Eng., 25, s. 165-176, 1963.
- [13] H. M. Westergaard: Water pressure on dams during earthquakes. *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, 98, 418-33, 1933.
- [14] H. C. Martin: Finite element analysis of fluid flows. Proc. 2nd Conf. on Matrix methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio 1968.
- [15] Y. T. Oden, D. Samogyi: Finite element applications in fluid dynamics. Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 95, EM3, 1969.
- [16] Y. H. Argyris, C. Mareczek, D. W. Scharpf: Two and three dimensional flow using finite elements. *J. Roy. Aero Soc.*, 73, 961-64, 1969.
- [17] L. J. Doctors: An application of finite element technique to boundary value problems of potential flow, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2, 243-52, 1970.
- [18] D. de Vries, D. H. Norris: Application of the finite element technique to potential flow problems, Rep. 7 & 8, Dept. Mech. Eng. University of Calgary, Alberta, Canada 1969.
- [19] R. L. Taylor, C. B. Brown: Darcy flow solutions with a free surface. Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 93, 11Y2, 28-33, 1967.
- [20] W. A. Gross: Gas film lubrication. J. Wiley & Sons, 1962.

- [21] D. I. Tansu, I. C. Row: Student project report on Lubrication. Royal Naval College, Dartmouth 1966.
- [22] M. M. Raddi: Finite element solution of the incompressible lubrication problem. Trans. Am. Soc. Mech. Eng. 91, Series F, 524, 1969.
- [23] M. M. Raddi, T. Y. Chu: Finite element solution of the steady state compressible lubrication problem. Trans. Am. Soc. Mech. Eng., 92, Series F, 495, 1970.
- [24] J. H. Argyris, D. W. Scharpf: The incompressible lubrication problem. J. Roy. Aero Soc., 73, 1044—6, 1969.
- [25] H. Atherton, C. C. M. Card, B. M. Irons: Application of the finite element method to creeping flow problems. Trans. Inst. Chem. Engrs., 48, T276—T284, 1970.
- [26] S. Timoshenko, J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 2nd ed., Mc-Graw Hill, 1951.

## 16. Problemy przestrzenno-czasowe. Podstawowe sformułowania procesów nieustalonych pola i zagadnień dynamicznych

### 16.1. Wstęp

We wszystkich rozpatrywanych dotąd zagadnieniach zakładało się, że warunki nie ulegają zmianom w czasie. Nietrudno jest rozciągnąć koncepcję elementów skończonych także na procesy zależne od czasu.

Zakres zagadnień, w których występuje zmienna czasowa, jest duży. Procesy nieustalone przepływu ciepła, rozchodzenia się fal w cieczech, zachowanie się dynamiczne budowli — oto typowe przykłady. Podczas gdy zwykle rozpatruje się te zagadnienia niezależnie — czasami klasyfikując je odpowiednio do struktury matematycznej opisujących je równań jako „paraboliczne” lub „hiperboliczne” [1] — my spróbujmy potraktować je łącznie, aby pokazać, że sformułowanie ich jest takie samo.

W pierwszej części niniejszego rozdziału ustalimy — poprzez zwykłą adaptację stosowanych dotąd sposobów — macierz równań różniczkowych opisujących te zagadnienia dla różnorodnych sytuacji fizycznych. Zastosujemy tutaj dyskretyzację przy użyciu elementów skończonych tylko wymiarów przestrzennych. W dalszym ciągu rozważymy różne sposoby rozwiązania, ze wskazaniem możliwości włączenia do dyskretyzacji za pomocą elementów skończonych także i wymiaru czasu.

### 16.2. Bezpośrednie sformułowanie problemów zależnych od czasu w przestrzennym podziale na elementy skończone

**16.2.1. Równanie quasi-harmoniczne z pochodnymi względem czasu.**  
W wielu zagadnieniach fizycznych równanie quasi-harmoniczne (omawiane obszernie w poprzednich rozdziałach) przybiera postać, w której występują pochodne

nieznanej funkcji  $\phi$  względem czasu. W przypadku zagadnienia trójwymiarowego typowym przykładem jest równanie

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \left( Q - \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (16-1)$$

W równaniu tym wszystkie parametry na ogół mogą być zadanymi funkcjami czasu

$$k_x = k_x(t), \quad \bar{Q} = \bar{Q}(t) \text{ itd.}$$

Gdy badamy stan w określonej chwili czasu  $t$ , wówczas wszystkie pochodne  $\phi$  względem czasu i wszystkie parametry zależne od czasu można rozpatrywać jako *zadane funkcje współrzędnych przestrzennych*. W tym stanie zagadnienie sprowadza się do badanego w p. 15.2 — jeśli wszystkie wielkości zawarte w ostatnim nawiasie równania (16-1) potraktujemy jako wyraz  $Q$  z równania (15-1).

Dyskretyzacja zagadnienia za pomocą elementów skończonych w przestrzeni była już dokładnie omówiona. Jeżeli dla każdego elementu zapiszemy

$$\phi = [N(x, y, z)] \{ \phi \}^e, \quad (16-2)$$

to standardowa postać układu równań jest następująca

$$[H] \{ \phi \} + \{ F \} = 0. \quad (16-3)$$

Udziały elementów w powyższych macierzach określone zostały przez równania (15-12) i (15-13). Nie będziemy tego powtarzać z wyjątkiem przedstawienia członu „obciążenia” wyrażonego przez  $Q$ . Dla członu tego mamy (15-13)

$$F_i^e = - \int_{V^e} Q N_i dV \quad \text{lub} \quad \{ F \}^e = - \int_{V^e} [N]^T Q dV.$$

Zastępując teraz  $Q$  przez wyrażenie w ostatnim nawiasie równania (16-1) mamy

$$\{ F \}^e = - \int_{V^e} [N]^T \left( \bar{Q} - \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dV. \quad (16-4)$$

Jednakże wiemy, że  $\phi$  zgodnie z (16-2) jest wyrażone w przybliżeniu przez założone funkcje  $N(x, y, z)$  i parametry węzłowe  $\{ \phi \}^e$ . Podstawiając to przybliżone wyrażenie znajdujemy

$$\begin{aligned} \{ F \}^e = & - \int_{V^e} [N]^T \bar{Q} dV + \left( \int_{V^e} [N]^T \mu [N] dV \right) \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi \}^e + \\ & + \left( \int_{V^e} [N]^T \rho [N] dV \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \phi \}^e. \end{aligned} \quad (16-5)$$

Następnie rozwijając (16-3) do postaci ogólnej zbioru równań otrzymujemy następujące macierzowe równanie różniczkowe

$$[U] \{ \phi \} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi \} + [G] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \phi \} + \{ \bar{F} \} = 0, \quad (16-6)$$

w którym wszystkie macierze zbrane są w podmacierzy elementów w standardowy sposób i gdzie podmacierze  $[U]^e$  oraz  $\{ \bar{F} \}^e$  dane są przez związki (15-12) i (15-13), natomiast

$$c_{ij}^e = \int_{V^e} N_i^T \mu N_j dV, \quad (16-7)$$

$$g_{ij}^e = \int_{V^e} N_i^T \rho N_j dV. \quad (16-8)$$

Jak widać z powyższych związków, macierze te są symetryczne.

Wymienione warunki brzegowe w każdej chwili czasu  $t$  należy traktować w sposób opisany w poprzednich rozdziałach.

Zbiór problemów fizycznych opisywanych równaniem (16-1) jest tak duży, że wszechstronna dyskusja przekraczałaby zakres książki. Podamy tu jedynie typowe przykłady.

*Równanie (16-1) przy  $\rho = 0$  jest zwykłym równaniem nieustalonego przepływu ciepła [1], [2]. Rozwiązanie tego problemu przy zastosowaniu metody elementów skończonych można znaleźć w pracach [3]–[6]. To samo równanie opisuje inne zagadnienie, a mianowicie konsolidację gruntów [7] związaną z nieustalonym przepływem cieczy w porach gruntu [8].*

*Równanie (16-1) przy  $\mu = 0$  staje się znanym równaniem falowym, opisującym szeroki wachlarz zjawisk fizycznych. Fale elektromagnetyczne [9], falowanie powierzchniowe cieczy [10], jak również fale ciśnieniowe [11] są tylko wybranymi zagadnieniami, do rozwiązania których da się zastosować metodę elementów skończonych.*

*Równanie (16-1) przy  $\mu \neq \rho \neq 0$  jest równaniem fali tłumionej i ma bardzo szerokie zastosowanie, w szczególności w mechanice cieczy.*

### 16.2.2. Dynamiczne zachowanie się konstrukcji sprężystych z liniowym tłumieniem.<sup>1)</sup>

Chociaż w poprzednim paragrafie zajmowaliśmy się pozornie czysto matematycznym problemem można podane tam rozważania zastosować bezpośrednio do szerokiej klasy zagadnień fizycznych, jak np. dynamicznego zachowania się konstrukcji sprężystych. Należy przy tym postępować zgodnie z wytycznymi rozdziału 2. Gdy przemieszczenie ciała sprężystego zmienia się z upływem czasu, występują dwie rodziny sił dodatkowych.

Pierwsza rodzina to siły bezwładności związane z przyspieszeniami  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ f \}$ .

Siły te na mocy znanej zasady *d'Alemberta* mogą być zastąpione przez ich statyczny równoważnik

$$- \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ f \}, \quad (16-9)$$

gdzie  $\rho$  — masa właściwa (na jednostkę objętości).

<sup>1)</sup> Dla uproszczenia rozważać będziemy tylko efekty *rozłożonych* sił bezwładności. Siły skupione i momenty będą po prostu przypadkami granicznymi.

Mają one składowe w tych surnych klementach co przemieszczenia i ogólnie odnieszione są do jednostki objętości.

Druga rodzina — to siły wywołane przez opór (tarcie wewnętrzne), przeciwdziałające ruchowi. Mogą one być wywołane mikrostrukturą ciała, oporem powietrza itd. i ogólnie związane są nieliniowo z prędkością przemieszczeń  $\frac{\partial}{\partial t}\{f\}$ .

Dla uproszczenia rozważa się jednak liniową zależność sił oporu typu lepkości, traktowanych znów jako siła masowa w równoważnym zagadnieniu statycznym

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t}\{f\}, \quad (16-10)$$

gdzie  $\mu$  jest pewną wielkością, którą z założenia, można podać w wartościach liczbowych.

Równoważne zagadnienie statyczne dla obranej chwili czasowej  $t$  można teraz dyskretyzować dokładnie w sposób podany w rozdz. 2, zastępując jednak siłę rozłożoną  $\{p\}$  przez jej równoważnik

$$\{\bar{P}\} - e \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{f\} - \mu \frac{\partial}{\partial t}\{f\}. \quad (16-11)$$

Siły węzłowe w elementach wg (2-11) przybierają teraz postać

$$\{F\}_v^e = \{F\}_v^e + \int_{V^e} [N]^T e \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{f\} dV + \int_{V^e} [N]^T \mu \frac{\partial}{\partial t}\{f\} dV, \quad (16-12)$$

gdzie pierwszy wyraz przedstawia siłę od obciążenia ciągłego.

Podstawiając do równania (16-12) przybliżone wyrażenie na przemieszczenia zgodne z (2-1)

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e$$

„po zebraniu” otrzymuje się równanie różniczkowe w postaci macierzowej

$$[K]\{\delta\} + [C] \frac{\partial}{\partial t}\{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} + \{\bar{F}\} = 0, \quad (16-13)$$

gdzie  $[K]$  i  $\{\bar{F}\}$  są zebranymi macierzami odpowiednio sztywności i sił, otrzymanymi przez dodawanie współczynników sztywności elementów i sił w elementach od znanych obciążeń zewnętrznych, naprężeń początkowych itd., w sposób szczegółowo opisany poprzednio. Nowe macierze  $[C]$  i  $[M]$  są budowane w zwykły sposób z podmacierzy elementów

$$[c_{ij}]^e = \int_{V^e} [N_i]^T \mu [N_j] dV \quad (16-14)$$

oraz

$$[m_{ij}]^e = \int_{V^e} [N_i]^T e [N_j] dV. \quad (16-15)$$

Macierz  $[m_{ij}]$  zinnu jest pod nazwą *macierzy masy elementu*, a zbranna macierz  $[M]$  — pod nazwą *macierzy masy układu*.

Należy wspomnieć, że w pierwszych pracach dotyczących zagadnień dynamicznych masa elementów była zwykle rozrzucana na węzły w sposób dowolny i macierz masy występowała zawsze jako macierz diagonalna. Fakt, że takie postępowanie było w istocie zbędne i prowadziło do złej zbieżności, był równocześnie stwierdzony przez *Archera* [12] i niezależnie przez *Leckiego* i *Lindberga* [13] w 1963 r. Ogólne przedstawienie wyników w równaniu (16-15) podane zostało przez *Zienkiewicza* i *Cheunga* [14].

Nazwa „konsekwentna macierz mas” została zaproponowana dla macierzy mas rozłożonych; termin ten wydaje się być niepotrzebny, gdyż jest to jedyną macierz, którą należy zastosować do obliczeń.

Przez analogię macierze  $[c_{ij}]$  i  $[C]$  mogłyby być nazwane *macierzami konsekwentnymi tłumienia*.

Warto może zauważyć przy okazji, że czasem należy użyć innych funkcji kształtu do opisu sił bezwładności niż te, które opisują przemieszczenia  $\{f\}$ . Np. w płytach i belkach (rozdz. 10) pełny stan odkształcenia mógł być określony po prostu przez ugięcia  $w$ , ponieważ wprowadzone były dodatkowe założenia dotyczące zginania. Rozpatrując jednak siły bezwładności, może okazać się potrzebne uwzględnienie oprócz zwykłych poprzecznych sił bezwładności danych przez  $-e \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  (gdzie  $e$  jest ciężarem jednostki pola płyty) także bezwładności obrotu przekrojów w postaci

$$\frac{\rho e^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \text{ itd.},$$

gdzie  $t$  — grubość płyty.

Wtedy zajdzie potrzeba opisanie przemieszczenia uogólnionego

$$\{\bar{f}\} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\bar{N}]\{\delta\}^e,$$

gdzie  $[\bar{N}]$  wyniknie wprost z definicji  $[N]$ , która określa jedynie składową  $w$ . Równania typu (16-14) i (16-15) pozostaną nadal ważne pod warunkiem, że  $[N]$  zastąpimy przez  $[\bar{N}]$ , a zamiast  $e$  wprowadzimy macierz

$$\begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho e^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho e^2}{12} \end{bmatrix}$$

Takie specjalne przypadki występują raczej rzadko.

### 16.2.3. Macierze mas oraz tłumienia dla pewnych typowych elementów.

Nie jest praktycznie celowe przedstawianie w postaci rozwiniętej wszystkich macierzy mas dla różnych elementów omawianych w poprzednich rozdziałach. Tutaj mówić będziemy tylko o kilku wybranych przykładach.



Plaski stan naprężenia i odkształcenia. Stowując elementy trójkątne omawiane w rozdz. 4 możemy zdefiniować macierz  $[N]$  następująco

$$[N] = [IN_i, IN_j, IN_m],$$

gdzie:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz wg równania (4-8)

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A \text{ itd.},$$

gdzie  $A$  — pole trójkąta.

Jeśli założymy, że grubość elementu  $t$  jest stała, mamy wówczas dla macierzy mas wg (16-15)

$$[m]^e = \rho t \iint [N]^T [N] dx dy \quad (16-16)$$

lub

$$[m_{rs}]^e = \rho t [I] \iint N_r N_s dx dy. \quad (16-17)$$

Podstawiając związek (4-8) można wykazać, że

$$\iint N_r N_s dx dy \text{ równe jest } \frac{A}{12} \text{ dla } r \neq s \text{ lub } \frac{A}{6} \text{ dla } r = s; \quad (16-18)$$

przyjmując zatem ciężar elementu  $\rho t A = W$ , otrzymujemy macierz mas w postaci

$$[m]^e = \frac{W}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (16-19)$$

Jeżeli zaś masę elementu rozdzielimy na węzły w równym stopniu, to wówczas

$$[m]^e = \frac{W}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16-20)$$

Jest oczywiste, że oba wyniki różnią się dość istotnie.

**Drgania płyt.** Drgania płyt stanowią problem o istotnym znaczeniu praktycznym. Takie zagadnienia jak drgania jezdni mostów, drgania łopatek turbin itd., prowadzą do sformułowań nie dających się rozwiązać analitycznie w sposób ścisły.

Znaczenie zastosowania poprawnej macierzy mas zamiast „rozdziłu” mas jest omawiane w literaturze [15] ÷ [19].

Jeśli rozpatrujemy prostokątny element płyty z p. 10.4, wtedy funkcja przemieszczeń jest zdefiniowana za pomocą równania (10-16) jako

$$[N] = [P][C]^{-1} \quad (16-21)$$

przy oznaczeniach podanych w rozdz. 10.

Zauważymy, że  $[C]$  nie zależy od współrzędnych i że  $[P]$  wyraża się zależnościami

$$[P] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3].$$

Zatem macierz mas dla elementu płyty o stałej grubości  $t$  zgodnie z (16-15) równa się

$$[m]^e = \rho t [C]^{-1T} \left( \iint [P]^T [P] dx dy \right) [C]^{-1}. \quad (16-22)$$

I znów należy wyznaczyć tylko środkową całkę, co nie przedstawia trudności; cała macierz zaś może być otrzymana poprzez mnożenie macierzy. Wyrażenie to zostało przedstawione explicite przez Dawe'a [16] i jest przytoczone w tabl. 16.1.

Tablica 16.1

Macierz mas dla prostokątnego elementu płyty

$$[m]^e = [L][M][L]$$

										$\lambda = \frac{\rho t a b}{6300}$											
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>3454</td></tr> <tr><td>-461 80 80</td></tr> <tr><td>1226 -274 199 3454</td></tr> <tr><td>274 -60 42 461 80</td></tr> <tr><td>199 -42 40 461 63 80</td></tr> <tr><td>1226 -199 274 394 116 116 3454</td></tr> <tr><td>-199 40 -42 -116 -30 -28 -461 80</td></tr> <tr><td>-274 42 -60 -116 -28 -30 -461 63 80</td></tr> <tr><td>394 -116 1226 199 274 1226 -274 -199 3454</td></tr> <tr><td>116 -30 28 199 40 42 274 -60 -42 461 80</td></tr> <tr><td>-116 28 -30 -274 -42 -60 -199 42 40 -461 63 80</td></tr> </table>										3454	-461 80 80	1226 -274 199 3454	274 -60 42 461 80	199 -42 40 461 63 80	1226 -199 274 394 116 116 3454	-199 40 -42 -116 -30 -28 -461 80	-274 42 -60 -116 -28 -30 -461 63 80	394 -116 1226 199 274 1226 -274 -199 3454	116 -30 28 199 40 42 274 -60 -42 461 80	-116 28 -30 -274 -42 -60 -199 42 40 -461 63 80	$[L]$ — patrz tabl. 10.1
3454																					
-461 80 80																					
1226 -274 199 3454																					
274 -60 42 461 80																					
199 -42 40 461 63 80																					
1226 -199 274 394 116 116 3454																					
-199 40 -42 -116 -30 -28 -461 80																					
-274 42 -60 -116 -28 -30 -461 63 80																					
394 -116 1226 199 274 1226 -274 -199 3454																					
116 -30 28 199 40 42 274 -60 -42 461 80																					
-116 28 -30 -274 -42 -60 -199 42 40 -461 63 80																					
$[M] = \lambda$																					

Podobnie macierze mas można otrzymać dla elementów trójkątnych, omówionych w p. 10.6 i dalej. Nie podaje się tu rozwiniętych wyrażeń wyników całkowania, pozostawiając Czytelnikowi ich wyprowadzenie<sup>1)</sup>. Przy użyciu tych elementów zaleca się całkowanie na drodze numerycznej.

**Powłoki.** Jeżeli znalezione zostaną macierze mas dla ruchu „w płaszczyźnie” i „zginania”, wtedy można łatwo obliczyć macierze mas odniesione do ogólnego układu współrzędnych. Można także analizować powłoki dodając stany tarczowe i zgięciowe. Reguły transformacji są oczywiście takie same jak dla sił. Wyprowadzenie macierzy mas dla każdego elementu we współrzędnych ogólnych i ostateczne zebranie macierzy mas związanych z węzłem odbywa się dokładnie w sposób podany w rozdz. 11 dla macierzy sztywności. Problemy drgań powłok w zasadzie nie sprawiają szczególnych nowych trudności.

<sup>1)</sup> Całki podane są explicite w pracy [20].

**Macierze tłumienia.** Powyższe przykłady być może pomogły Czytelnikowi utrwalić pewne podstawowe zasady. Zauważy On, że macierze tłumienia podane w (16-14) mają dokładnie taką samą strukturę jak macierze mas; istotnie, różne macierze przedstawione w p. 16.2.1 i podane w (16-7) oraz (16-8) mają również podobną postać. Tak więc, przy nieznacznej modyfikacji, wyniki przedstawione dla płaskiego elementu trójkątnego są jednakowo przydatne we wszystkich tych okolicznościach i nie warto ich ponownie przytaczać.

### 16.3. Zagadnienia sprzężone

Obie grupy zagadnień dyskutowane w p. 16.2 prowadzą do ogólnej, jednakowej postaci macierzy równań różniczkowych, przedstawionej w (16-6) lub (16-13). Inne zagadnienia opisywane przez równania wyższego rzędu można wyprowadzić podobnie. Czasami dwa oddzielne układy takich równań występują w tzw. zagadnieniach sprzężonych. Aby uzupełnić rozważania, musimy przedyskutować dwa takie typowe przypadki, mające poważniejsze znaczenie techniczne.

**16.3.1. Sprzężony ruch konstrukcji sprężystej w cieczy** [21], [22]. Równanie różniczkowe opisujące rozkład ciśnienia  $p$  wywołanego ruchem cieczy ściśliwej o małej amplitudzie ma postać

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (16-23)$$

gdzie  $\bar{c}$  — prędkość fal dźwiękowych. W równaniu tym pominięto wyrazy zawierające tłumienie.

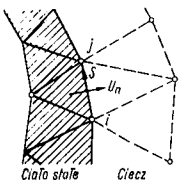
Na brzegach zadane jest  $p$  lub w przypadku ciała stałego w ruchu

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{d^2}{dt^2} (U_n), \quad (16-24)$$

gdzie  $U_n$  — normalna składowa przemieszczenia (rys. 16.1).

Podział obszaru cieczy na elementy skończone prowadzi do dyskretyzacji równania (16-6) w postaci

$$[H]\{p\} + [G] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{p\} + \{\bar{F}\} = 0, \quad (16-25)$$



Rys. 16.1. Powierzchnia graniczna: ciało stałe — ciecz

gdzie macierze  $[H]$  i  $[G]$  otrzymujemy się w zwykły sposób. Macierz  $\{F\}$  nie może mieć członów zawierających całki objętościowe; otrzymuje się ją, uwzględniając całki wyłącznie na powierzchniach granicznych, odpowiadające zadanemu ruchowi [por. równanie (15-27)]<sup>1)</sup>.

Brzegowy (między powierzchniami) ruch zadany jest poprzez ruch konstrukcji. Jeżeli sama konstrukcja jest zdyskretyzowana można napisać

$$U_n = [\bar{N}]\{\delta\}, \quad (16-26)$$

gdzie  $[\bar{N}]$  określone jest przez odpowiednie funkcje kształtu, zaś  $\{\delta\}$  są przemieszczeniami węzłów. Z równania (15-13) mamy

$$\{\bar{F}\} = [S] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\}, \quad (16-27)$$

gdzie

$$[S] = \int_S [N]^T \rho [\bar{N}] dS, \quad (16-28)$$

przy czym  $[N]$  są to funkcje kształtu, określające rozkład ciśnienia.

Przez dyskretyzację konstrukcji mamy odpowiednio

$$[K]\{\delta\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} + \{\bar{F}\}_s + \{R\} = 0, \quad (16-29)$$

gdzie łatwo rozpoznamy wyrazy podane w równaniu (16-13), z tym że wyruzy uwzględniające obciążenie zostały podzielone na część zewnętrzną  $\{R\}$  (założono jej oddzielny opis) i  $\{\bar{F}\}_s$  wywołane ciśnieniem cieczy na powierzchnię konstrukcji. Stosując zasadę prac wirtualnych znajdziemy

$$\{\bar{F}\}_s = \int_S [\bar{N}]^T \rho dS = \frac{1}{\rho} [S]^T \{p\}. \quad (16-30)$$

Łącząc teraz zależności (16-25), (16-27), (16-29) i (16-30) otrzymamy ostatecznie sprzężony układ macierzowych równań różniczkowych

$$[H]\{p\} + [G] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{p\} - [S] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} = 0 \quad (16-31)$$

$$[K]\{\delta\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} + \frac{1}{\rho} [S]^T \{p\} + \{R\} = 0$$

opisujący rozważany problem.

Pewne aspekty tego zagadnienia omawiane były w pracach [21] i [22].

<sup>1)</sup> W bardziej ogólnym przypadku równanie (16-25) można pomnożyć przez wyruż zawierający  $\rho$  i pierwszą pochodną  $p$  względem czasu. Przypadek ten ma miejsce wówczas, gdy wyruż z tłumieniem są uwzględnione w równaniu ruchu cieczy, albo gdy mamy brzozi cieczy nie oddzielające fal ciśnieniowych. Takie brzozi występują, gdy ciecz rozciąga się nieograniczenie, a dla celów rachunku obszar zostaje ograniczony [22].

Dla szczególnego przypadku cieczy nieskładowej ( $\dot{c} = \infty$ ) drugi wyraz  $\{G\}$  pierwszego równania staje się zerem i równanie to może być rozwiązane niezależnie, dając w wyniku

$$\{p\} = [H]^{-1}[S] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\}.$$

Podstawiając to do drugiego równania otrzymamy proste równanie dynamiczne, w którym macierz mas jest pomnożona przez dodatkową macierz mas

$$\frac{1}{\rho} [S]^T [H]^{-1} [S]. \quad (16-32)$$

Taka „zredukowana macierz mas” została zaproponowana przez Zienkiewicza i innych [4], [15].

Ten sam proces zastosowany został przy badaniu częstotliwości drgań własnych zapór łukowych [23].

**16.3.2. Sprężyste zachowanie się nawodnionego ośrodka porowatego [24].** Zagadnienie to ma duże znaczenie w mechanice gruntów i w szeregu problemów geotechnicznych.

W sprężystym ośrodku porowatym ciśnienie cieczy w porach wywołuje siły masowe, występujące w macierzy sprężystości o wartości

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (16-33)$$

Siły te zostały omówione w rozdz. 4; Czytelnik może znaleźć dalsze szczegóły w pracy [25].

Gdy teraz zdyskretyzujemy obszar sprężysty za pomocą elementów skończonych, wspomniane siły masowe spowodują udział w siłach węzłowych o wielkości<sup>1)</sup>

$$\{F\}_p = \left( \int_V [\bar{N}]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} [N] dV \right) \{p\} = [L] \{p\}, \quad (16-34)$$

gdzie  $[\bar{N}]$  — funkcje kształtu definiujące przemieszczenia ciała sprężystego,  $[N]$  — funkcje kształtu definiujące rozkład ciśnień w porach.

<sup>1)</sup> Calki dla całego obszaru napisane są tylko dla uproszczenia zapisu, podobnie jak w rozdz. 2.

Ostatecznie dla kontinuum mamy standardowe równanie zdyskretyzowane

$$[K] \{\delta\} + [L] \{p\} + \{R\} = 0, \quad (16-35)$$

gdzie  $[K]$  — macierz sztywności,  $\{R\}$  — wszystkie zadane siły z wyjątkiem ciśnienia cieczy w porach.

Zajmijmy się cieczą zawartą w porach. Musimy zapisać odpowiednie równanie różniczkowe ciągłości. Równanie to podaliśmy jako (15-1) w rozdz. 15; w równaniu tym  $k_x, k_y, k_z$  są teraz współczynnikami przepuszczalności, zaś  $Q$  prędkość narastania (dopływu oraz wypływu) cieczy w jednostce objętości przestrzeni.

Przy sprężystych odkształceniach ośrodka wskutek przemieszczeń  $u, v, w$  mamy

$$Q = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{N} \right] \{\delta\}, \quad (16-36)$$

gdzie  $\mu$  — porowatość materiału. Dyskretyzując równanie (15-1) i podstawiając (16-36) otrzymujemy

$$[H] \{p\} + [S] \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\} = 0, \quad (16-37)$$

ponieważ udział  $Q$  wyrażony jest zależnością (15-13)

$$\mu \int_V [N]^T Q dV = \left( \mu \int_V [N]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} [\bar{N}] dV \right) \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}. \quad (16-38)$$

Równania (16-35) i (16-37) tworzą sprzężony układ macierzowych równań różniczkowych. Jest on podobny do układu wyprowadzonego dla sprzężonego współdziałania dynamicznego: ciecz-ciało stałe (16-31).

Jeśli założymy nieskładowość cieczy dla zadania omawianego w p. 16.3.1, wówczas postać (16-31) staje się identyczna z rozważaną w niniejszym zadaniu.

Należy odnotować, że jedynie formalnie z zależności (16-34) i (16-38) wynika

$$[S] = \mu [L]^T.$$

Problem ten był po raz pierwszy zdyskretyzowany za pomocą elementów skończonych przez Sandhu i Wilsona [24], którzy zastosowali jednak nieco odmienny sposób.

Aspekty fizyczne zagadnienia omawiali Crocker i Naghdi [26] oraz Biot [27].

Zwykle równanie konsolidacji, mające postać równania (16-1) z pominięcia pochodnych drugiego rzędu względem czasu, jest szczególnym przypadkiem przedstawionego tutaj, ogólniejszego sformułowania.

Powyżej założono, że ciecz jest nieściśliwa. Gdy uwzględnimy jednak ściśliwość cieczy, w równaniu (16-37) wystąpi dodatkowy wyraz w postaci

$$[A] \frac{\partial}{\partial t} \{p\}.$$

Przyjmując to rozszerzenie można badać zagadnienia ośrodków częściowo nasyconych cieczą (gruntów).

#### 16.4. Odmienne sformułowanie zagadnienia wpływu czasu

W poprzednim paragrafie sprawdziliśmy rozwiązania zagadnień do rozwiązywania macierzowych równań różniczkowych względem czasu. Postępowanie to jest wyjątkowo proste i nie zawiera nowych zasad. Możliwe są jednak odmienne sformułowania.

W pierwszym z nich stosuje się metodę *Galerkina* (lub inną metodę ważonej residualnej) bezpośrednio do równań różniczkowych opisujących zagadnienie, w sposób omawiany w p. 3.4. Za pomocą niewiadomych opisanych przez funkcje kształtu zależne nie tylko od położenia geometrycznego, ale także i od czasu, tj.

$$\phi = [N(x,y,z,t)] \{\Phi\},$$

problem może być zdyskretyzowany poprzez *elementy skończone w przestrzeni i w czasie* [6], [28].

W ten sposób zagadnienie staje się „czterowymiarowe”, lecz w zasadzie całkowite zadanie numeryczne powinno być ostatecznie sformułowane bezpośrednio w każdym przedziale czasu  $t_1 < t < t_2$  i rozwiązanie otrzymamy w sposób standardowy.

W drugim sposobie postępowania stosuje się zasadę wariacyjną w wyrażeniach zależnych także od przestrzeni i od czasu. Postępowanie takie przy użyciu całek wplotu zostało opisane przez *Gurtina* [29] i zastosowane z powodzeniem w pracach [5] i [24]. I w tym przypadku dokonano podziału na elementy przestrzenno-czasowe.

W prostych zagadnieniach dynamicznych taka zasada wariacyjna pochodzi wprost z dobrze znanego równania *Lagrange'a*, w którym wartość stacjonarna jest poszukiwana dla

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (16-39)$$

gdzie

$$L = U + W + T, \quad (16-40)$$

przy czym  $U$  i  $W$  jest sumą energii oddziaływania i energii potencjalnej, którą wprowadziliśmy w rozdz. 2, natomiast  $T$  jest energią kinetyczną układu.  $L$  znane jest pod nazwą *funkcji Lagrange'a* [30].

Mimo iż takie sformułowanie ma pewną zaletę ogólności, z uwagi na ograniczone możliwości rozważań zostanie ono pominięte i nie będzie dalej omawiane bardziej szczegółowo.

Uproszczona wersja metody *Galerkina* jest wprowadzona bezpośrednio do zdyskretyzowanych równań w następnym paragrafie.

#### 16.5. Związki rekurencyjne dla rozwiązania zagadnienia wartości początkowych

Macierzowe równania różniczkowe otrzymane w p. 16.3 miały taki charakter, że określona liczba wartości funkcji lub — w razie potrzeby — wartości pierwszej jej pochodnej względem czasu całkowicie określały tę funkcję w zadanym odstępie czasu.

Przedstawiona poniżej kategoria zagadnień, zwana zagadnieniami o wartościach początkowych, jest rozwiązana poprzez zastosowanie odpowiednich związków rekurencyjnych [1]. Za pomocą takiego postępowania krok po kroku otrzymuje się pełne rozwiązanie zagadnienia.

W pewnych prostych przypadkach związki rekurencyjne mogą być zastąpione rozwiązaniem ścisłym, jak to pokazał *Visser* [3]. Tych przypadków rozpatrywać tutaj nie będziemy.

Związki rekurencyjne mogą być znajdowane w różny sposób. Można zastosować na przykład schemat różnic skończonych lub postępowanie *Galerkina* ważonej residualnej, wewnątrz każdego przedziału czasu. Drugi z wymienionych sposobów pozwala na bardziej ogólne traktowanie i ma wszelkie zalety procesów wariacyjnych, proponowanych przez *Wilsona* i innych [5], [24].

Związek rekurencyjny może być zapisany równocześnie dla kilku całek; wymaga to większej do rozwiązania liczby równań, lecz daje w wyniku wzrost dokładności i stabilności rozwiązań.

Wygodnie będzie rozpatrzeć oddzielnie równania macierzowe zawierające tylko pierwszą pochodną względem czasu, a następnie równania zawierające drugą pochodną.

**16.5.1. Zagadnienia z pierwszą pochodną względem czasu.** Typowym zagadnieniem tej kategorii jest problem określony przez równanie (16-6) przy  $[G] = 0$ , tj.

$$[H]\{\dot{\phi}\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{\phi\} + \{\bar{F}\} = 0. \quad (16-41)$$

Rozpatrzmy przedział od  $t = 0$  do  $t = t_n$ , gdzie  $\{\phi\}_0$  są to wartości początkowe przy  $t = 0$ .

Ogólnie powinniśmy wewnątrz przedziału założyć postać interpolowaną funkcji  $\{\phi\}$ , określoną przez jej wartości w poszczególnych przedziałach czasu

$$\{\phi\} = \sum_{i=0}^n N_i(t) \{\phi\}_i, \quad (16-42)$$

gdzie  $N_i(t)$  — odpowiednie funkcje kształtu, określone w sposób ciągły w przedziale. Nic jest tutaj korzystne przedstawiać te funkcje w sposób nieciągły, na podobieństwo elementów skończonych, z uwagi na „ruchowy” charakter zagadnienia.

Na przykład jeżeli założymy liniową interpolację, można rozpatrywać tylko początkową wartość przy  $t = 0$  i wartość przy  $n = 1$ , tj.  $t_n = \Delta t$ . Mamy więc zależność w postaci macierzowej

$$\{\phi\} = [N_0, N_1] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix} \quad (16-43)$$

gdzie:

$$N_0 = \frac{\Delta t - t}{\Delta t},$$

$$N_1 = \frac{t}{\Delta t}.$$

Pochodna tej funkcji względem czasu jest

$$\frac{\partial \{\phi\}}{\partial t} = \left[ \frac{\partial N_0}{\partial t}, \frac{\partial N_1}{\partial t} \right] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} [-1, 1] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix} \quad (16-44)$$

Jeżeli wartość początkowa  $\{\phi\}_0$  jest znana, otrzymuje się tylko jedno ważne równanie residualne przez scałkowanie równania (16-41) pomnożonego przez  $N_1$ . Zatem

$$\int_0^{\Delta t} \frac{t}{\Delta t} \left( [H][N_0, N_1] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix} + [C] \left[ \frac{\partial N_0}{\partial t}, \frac{\partial N_1}{\partial t} \right] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix} + \{\bar{F}\} \right) dt = 0. \quad (16-45)$$

Po uwzględnieniu zależności (16-44) i ostatecznym scałkowaniu otrzymamy

$$\frac{1}{2} [H] (\{\phi\}_0 + \{\phi\}_1) + \frac{1}{\Delta t} [C] (-\{\phi\}_0 + \{\phi\}_1) + \int_0^{\Delta t} \frac{t}{\Delta t} \{\bar{F}\} dt = 0. \quad (16-46)$$

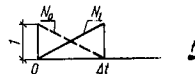
Wynik ten jest identyczny z wynikiem otrzymanym poprzez założenie *średniej różnicy skończonej*, zastosowanym w pracach [1], [4], [8]. Jego wywód jest jednak odmienny i stwarza interesujące możliwości zastosowań przy użyciu innych funkcji interpolacyjnych.

Z równania (16-46) można wyznaczyć  $\{\phi\}$ ,

$$\{\phi\}_1 = \left( [H] + 2[C] \frac{1}{\Delta t} \right)^{-1} \left( [H] - 2[C] \frac{1}{\Delta t} \right) \{\phi\}_0 - \int_0^{\Delta t} \frac{t}{\Delta t} \{\bar{F}\} dt \quad (16-47)$$

i zastosować ten wzór rekurencyjny do wszystkich dalszych odstępów czasu (począwszy od  $t = 0$ ).

Jako odmienny schemat rekurencyjny można rozpatryć przedział zawierający trzy odcinki czasu (0,  $\Delta t$ ,  $2\Delta t$ ), jak pokazano na rys. 16.2.



Rys. 16.2. Zmienne w czasie „funkcje kształtu” o nieciągłej pierwszej pochodnej

Stosując taki sam proces i przyjmując paraboliczny wzór interpolacji *Lagrange'a*, zamiast (16-43) będziemy mieli

$$\{\phi\} = [N_0(t), N_1(t), N_2(t)] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \\ \{\phi\}_2 \end{Bmatrix}$$

Przeprowadzenie takiego samego rachunku jak poprzednio doprowadzi do dwu ważonych residualnych równań podobnych do (16-46), z których znów można wyznaczyć  $\{\phi\}_1$  i  $\{\phi\}_2$  na podstawie znajomości warunku początkowego  $\{\phi\}_0$ .

Proces ten można kontynuować nieograniczenie, otrzymując bardziej udokonalone rozwiązania przez podwajanie, potrajanie itd. całkowitej liczby równań rozdanych w rozwiązaniu dla pojedynczego przyrostu. Wydaje się, że przy bardziej rozbudowanych „elementach w czasie” uzyskuje się większą stabilność rozwiązań i można stosować większe odstęp czasu.

**16.5.2. Zagadnienia z drugą pochodną względem czasu.** Dynamiczny ruch konstrukcji i podobne problemy prowadzą do równań typu (16-13)

$$[K]\{\delta\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} + \{\bar{F}\} = 0.$$

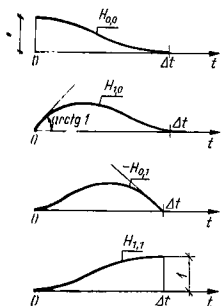
Z postaci tych równań widać, że niezbędne są dwa warunki początkowe. Ogólnie zarówno  $\{\delta\}_0$  jak i  $\frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_0$  powinny być znane na początku rozważanego przyrostu czasu. Postępując dokładnie tak samo jak poprzednio, należy przyjąć funkcje kształtu zmienne w czasie jako określone przez wartości  $\{\delta\}$  i  $\frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}$  w różnych

chwilałach czasu  $t$ . Jeżeli rozpatrywać będziemy odstęp czasu między 0 i  $\Delta t$ , przyjmujemy w nim teraz hermitowskie wielomiany sześciennne, zatem

$$\{\delta\} = [H_{0,0}, H_{1,0}, H_{0,1}, H_{1,1}] \begin{Bmatrix} \{\delta\}_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_0 \\ \{\delta\}_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_1 \end{Bmatrix} \quad (16-48)$$

gdzie:  $H_{0,0} = 1 - 3s^2 + 2s^3$ ,  
 $H_{1,0} = s - 2s^2 + s^3$ ,  
 $H_{0,1} = 3s^2 - 2s^3$ ,  
 $H_{1,1} = -s^2 + s^3$ ,  
 $s = \frac{t}{\Delta t}$ .

Powyższe wielomiany hermitowskie są tego samego typu, jakie omówiono w rozdz. 12. Przedstawiono je na rys. 16.3.



Rys. 16.3. Zmienne w czasie „funkcje kształtu” o nieciągłej drugiej pochodnej

Równania rekurencyjne można znów otrzymać zapisując ważne równanie residualne dla  $t = \Delta t$

$$\int_0^{\Delta t} \begin{Bmatrix} H_{0,1} \\ H_{1,1} \end{Bmatrix} \left\{ [K] + [C] \frac{\partial}{\partial t} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} [H_{0,0}, H_{1,0}, H_{0,1}, H_{1,1}] \begin{Bmatrix} \{\delta\}_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_0 \\ \{\delta\}_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_1 \end{Bmatrix} + \{ \bar{F} \} dt = 0. \quad (16-49)$$

Stąd, po podstawieniu funkcji kształtu otrzymamy równanie całkowe określania  $\{\delta\}_1$  i  $\frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_1$  poprzez wartości początkowe. Ostateczna postać wzorów rekurencyjnych jest następująca

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_1 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}$$

Podane powyżej związki rekurencyjne są inne od otrzymanych w postaci różnicowej przez *Wilsona i Clougha* [31] lub w innej postaci przez *Chana* i innych [32]. Były one zastosowane z powodzeniem przez *Frieda* [28], choć wyprowadził on je w odmienny sposób.

Oczywiście można zastosować i tutaj bardziej ogólne „elementy skończone czasu” z dodatkowymi wewnętrznymi stopniami swobody.

**16.5.3. Problemy sprzężone.** Problemy te można traktować dokładnie tak samo jak wyżej, zakładając odpowiednie postacie funkcji zmiennych w czasie. Szczegóły nie będą tutaj omawiane.

**16.5.4. Przykłady.** Przedstawione tu przykłady zastosowania wzorów rekurencyjnych typu omówionego w p. 16.5.1 wg pracy [6] mają zilustrować stabilność rozwiązania i sposób postępowania.

*Niestabilny rozkład ciepła w łopatkę wirnika.* Przykład ten pokazany na rys. 16.4 przedstawia dwuwymiarowe zadanie przewodnictwa ciepła opisywane równaniem

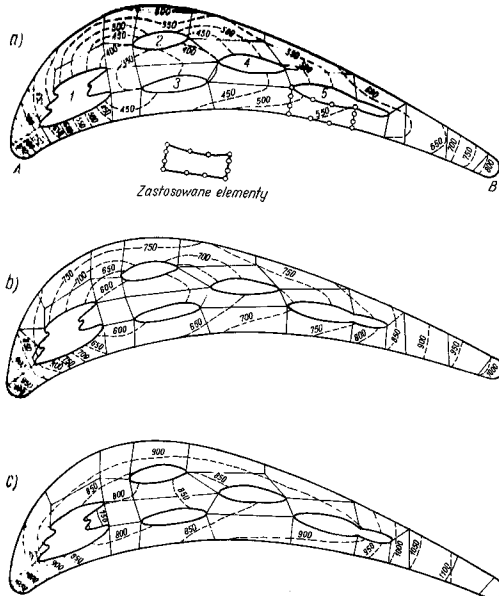
$$\nabla^2 T = 0.$$

Na brzegach warunki wypromieniowania ciepła (15-3) zostały zadane przy różnych współczynnikach przewodnictwa cieplnego, zakładając

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha \frac{(T - T_a)}{k},$$

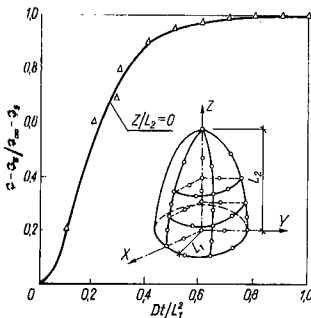
gdzie  $T_a$  — temperatura gazu otaczającego łopatkę. Na rysunku przedstawiono warstwicę rozkładu temperatury w różnych chwilach czasu. Przy podziale badanego obszaru (przekrój łopatki) zastosowano elementy izoparametryczne trzeciego stopnia.

*Trójwymiarowy problem przewodnictwa cieplnego.* Dla przedstawienia ósemki sfery zastosowany został gruby podział zaledwie na trzy izoparametryczne elementy drugiego stopnia. Na rys. 16.5 pokazano ten podział i równocześnie porównano zmienność temperatury w środku z wartością otrzymaną na drodze analitycznej [33]. Widać dobrą zgodność wyników.



Rys. 16.4. Rozkład temperatury w chłodzonej łopatkę turbiny w chwilach: a)  $t = 0,5$  s, b)  $t = 1$  s, c) dla stanu ustalonego

Początkowo w chwili  $t = 0,01$  s temperatura zerowa. Ciepło właściwe  $c = 0,11$  cal/g°C, gęstość  $\rho = 7,99$  g/cm<sup>3</sup>, przewodność  $k = 0,05$  cal/s cm°C, temperatura gazu wokół łopatki  $T_a = 1145^\circ\text{C}$ , współczynnik odpływu (napływu) ciepła  $\alpha$  zmienia się od 0,390 do 0,056 na zewnętrznych powierzchniach łopatki (A—B)



Nr otworu	1	2
Temperatura chłodząca wewnątrz	545°C	587°C
$\alpha$ na obwodzie otworu	0,0980	0,0871

Rys. 16.5. Zmiany temperatury w czasie w wydłużonym ciele sferoidalnym w punkcie  $x = y = z = 0$ ,  $\Delta t = 0,025$ ,  $L_2/L_1 = 2$ ,  $\alpha L_1/k = \infty$   
 — rozwiązanie analityczne,  $\Delta\Delta$  — metoda elementów skończonych

## 16.6. Inny problem nieustalony. Filtracja przy powierzchni swobodnej

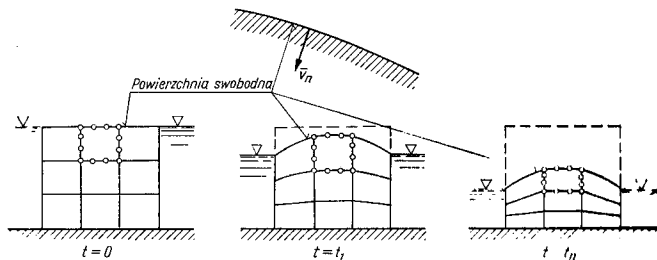
Szczególną klasę problemów nieustalonych stanowią problemy filtracji wody gruntowej bez uwzględnienia jej ściśliwości, lecz przy uwzględnieniu postępującej zmiany jej powierzchni swobodnej. W równaniu opisującym problem (15-6) nie występuje zależność od czasu.

Powierzchnia swobodna jest linią zerowych ciśnień w cieczy (por. rozdz. 15), nie jest jednak linią prądu w warunkach nieustabilizowanych. Jeżeli rozwiązanie otrzymano dla pewnej chwili czasu  $t$ , przy znanej pozycji powierzchni swobodnej, wówczas składową prędkości, normalną do tej powierzchni swobodnej, określa się z zależności

$$\bar{v}_n = \frac{1}{\mu} v_n.$$

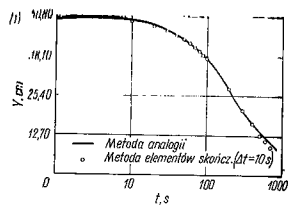
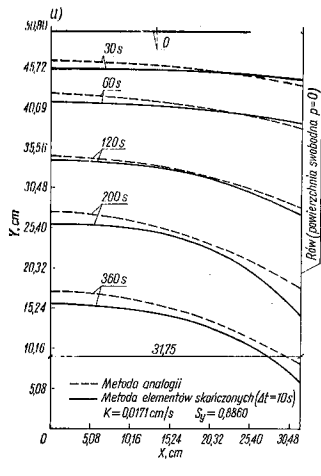
Postępując krok po kroku znajdujemy nowe położenie powierzchni swobodnej po upływie czasu  $\Delta t$  i rozwiązanie powtarzamy. Oczywiście, siatkę podziału na elementy skończone należy przystosowywać przy każdym kroku obliczeń do nowego położenia powierzchni swobodnej.

Zakrzywione i izoparametryczne elementy skończone są szczególnie użyteczne w tym przypadku; były one stosowane do rozwiązywania dwu- oraz trójwymiarowych zadań [34], [35].



Rys. 16.6. Powierzchnia swobodna przy filtracji; prędkość powierzchni swobodnej dla każdej chwili czasu  $t$  (siatka otrzymana automatycznie)

Rysunki 16.6 i 16.7 pokazują zastosowanie procesu do prostych przykładów (drenaży w przypadku dwu symetrycznych usytuowanych kanałów i porównanie wyników z rozwiązaniem analogowym [36]. Praktyczna przydatność tego typu rozwiązań jest znaczna; m. in. można wyjaśnić stronę jakościową problemu szybkiego obniżenia poziomu wody w gruncie itp.



Rys. 16.7. Powierzchnia swobodna przy filtracji (por. rys. 16.6): a) konfiguracje powierzchni swobodnej, b) zmiana powierzchni swobodnej w czasie (w srodku ciela) przy naglym spadku wody

## 16.7. Uwagi koncowe

Przytoczyliśmy zasady badania szeregu problemow nieustalonych i podstawowe sformulowania tych problemow. Mozna przewidywac dla tego sposobu rozwiazania problemow bardzo szerokie pole zastosowan; wiele problemow majacych istotne znaczenie fizyczne mozna teraz sformulowac i rozwiazac.

Rozwiazania takie, chociaz byly mozliwe do uzyskania poprzednio za pomoca rachunku roznicy skonczonej, pozwalaja teraz wykorzystac zalety tkwiace w metodzie elementow skonczonej. Jednak trudnosci odnoszace sie do sprawy statycznosci takich rozwiazan pozostaja nadal, mimo iz uwiklana postac wzorow rekurencyjnych, wyprowadzona w p. 16.3, daje zazwyczaj dobre pod tym wzgledem wyniki.

Przy rozwiazaniu problemu przez zastosowanie wzorow rekurencyjnych w postaci (16-47) nalezy odwracac macierz znacznych wymiarow dla kazdego odstepu czasu. Jezeli przyjmiemy rowne odstepy czasu, a wlascnosci nie zmieniaja sie w czasie, wtedy wystepuje w rozwiazaniach ta sama macierz przy kazdym kolejnym kroku obliczen i, stosujac czesciowe odwracanie, mozna skrócić czas niezbedny do uzyskania kolejnych rozwiazan do ułamka czasu, jaki potrzebny jest do pierwszego rozwiazania [6].

Niestety nie zachodzi to w wiekszosci problemow nieliniowych, w takim np. jak zagadnienie swobodnej powierzchni przy filtracji podane w p. 16.6 i podobnych. Pewne takie sytuacje nieliniowe byly przedmiotem ostatnich badan; m. in. rozważano nieustalony przeplyw ciepla z rownoczesną zmianą fazy (ochładzanie).

Pełna dyskusja tego i podobnych przypadków wykracza jednak poza ramy niniejszej książki.

## Cytowane publikacje

- [1] S. Crandall: Engineering Analysis, McGraw-Hill, 1956.
- [2] H. S. Carslow, J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, 2nd ed. Clarendon Press, 1959.
- [3] W. Vissler: A finite element method for the determination of non stationary temperature distribution and thermal deformation, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
- [4] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: The finite element method in structural and continuum mechanics, 1st ed. McGraw-Hill, 1967.
- [5] E. L. Wilson, R. E. Nickell: Application of finite element method to heat conduction analysis, Nuclear Eng. and Design, s. 1—11, 1966.
- [6] O. C. Zienkiewicz, C. J. Perekh: Transient field problems—two and three dimensional analysis by isoparametric finite elements, Int. J. Num. Meth. in Eng., 2, 1970.
- [7] K. Terzaghi, R. F. Peck: Soil Mechanics in Engineering Practice, J. Wiley & Son, 1948.
- [8] D. K. Todd: Ground water hydrology, J. Wiley & Son, 1959.
- [9] P. L. Arlet, A. K. Bahrani, O. C. Zienkiewicz: Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation, Proc. I.E.E., 115, s. 1762—6, 1968.
- [10] C. Taylor, B. S. Patil, O. C. Zienkiewicz: Harbour oscillation: a numerical treatment for undamped natural modes, Proc. Inst. Civ. Eng., 43, s. 141—156, 1969.
- [11] O. C. Zienkiewicz, R. E. Newton: Coupled vibrations in a structure submerged in a compressible fluid, Int. Hympt. on finite element techniques, Stuttgart, 1969.
- [12] J. S. Archer: Consistent mass matrix for distributed systems, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 89, ST'4, s. 161, 1963.
- [13] F. A. Leckie, G. M. Lindberg: The effect of lumped parameters ob beam frequencies, The Aero. Quarterly, 14, s. 234, 1963.
- [14] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic plates, Proc. Inst. Civ. Eng., 28, s. 471, 1964.
- [15] O. C. Zienkiewicz, B. Irons, B. Nath: Natural frequencies of complex, free or submerged, structures by the finite element method, in Symposium on Vibration in Civil Engineering, London, kwiecień 1965.
- [16] D. J. Dawes: A finite element approach to plate vibration problems, J. Mech. Eng. Sci., 7, s. 28, 1965.
- [17] R. J. Guyan: Distributed mass matrix for plate elements in bending, J.A.I.A.A., 3, s. 567, 1965.
- [18] G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Triangular elements in plate bending — conforming and non-conforming solutions, Proc. Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
- [19] R. G. Anderson, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Vibration and Stability of plates using finite elements, Int. J. Solids Struct., 4, s. 1031—1055, 1968.
- [20] R. G. Anderson: The application of the non-conforming triangular plate bending element to plate vibration problems, M. Sc. thesis, University of Wales, Swansea, 1966.
- [21] O. C. Zienkiewicz: Discussion of Earthquake Behaviour of reservoir-dam systems, by A. K. Chopra, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 95, EM8, s. 801—803, 1969.
- [22] O. C. Zienkiewicz, R. E. Newton: Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid, Proc. Int. Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart, 1969.
- [23] P. A. A. Back, A. C. Cassell, R. Duggar, R. T. Severn: The seismic study of double curvature dam, Proc. Inst. Civ. Eng., 43, s. 217—248, 1969.
- [24] R. S. Sandhu, E. L. Wilson: Finite element analysis of seepage in elastic media, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., RM1, s. 641—651, 1969.
- [25] J. L. Serafini: Rock Mechanics and Eng. practice, ed. K. G. Stag and O. C. Zienkiewicz, J. Wiley & Son, 1968.
- [26] J. Crochet, P. M. Naghdi: On constitutive equations for flow of fluid through an elastic solid, Int. J. Engineering Science, 4, s. 383—401, 1966.
- [27] M. Biot: General theory of three dimensional consolidation, J. Appl. Phys., 12, s. 155—164, 1941.
- [28] I. Fried: Finite element analysis of time dependent phenomena. Int. Report Stuttgart Univ. 1969.
- [29] M. Gurtin: Variational principles for linear elastodynamics, Arch. for Rational Mech. and Analysis, 16, s. 34—80, 1969.
- [30] K. Washizu: Variational methods in elasticity and plasticity, s. 2—3, Pergamon Press, 1968.
- [31] E. L. Wilson, R. W. Clough: Dynamic response by step by step matrix analysis, Symp. on Use of Computers in Civil Eng., Lisbon, październik 1962.
- [32] S. P. Chan, N. L. Cox, W. A. Benfield: Transient analysis of forced vibrations of complex structural-mechanical systems, J. Roy. Aero. Soc., 66, s. 457—460, 1962.
- [33] A. Haji-Sheikh, E. M. Sparrow: Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid, Trans. ASME 111, 88, s. 331—333, 1966.
- [34] C. Perekh: Ph. D. thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1969.



- [35] *C. Taylor, C. J. Parikh, C. Peters*: Numerical analysis of linear flow surface seepage problems. *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.* (to be published).
- [36] *R. Herbert, K. R. Ruchton*: Groundwater flow studies by resistance networks. *Geotechnique*, 16, s. 53–75, 1966.
- [37] *S. P. Neuman, P. A. Witherspoon*: Finite element method of analyzing steady seepage with a free surface. *Water Resources Res.*, 6, nr 3, 889, 1970a.
- [38] *S. P. Neuman, P. A. Witherspoon*: Variational principles for confined and unconfined flow of groundwater. *Water Resources Res.*, 6, nr 5, 1970 b.
- [39] *I. Javandel, P. A. Witherspoon*: Application of the finite element method to transient flow in porous media. *Soil. Pet. Eng. J.*, s. 241–252, sierpień, 1968.
- [40] *W. Hurty*: Dynamic analysis of structural systems using component modes. *J.A.I.A.A.*, 6, lipiec 1968.
- [41] *R. H. Gallagher, R. H. Mallett*: Efficient solution processes for finite element analysis of transient heat conduction. *Bell Aerosystems*, Buffalo, 1969.
- [42] *O. C. Zienkiewicz, C. J. Parikh, H. J. Wills*: The application of finite elements to heat conduction problems involving latent heat (to be published).

## 17. Problemy przestrzenno-czasowe. Postępowanie półanalizyczne. Drgania i wartości własne

### 17.1. Wstęp

W rozdziale 13 pokazaliśmy sposób, w jaki można uprościć pewne zagadnienia, w których własności badanego obiektu nie ulegają zmianie względem określonych współrzędnych, eliminując te współrzędne z rozważań przez zastosowanie funkcji ortogonalnych. Takie postępowanie stosowano od dawna do zagadnień zawierających współrzędną czasu; stanowi ono podstawę liniowej teorii drgań. W niniejszym rozdziale rozpoczniemy badania od zdyskretyzowanego równania otrzymanego w poprzednim rozdziale w postaci (16-13)

$$[K]\{\delta\} + [C]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\} + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} + \{F(t)\} = 0. \quad (17-1)$$

Równanie to stosuje się do wszystkich omawianych tu zagadnień, zakładając jedną z macierzy (lub więcej) równą zero. Także i zagadnienie sprzężone można zredukować, poprzez eliminację, do powyższej postaci.

### 17.2. Rozwiązanie podstawowego równania dynamicznego przy okresowym wzbudzeniu

Niech człon „obciążeniowy”  $\{F\}$  będzie w postaci

$$\{F(t)\} = \{F_0\}e^{it}, \quad (17-2)$$

gdzie  $\{F_0\}$  nie zależy od czasu.

Jeżeli założymy rozwiązanie dla  $\{\delta\}$  zgodnie z zależnością

$$\{\delta(t)\} = \{\delta_0\}e^{it}, \quad (17-3)$$

wówczas po podstawieniu do równania (17-1) otrzymamy

$$([K] + a[C] + a^2[M])\{\delta_0\} + \{F_0\} = 0. \quad (17-4)$$

Rozwiązanie równania (17-4) dla  $\{\delta_0\}$  daje możliwą postać drgań konstrukcji wzbudzonej, jeżeli warunki początkowe na  $\{\delta\}$  są spełnione.

Jeżeli założymy, że  $a$  jest wielkością urojoną  $a = i\omega$ , wtedy

$$e^{at} = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (17-5)$$

i wyrażenie (17-2) przedstawia wzbudzenie okresowe.

Ogólnie biorąc, zarówno  $\{F_0\}$  jak i  $\{\delta_0\}$  mogą być zespolone; wtedy równanie (17-4) można traktować jako układ dwu równań, otrzymanych z przyrównania części rzeczywistych i urojonych. Zatem gdy

$$\begin{aligned} \{F_0\} &= \{\overline{F_0}\} + i\{\overline{F_0}\}, \\ \{\delta_0\} &= \{\overline{\delta_0}\} + i\{\overline{\delta_0}\}, \end{aligned} \quad (17-6)$$

gdzie wielkości z kreską są rzeczywiste, mamy dwa równocześnie spełnione równania, zapisane w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2[M] & -\omega[C] \\ -\omega[C] & [K] - \omega^2[M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\overline{\delta_0}\} \\ \{\overline{\delta_0}\} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \{\overline{F_0}\} \\ \{\overline{F_0}\} \end{bmatrix} \quad (17-7)$$

Równania (17-7) tworzą układ, w którym wszystkie wielkości są rzeczywiste i którego rozwiązanie można otrzymać bez trudu. Układ ten jednak nie jest już dodatnio określony, chociaż pozostaje symetryczny.

Przy okresowym wzbudzeniu rozwiązanie nie jest „wrażliwe” na warunki początkowe, poza okresem przejściowym na początku, i dlatego przedstawia ono ostateczny stan ustabilizowany. Rozwiązanie to jest ważne dla zagadnień dynamicznych budowli, jak też dla zagadnień przewodnictwa cieplnego; w tych istotnych zakłada się po prostu

$$[M] = 0.$$

### 17.3. Drgania własne

Jeżeli w równaniu (17-1) macierz  $[C]$  jest zerem, tzn. problem dynamiczny nie zawiera tłumienia, i jeżeli brak jest czynnika  $\{F\}$ , wówczas równanie to upraszcza się do postaci

$$[K]\{\delta\} + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} = 0. \quad (17-8)$$

Rozwiązanie w części rzeczywistej jest teraz następujące

$$\{\delta\} = \{\delta_0\} \cos \omega t.$$

Istnieje ono, gdy

$$([K] - \omega^2[M])\{\delta_0\} = 0. \quad (17-9)$$

Rozwiązanie takie jest możliwe tylko dla pewnych określonych wartości  $\omega$ , dla których wyznacznik macierzy w nawiasie jest zerem. Ponieważ wyznacznik ten jest rzędu  $n$  (gdy macierze mają wymiar  $n \times n$ ), istnieje na ogół  $n$  pierwiastków będących rzeczywistymi wartościami  $\omega^2$ . Pierwiastki te określają drgania własne układu. Zagadnienie wyznaczania  $\omega$  nazywa się wyznaczaniem wartości własnych i polega na rozwiązaniu równania [1]

$$\det |[K] - \omega^2[M]| = 0. \quad (17-10)$$

W dziedzinie drgań mechanicznych pierwiastki powyższego równania są rzeczywiste.

Każda wartość własna (częstotliwość) spełniająca równanie (17-10) określa wektor  $\{\delta_0\}_n$ , w którym składowe zachowują stały stosunek wzajemny, lecz wartości każdej z nich mogą być dowolne. Wektory te określają tzw. postacie drgań układu.

W praktyce wygodnie jest skalować powyższe wektory tak, że

$$\{\delta_0\}_i^T [M] \{\delta_0\}_i = I \text{ (macierz jednostkowa)} \quad (17-11)$$

określają one wtedy tzw. unormowane postacie drgań układu.

Inną ważną własnością tych wektorów jest to, że dla dwu różnych częstotliwości  $i \neq j$  zachodzi związek

$$\{\delta_0\}_i^T [M] \{\delta_0\}_j = 0. \quad (17-12)$$

Własność ta nosi nazwę ortogonalności postaci [1].

Należy zauważyć, że macierz  $([K] - \omega^2[M])$  występuje w rozwiązaniu układu podanego drganiom wymuszonym (17-7). Jak wiadomo, gdy  $\omega$  zbliża się do częstotliwości własnej, drgania wzrastają i zachodzi zjawisko rezonansu.

## 17.4. Rozwiązanie problemu wartości własnych

### 17.4.1. Uwagi ogólne.

Stosowanie rozwinięcia wyznacznika podanego w równaniu (17-10) w wielomiany w celu znalezienia wartości własnych nie jest wygodne. Istnieją na to inne sposoby. Dyskusja ich została przedstawiona w pracach [1], [2]. Są też opracowane programy biblioteczne do obliczeń wartości własnych.

W większości procesów obliczeniowych punktem wyjścia do rozwiązania zagadnienia wartości własnych jest zależność

$$[H]\{X\} = \lambda\{X\}, \quad (17-13)$$

gdzie  $[H]$  — macierz symetryczna, dodatnio określona.

Równanie (17-9) może być napisane w postaci

$$[K]^{-1}[M]\{\delta_0\} = \lambda\{\delta_0\}. \quad (17-14)$$

Po odwróceniu  $[K]$  przy  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$  na ogół symetria zanika.

Jeżeli jednak zapiszemy macierz  $[K]$  i jej odwrotność  $[K]^{-1}$  w postaci

$$[K] = [L][L]^T, \quad [K]^{-1} = [L]^{T-1}[L]^{-1},$$

gdzie  $[L]$  jest macierzą mającą ponad główną przekątną same zera, otrzymamy po pomnożeniu równania (17-14) przez  $[L]^T$

$$[L]^{-1}[M]\{\delta_0\} = \lambda[L]^T\{\delta_0\}. \quad (17-15)$$

Oznaczając

$$[L]^T\{\delta_0\} = \{X\} \quad (17-16)$$

otrzymujemy wreszcie

$$[H]\{X\} = \lambda\{X\},$$

gdzie

$$[H] = [L]^{-1}[M]([L]^{-1})^T. \quad (17-17)$$

Równanie to ma postać (17-13), ponieważ  $[H]$  jest symetryczne.

Po określeniu  $\lambda$  (lub tylko kilku wybranych największych jego wartości, odpowiadających drganiom podstawowym) łatwo już znaleźć postacie  $\{X\}$ , a stąd, poprzez (17-15), wektory  $\{\delta_0\}$ .

**17.4.2. Drgania swobodne.** W zagadnieniach statycznych wprowadziliśmy zawsze odpowiednią liczbę warunków *podporowych*, aby umożliwić odwrócenie macierzy  $[K]^{-1}$ , a zatem jednoznacznie rozwiązać równania statyki (por. rozdz. 1). Jeżeli takie warunki podparcia w rzeczywistości nie istnieją, jak np. ma to miejsce w rakiecie zawieszonyj w przestrzeni, wówczas ustala się minimalną liczbę warunków pozwalającą na rozwiązanie statyczne, nie wpływające na naprężenia. W zagadnieniach dynamicznych takie ustalenie nie jest dopuszczalne; często też mamy do czynienia z zagadnieniem drgań swobodnych, dla których  $[K]$  jest macierzą osobliwą, a zatem nie mającą odwrotności.

Aby umożliwić i w tym przypadku zastosowanie metody ogólnej, omówionej powyżej, zaproponowano prosty wybieg. Równanie (17-9) modyfikujemy następująco

$$([K] + \alpha[M]) - (\omega^2 + \alpha^2)[M]\{\delta_0\} = 0, \quad (17-18)$$

gdzie  $\alpha$  — dowolna stała o wartości tego samego rzędu co poszukiwane  $\omega^2$ .

Nowa macierz  $([K] + \alpha[M])$  może być odwrócona i dalej traktowana w zwykły sposób. To proste, lecz efektywne postępowanie, pozwalające ominąć poważne trudności, było zaproponowane przez *Coxa* [3].

**17.4.3. Uproszczona metoda wyznaczania wartości własnych.** Jakiegokolwiek metody użylibyśmy do wyznaczania wartości własnych i postaci własnych układu dla danego wymiaru zadania, to udział maszyny będzie o rząd wielkości większy od niezbędnego do rozwiązania równoważnego zadania statycznego. Szczęśliwym zbiegiem okoliczności w problemach dynamicznych można otrzymać dostatecznie dobre przybliżenia dla mniejszej liczby stopni swobody od niezbędnej do rozwiązania statycznego.

Jeżeli do rozwiązania statycznego zastosowano drobny podział na elementy, wówczas można wyeliminować pewną liczbę stopni swobody przez „zebranie” mas i uwzględnienie tłumienia w zredukowanej liczbie parametrów węzłowych. Sposób takiego postępowania został zaproponowany przez *Ironsę* [4], [5], a następnie przez *Guyana* [6]. Na uwagę zasługuje tu podobieństwo do koncepcji nulelementu przy badaniu podziału, opisanej w rozdz. 7.

Podzielimy całkowitą liczbę parametrów układu  $\{\delta\}$  na dwie części

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (17-19)$$

i założmy, że parametry  $\delta_j$  zależą w pewien jednoznaczny sposób od parametrów  $\delta_i$ . Te ostatnie nazwiemy zatem „niezależnymi”, a te pierwsze — „zależnymi” zmiennymi. Tak więc

$$\{\delta_j\} = [L]\{\delta_i\} \quad (17-20)$$

oraz

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} \{\delta_i\}, \quad (17-21)$$

gdzie  $[L]$  — macierz określająca powyższą zależność.

Równanie dynamiczne dla całego układu

$$[K]\{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} = 0$$

zostanie zredukowane wskutek ograniczenia swobody odkształcenia, wynikającego z (17-21). Redukcji można dokonać najlepiej poprzez minimalizację całkowitej energii potencjalnej układu ze względu na zredukowaną liczbę parametrów.

W rozdziale 2 pokazano, że ta energia potencjalna może być zapisana, przy uwzględnieniu zasady *d'Alemberta*, w postaci

$$\chi = \{\delta\}^T [K] \{\delta\} + \left( [M] \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} \right)^T \{\delta\}. \quad (17-22)$$

Po przekształceniach mamy

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\delta_i\}} = [K'] \{\delta_i\} + [M'] \{\ddot{\delta}_i\} = 0, \quad (17-23)$$

gdzie:

$$[K] = \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^T [K] \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} \quad (17-24)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^T [M] \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}, \quad \delta_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta_i,$$

co odpowiada zmniejszonej liczbie stopni swobody związanej z  $\{\delta_i\}$ .

Należy teraz znaleźć sposób sensownego określenia związku między „zależnymi” a „niezależnymi” parametrami. Wygodne założenie, które można sprawdzić w oparciu o intuicję inżynierską, polega na tym, że ogólna postać odkształcenia powinna odpowiadać postaci otrzymanej przez wprowadzenie przemieszczeń  $\{\delta_i\}$  do nieobciążonego układu. Zatem pisząc podobnie do (7-18)

$$[K]\{\delta\} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (17-25)$$

otrzymamy

$$[K_{ii}]\{\delta_i\} + [K_{jj}]\{\delta_j\} = 0, \quad (17-26)$$

ponieważ węzły  $j$  są nieobciążone, oraz

$$\{\delta_j\} = -[K_{jj}]^{-1}[K_{ji}]\{\delta_i\}$$

lub

$$[L] = -[K_{jj}]^{-1}[K_{ji}]. \quad (17-27)$$

Zastosowanie tego sposobu jest wyczerpująco opisane w pracach [7], [8].

Tabela 17.1

Porównanie teoretycznych i doświadczalnych wartości drgań własnych prostokątnej płyty wspornikowej o stałej grubości ( $a$  — długość,  $a/2$  szerokość płyty)

Postać drgań	$\omega\sqrt{D}/\rho h a^2$					
	Wyniki Bartona		Doświadczenia Plunketta	Elementy skończone trójkątne „niedostosowane” <sup>*)</sup>		
	metoda Ritz’a	doświadczenia		2x1 4 elem.	4x2 16 elem.	2x8 na połowie płyty, odpow. 64 elem.
1	3,47	3,42*	3,50	3,39	3,44	3,44 s
2	14,93	14,52*	14,50	15,30	14,76	14,77 a
3	21,26	20,86	21,70	21,16	21,50	21,50 s
4	48,71	46,90	48,10	49,47	48,28	48,19 a
5			60,50	67,46	60,56	60,56 a
6			92,30		88,84	91,79 s
7	94,49	93,99	92,80		92,24	92,78 a
8			118,70		117,72	119,34 s
9			125,10		118,96	124,23 s
10			154,00			153,15 a
11			176,00			174,56 s
12			196,00			199,61 s

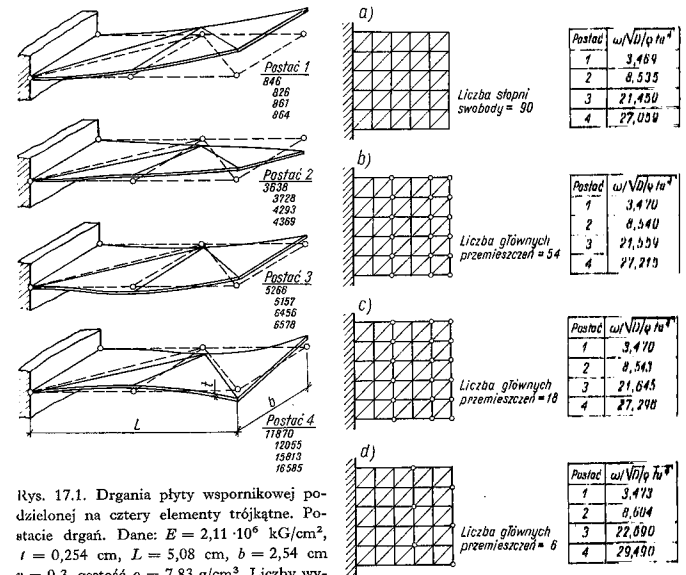
\*) Wyniki zostały skorygowane przez Bartona dla uzyskania zgodności z doświadczeniami przez niego przeprowadzonymi;  $s$  oznacza symetryczną postać drgań,  $a$  — antysymetryczną.

## 17.5. Przykłady obliczenia wartości własnych

Szereg różnych problemów zostało już rozwiązanych efektywnie. Omówimy tylko niektóre.

**17.5.1. Drgania płyt.** Na rysunku 17.1 pokazano postacie drgań prostokątnej płyty wspornikowej, znalezione przy podziale zaledwie na cztery elementy trójkątne. Wyniki porównano z obszernym obliczeniem wykonanym przez Bartona [9]. Zauważmy, że wyniki uzyskane przy pomocy prostych „niedostosowanych” trójkątów są tutaj lepsze od uzyskanych przez bardziej rozbudowane sformułowania, a dokładność jest dość znaczna zarówno dla częstotliwości jak i dla postaci drgań.

Szczegółowy wykaz otrzymanych wyników przy zastosowaniu trójkątów „niedostosowanych” przy różnych siatkach podziału podano w tabl. 17.1 [7].



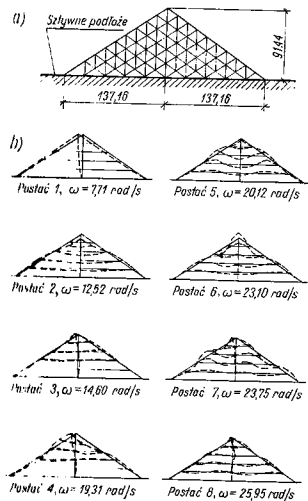
Rys. 17.1. Drgania płyty wspornikowej podzielonej na cztery elementy trójkątne. Postacie drgań. Dane:  $E = 2,11 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>,  $t = 0,254$  cm,  $L = 5,08$  cm,  $b = 2,54$  cm  $\nu = 0,3$ , gęstość  $\rho = 7,83$  g/cm<sup>3</sup>. Liczby wypisane w kolejności są wartościami częstotliwości obliczonymi na podstawie: 1) rozwiązania ścisłego [9], 2) trójkątów „niedostosowanych”, 3) trójkątów „dostosowanych” przy użyciu funkcji  $L$ , 4) funkcji  $L$  i jej pochodnej

Rys. 17.2. Eliminacja zmiennych dla drgającej wspornikowej płyty kwadratowej: a) płyta bez eliminacji, b) wyeliminowano węzły bez kółek, c) i d) wyeliminowano wszystkie stopnie swobody z wyjątkiem przemieszczeń poprzecznych węzłów oznaczonych kółkami

Podobny problem przedstawiono na rys. 17.2, gdzie zbadano efekt zastosowania uproszczonej metody wyznaczania wartości własnych.

Widać, jak bardzo małe różnice uzyskuje się w przypadku pierwszych czterech częstotliwości przy ograniczeniu liczby stopni swobody z 90, poprzez szereg stopni redukcji, aż do sześciu.

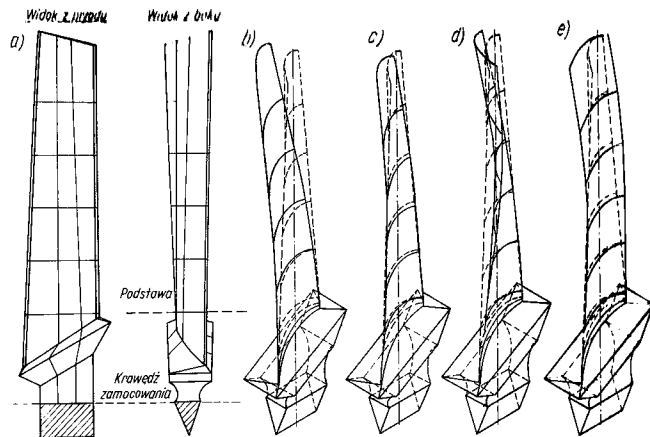
**17.5.2. Drgania tarcz.** Na rysunku 17.3 przedstawiono rozwiązany przez Clougha i Chopra problem drgań płaskiego przekroju zapory ziemnej [10]. Zastosowano proste elementy trójkątne.



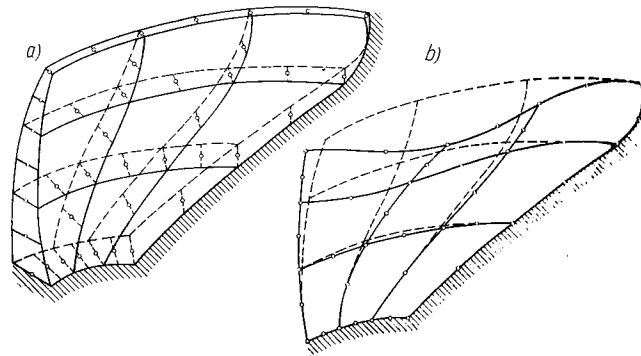
Rys. 17.3. Zapora ziemna: a) siatka elementów skończonych zastosowana do obliczenia zapory, b) postacie i częstotliwości drgań swobodnych zapory obliczone przez Clougha i Chopra [10]

**17.5.3. Drgania powłok.** Oczywiście możliwe jest zastosowanie opisanych poprzednio sposobów do dowolnego problemu sprężystego dwu- lub trójwymiarowego. Drgania powłok są tego typowym przykładem. Na rys. 17.4 pokazano — w przeciwieństwie do poprzedniego prostego przykładu — złożone elementy grubościennie (opisane w rozdz. 14) zastosowane do obliczenia drgań łopatki turbiny. Na rys. 17.5 przedstawiono ten sam typ elementów w zastosowaniu do analizy dynamicznej zapory łukowej.

Inne przykłady badań dynamicznych powłok podają w pracach [13]–[16]. W pracy [7] pokazano także pewne zastosowania przy wykorzystaniu trójwymiarowych elementów izoparametrycznych.



Rys. 17.4. Drgania łopatki turbiny: a) siatka elementów zastosowana do obliczeń, b) postać 1 (pierwsze wychylenie); częstotliwości: pomierzone 517 Hz, obliczone 518 Hz, c) postać 2 (pierwsze skrzywienie); częstotliwości: pomierzone 1326 Hz, obliczone 1692 Hz, d) postać 3 (pierwsze skręcenie); częstotliwości: pomierzone 2885 Hz, obliczone 2686 Hz, e) postać 4 (drugie wychylenie); częstotliwości: pomierzone 2510 Hz, obliczone 2794 Hz



Rys. 17.5. Drgania zapory łukowej: a) siatka  $3 \times 3$  parabolicznego grubościennego wycinka powłoki zastosowana do obliczenia zapory, b) postać 1 drgań własnych zapory; częstotliwość 2,2 Hz

**17.5.4. Równanie falow. Problemy elektromagnetyczne i fale w cieczech.** Równanie problemu dynamicznego (17-1) można wyprowadzić z rozważań nad różnymi problemami typu nie budowlanego. Było to pokazane w poprzednim rozdziale.

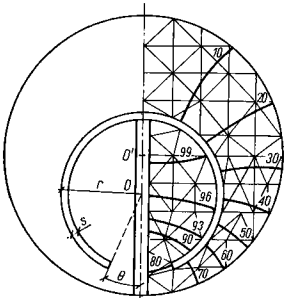
Zagadnienie wartości własnych związane jest z występowaniem macierzy „mas” i „sztywności”, mających obecnie inne znaczenie fizyczne.

Postacią szczególną omawianych poprzednio równań jest znane równanie falow. W postaci dwuwymiarowej jest ono następujące

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (17-28)$$

Jeżeli warunki brzegowe nie powodują wymuszenia, wówczas mamy do czynienia z problemem wartości własnych. Występuje on w licznych zagadnieniach różnych działów fizyki.

Pierwsze zastosowanie dotyczy pól elektromagnetycznych. Na rys. 17.6 pokazano postać pola dla problemu falowodu. Zastosowano tu proste elementy trójkątne. W pracy [17] podano bardziej złożone zagadnienie oscylacji trójwymiarowej.



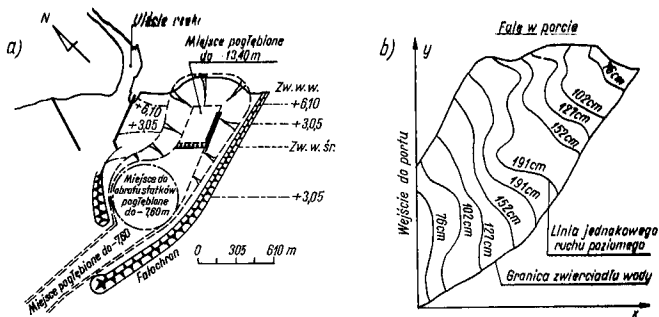
Rys. 17.6. T-dzielny falowód półkieszycowy. Postać H. Średnica zewnętrzna =  $d$ ,  $00' = 1,3d$ ,  $r = 0,29d$ ,  $s = 0,055d$ ,  $\theta = 22^\circ$

Podobne równanie opisuje z dość dobrym przybliżeniem zachowanie się fal powierzchniowych w osrodku wodnym

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (17-29)$$

gdzie:  $h$  — średnia głębokość wody,  $\psi$  — postać powierzchni przekroju przez osrodek wodny,  $g$  — przyspieszenie ziemskie.

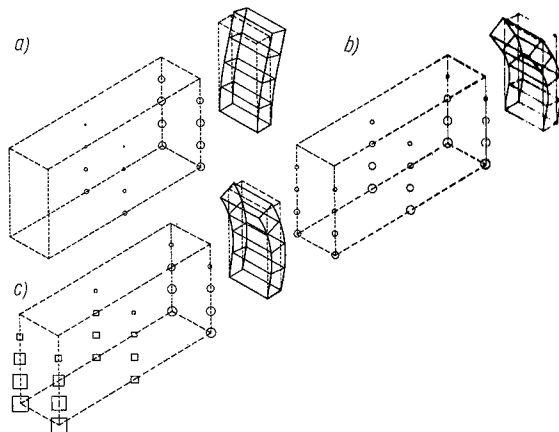
W ten sposób można łatwo znaleźć częstotliwości własne wody zawartej w basenach portowych o zmiennej głębokości [18]. Na rys. 17.7 pokazano postać pola fal dla pewnego basenu portowego.



Rys. 17.7. Falowanie w porcie naturalnym: a) plan, b) warstwicze maksymalnych wychyleń poziomych wody w czasie falowania

**17.5.5. Układy zespolone — ruch cieczy.** Teoria tego zagadnienia omówiona została w ogólnych zarysach w rozdziale poprzednim. Gdy nie ma tłumienia, rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do znalezienia wartości własnych.

Wprowadzenie do rozważań założenia o nieściśliwości cieczy powoduje po prostu konieczność uwzględnienia „dodatkowej macierzy mas”, o którą należy



Rys. 17.8. Objętość cieczy z powierzchnią swobodną falującą wraz ze ścianą. Amplitudy ciśnienia (kwadraty oznaczają przeciwny kierunek): a) postać 1; częstotliwość 9,8 Hz, b) postać 2; częstotliwość 43,6 Hz, c) postać 3; częstotliwość 53 Hz



Typowe równanie różniczkowe można zapisać w postaci

$$\omega_1^2 z_i' + 2\omega_1 c_i \frac{d}{dt} z_i' + \frac{d^2}{dt^2} z_i' = U(t), \quad (17-34)$$

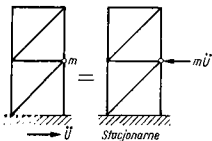
gdzie

$$z_i = R_i z_i', \quad R_i = \{\delta_{ij}\}^T [M] \{A\}. \quad (17-35)$$

Rozwiązanie równania (17-34) można zapisać następująco

$$z_i' = \int_0^t \dot{U}(t) e^{-\omega_1(t-\tau)} \sin \omega_1(t-\tau) d\tau \quad (17-36)$$

i obliczyć je dla różnych rodzajów ruchu raz na zawsze.



Rys. 17.9. Ruch podłoża a siła równoważna

Dla każdego konkretnego układu konstrukcji istotna jest znajomość czynnika  $R_i$  i każdy program dotyczący obliczenia wartości własnych należy układać tak, aby można było te czynniki uzyskać.

Dla różnych przypadków ruchów sejsmicznych zostały obliczone już takie reakcje układów o jednym stopniu swobody [typowe dla równania (17-34)]. Można zauważyć, że znaczne wartości reakcji układu występują tylko w niektórych węzłach; maksymalne reakcje w tych węzłach po zsumowaniu pozwalają określić największe możliwe reakcje układu jako całości.

### Cytowane publikacje

- [1] S. H. Crandall: Engineering Analysis, McGraw-Hill, 1956.
- [2] J. H. Wilkinson: The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford Univ. Press, 1965.
- [3a] H. L. Cox: Vibration of missiles, Aircraft Eng., 33, s. 2-7 i 48-55, 1961.
- [3b] A. Teming: Natural vibration of a free structure, Aircraft Eng., 34, s. 81-83, 1962.
- [4] H. Irons: Eigenvalue Economisers in Vibration Problems, J. Roy. Ae. Soc., 67, s. 526, 1963.
- [5] H. Irons: Structural Eigenvalue Problems: Elimination of Unwanted Variables, J.A.I.A.A., 3, s. 961, 1965.
- [6] R. J. Guyan: Reduction of Stiffness and Mass Matrices, J.A.I.A.A., 3, s. 380, 1965.
- [7] R. G. Anderson, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Vibration and stability of plates using finite elements, Int. J. Solids and Struct., 4, s. 1031-1055, 1968.
- [8] J. N. Rausden, J. R. Stoker: Mass condensation; a semi automatic method for reducing the size of vibration problems, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, s. 333-349, 1969.
- [9] M. V. Burton: Vibration of rectangular and skew cantilever plates, J. Appl. Mech., 18, s. 129-34, 1951.
- [10] R. W. Clough, A. K. Chopra: Earthquake Stress Analysis in Earth Dams, Structures and Materials Research Report No. 65-8, Univ. of California, Berkeley, California, 1965.
- [11] S. Ahmad, R. G. Anderson, O. C. Zienkiewicz: Vibration of thick, curved, shells with particular reference to turbine blades, J. Strain Analysis, 5, 200-6, 1970.
- [12] R. G. Anderson: A finite element eigenvalue system Ph. D. thesis, University of Wales, Swansea, 1968.

- [13] J. S. Archer, C. P. Hubbard: Improved linear axis-symmetric shellfold model for launch vehicle structural response analysis, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech. Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.
- [14] J. Argyris: Continuum and Discontinuum, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech. Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.
- [15] S. Klein, R. J. Sylvester: The linear elastic dynamic analysis of shells of revolution by the matrix displacement method, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.
- [16] R. Dugard, R. T. Severn, P. R. Taylor: Vibration of plate and shell structures using triangular finite elements, J. of Strain Analysis, 2, s. 73-83, 1967.
- [17] P. L. Arlett, A. K. Bahvani, O. C. Zienkiewicz: Application of finite elements to the solution of Timoshenko's equation, Proc. I.E.E., 115, s. 1762-1869, 1968.
- [18] C. Taylor, B. S. Patil, O. C. Zienkiewicz: Harbour oscillation: a numerical treatment for undamped natural modes, Proc. Inst. Civ. Eng., 43, s. 141-155, 1969.
- [19] O. C. Zienkiewicz, B. Irons, B. Nath: Natural frequencies of complex, free or submerged structures, by the finite element method, Symp. on Vibrations in Civil Eng., Inst. Civ. Eng. London (Butterworth), 1965.
- [20] P. A. A. Bach, A. C. Casvell, R. Dugard, D. R. Gawkroger, R. T. Severn: The seismic design study of a double curvature arch dam, Proc. Inst. Civ. Eng., 43, s. 217-248, 1969.
- [21] O. C. Zienkiewicz, R. E. Newton: Coupled Vibrations of a Structure submerged in a compressible fluid, Int. Symposium on finite element techniques, Stuttgart, 1969.
- [22] J. Holbeche: Ph. D. Thesis. Univ. of Wales, Swansea, 1970.
- [23] B. M. Irons: Role of part-inversion in fluid structure problems with mixed variables, J. A.I.A.A., 1970.
- [24] G. W. Housner: Behaviour of structure during earthquakes, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 85, EM4, s. 110-120, 1959.
- [25] O. C. Zienkiewicz, R. G. Anderson, B. Irons: Buttress dam analysis for earthquake loads, Water Power, s. 359-361, 1967.



## 18. Nieliniowość materiału, plastyczność, pełzanie, nieliniowe problemy pola

### 18.1. Wstęp

We wszystkich dotychczasowych rozważaniach mieliśmy do czynienia z liniowymi równaniami różniczkowymi opisującymi badane zagadnienie. Prowadziły one do standardowych form kwadratowych funkcjonału. W mechanice ciała sprężystego było to wynikiem:

- a) liniowej zależności pomiędzy odkształceniem i przemieszczeniem (2-2),
- b) liniowego związku pomiędzy naprężeniem i odkształceniem (2-3).

W rozważanych zagadnieniach pola podobna liniowość wprowadzana była poprzez takie stałe, jak przepuszczalność  $k$ , niezależna od wariacji nieznanego potencjału  $\phi$  (15-1).

Istnieje jednak szereg problemów o znaczeniu praktycznym, których nie można opisać równaniami o charakterze liniowym. Konieczne jest więc rozciągnięcie omawianych metod również i na te problemy. Należy do nich zbiór zagadnień *mechaniki ciała stałego*, obejmujący zjawiska plastyczności, pełzania lub inne *stosowane związki reologiczne*, nie dające się ująć prostymi równaniami liniowymi teorii sprężystości.

Podobnie w zagadnieniach przepływów do nieliniowości prowadzą: zależność lepkości od rozkładu prędkości, niemożliwość stosowania prawa *Darcy'ego* do przepływów turbulentnych w ośrodku porowatym, zależność przenikalności magnetycznej od gęstości prądu itp. Nieliniowość ta wynika z właściwości fizycznych materiału.

Wymienione klasy problemów można rozważać bez potrzeby ponownego formułowania zagadnienia, tj. bez potrzeby uciekania się do przepisywania podstawowych postulatów wariacyjnych. Jeżeli do rozwiązania zadania liniowego można dojść poprzez określone procesy iteracyjne, w których w końcowym stadium zmodyfikowane zostaną własności materiału tak, aby spełniały one nowe prawo reologiczne, wówczas otrzymamy właściwe rozwiązanie.

Jeżeli jednak np. związek pomiędzy naprężeniami i odkształceniami nie jest liniowy, to niezbędne jest bardziej dogłębne przekształcenie zagadnienia. Zagad-

nieniu takie rozważania w rozdz. 19. Trzeba jednak zauważyć, że podstawowe procesy iteracyjne pozostają nie zmienione, kombinacja więc obu typów nieliniowości da się łatwo przeprowadzić.

Zauważmy jeszcze, że podczas gdy w problemach liniowych rozwiązanie było zawsze jednoznaczne, to w wielu problemach nieliniowych tak nie jest. Może się okazać np., że uzyskane rozwiązanie nie jest rozwiązaniem poszukiwanym. Fizyczne spojrzenie na istotę zagadnienia i, w pewnych sytuacjach, stopniowane „niewielkimi krokami” wzrastające przybliżenie mogą stanowić podstawę do uzyskania odpowiedzi, mającej sens fizyczny.

Zastosowane sposoby iteracyjne mogą być czasem interpretowane jako procesy „czystej analizy numerycznej” typu *Newtona-Raphsona* itd. I tutaj jednak znów niezbędne jest fizyczne spojrzenie na istotę problemu. Udane metody postępowania raczej pochodzą od inżynierów lub fizyków niż od matematyków.

## 18.2. Fizyczna strona zagadnienia

**18.2.1. Podstawy.** W liniowych zagadnieniach teorii sprężystości dotyczących małych odkształceń, w sformułowaniu przemieszczeniowym, dochodziliśmy zawsze do ostatecznego równania (rozdz. 1 i 2)

$$[K]\{\delta\} - \{R\} = 0, \quad (18-1)$$

w którym wektor  $\{R\}$  obejmuje wszystkie siły od obciążeń zewnętrznych, naprężeń, odkształceń początkowych itd.

W powyższym sformułowaniu założono dodatkowo ważność liniowego prawa reologicznego

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (18-2)$$

z dodatkowymi wymaganiami liniowej zależności pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami (2-2), ciągłości przemieszczeń i przybliżonego zachowania równowagi.

W zagadnieniach, w których stosowane są nieliniowe związki reologiczne, w przypadku małych odkształceń muszą być zachowane warunki ciągłości przemieszczeń i równowagi. Zmianie ulega tylko zależność (18-2). Zamiast niej można ogólnie napisać

$$F(\{\sigma\}, \{\varepsilon\}) = 0. \quad (18-3)$$

Jeżeli rozwiązanie równania (18-1) można uzyskać poprzez zmianę jednego lub kilku parametrów  $[D]$ ,  $\{\varepsilon_0\}$  lub  $\{\sigma_0\}$  tak, że przy zastosowaniu równania (18-2) uzyskuje się takie same wartości naprężeń i odkształceń, jak i przy zastosowaniu (18-3), to uzyskane wyniki są rozwiązaniem zadania.

Oczywiście niezbędnym jest postępowanie iteracyjne.

Powstaje pytanie, którą z trzech wymienionych wielkości należy zmieniać. Zależy to od:

- metody rozwiązywania, użytej w ekwiwalentnym zagadnieniu liniowo-sprężystym,
- charakteru prawa reologicznego, definiującego związek naprężenie-odkształcenie.

Jeżeli iterację przeprowadza się zmieniając macierz  $[D]$ , to sposób taki nazwiemy sposobem *zmiennej sztywności*.

Jeżeli zmieniane są wartości  $\{\varepsilon_0\}$  lub  $\{\sigma_0\}$ , to mamy tzw. *sposoby*, odpowiednio, *początkowego naprężenia* lub *początkowego odkształcenia*.

Często w warunkach rzeczywistych nie można zapisać związku typu (18-3) dla całkowitych naprężeń lub odkształceń, ale można ustalić go dla przyrostów  $\Delta\{\sigma\}$  i  $\Delta\{\varepsilon\}$ . W takich przypadkach można zastosować przyrosty obciążenia (lub czasu w warunkach płynięcia). Takie *stopniowanie* (incremental process) można łączyć z każdym z poprzednich sposobów.

Jak widzieliśmy, przyjęcie wartości  $[D]$ ,  $\{\varepsilon_0\}$  i  $\{\sigma_0\}$  tworzy zasadniczy zestaw danych wejścia dla każdego programu dla liniowych zagadnień sprężystych. Są więc te programy podstawą dla rozwiązania każdego nowego zadania liniowego. Rzeczywiście, w tym stadium nie jest istotne, że programy zostały przygotowane na bazie dyskretyzacji za pomocą elementów skończonych; można zatem stosować je do każdego procesu dyskretyzacji (jak np. różnice skończone), o ile użyjemy tych samych danych przy poszukiwaniu rozwiązania.

**18.2.2. Sposób zmiennej sztywności.** Jeżeli związek (18-3) opisujący zachowanie się pewnego szczególnego materiału może być zapisany w postaci (18-2) z tym, że macierz sprężystości jest teraz funkcją odkształcenia, tj.:

$$[D] = [D(\{\delta\})] = [D(\{\delta\})], \quad (18-4)$$

wówczas można zastosować sposób *zmiennej sztywności*.

Ponieważ macierz sprężystości wpływa na ostateczną macierz sztywności całego układu, zajmiemy się rozwiązaniem zadania

$$\{w\} = [K(\{\delta\})]\{\delta\} - \{R\} = 0. \quad (18-5)$$

Najprostszy jest proces iteracyjny, w którym najpierw przyjmujemy  $\{\delta\}_0 = 0$  w celu wyznaczenia  $[K(\{\delta\}_0)] = [K_0]$ , po czym rozwiązujemy  $\{\delta\}_1 = [K_0]^{-1}\{R\}$  powtarzając proces dla

$$\{\delta\}_n = [K_{n-1}]^{-1}\{R\} \quad (18-6)$$

aż do zaniknięcia różnic w kolejnych wartościach przemieszczeń.

Jeżeli prawo reologiczne ma taką postać, że związek typu (18-4) można napisać tylko dla przyrostów naprężeń i odkształceń, to wtedy postępowanie należy dostosować do małych przyrostów obciążenia, wychodząc z opisanych poprzednio zależności.

W każdym przypadku można zastosować standardowy program dla sprężystości liniowej, o ile postać  $[D]$  otrzymana dla naszego zadania jest symetryczna. Jest to istotne, gdyż takie programy układane są zwykle przy wykorzystaniu prawa symetrii.

Poważną wadą sposobu, w którym zmienia się macierz sprężystości, jest konieczność formułowania na nowo, przy każdym kolejnym kroku, macierzy sztywności i rozwiązywania na nowo kolejnych układów równań. Jeżeli w programie stosowane są bezpośrednie metody rozwiązania, jest to skrajnie nieekonomiczne postępowanie. Dlatego wygodniejsze są odmienne sposoby, które będą opisane dalej.

**18.2.3. Sposób naprężeń początkowych.** Jeżeli prawo reologiczne ma taką postać, że pozwala na określenie stanu naprężenia przy danym odkształceniu, tj. gdy wzór (18-3) przybierze postać

$$\{\sigma\} = f(\{\varepsilon\}), \quad (18-7)$$

wówczas można doprowadzić do zgodności tego prawa z prawem liniowej sprężystości [równanie (18-2)] przez odpowiednią poprawkę wartości  $\{\sigma_0\}$ . Ponieważ  $\{\sigma_0\}$  wpływa na wartość  $\{R\}$ , pozostajemy przy iteracyjnym sposobie rozwiązywania

$$\{\psi\} = [K_0]^{-1} \{\delta\} - R(\{\delta\}) = 0, \quad (18-8)$$

który przeprowadzamy następująco.

Rozwiązujemy

$$\{\delta_0\} = [K_0]^{-1} \{R_0\},$$

gdzie  $\{R_0\}$  odpowiada aktualnie przyłożonym obciążeniom. Określamy stan  $\{\sigma_0\}_1$  jako niezbędny, aby rozwiązanie sprężyste pokrywało się z prawdziwymi naprężeniami, odpowiadającymi osiągniętemu stanowi odkształcenia, skąd znajdujemy  $\{R\}_1$ . Otrzymujemy zatem

$$\{\delta_1\} = [K_0]^{-1} \{R_1\} \text{ itd.},$$

aż do

$$\{\delta_n\} = [K_0]^{-1} \{R_n\}, \quad (18-9)$$

gdopóki różnice nie staną się znikomo małe.

Dobrodną alternatywą tego sposobu jest określenie tylko zmian  $\{R\}$  pochodzących od wymaganych zmian początkowego naprężenia. Stosując to znajdziemy jak poprzednio przyrosty

$$\Delta\{\delta_1\} = [K_0]^{-1} \Delta\{R_1\} \text{ itd.}$$

Proces iteracji należy prowadzić aż do uzyskania  $\Delta\{\delta_n\}$  dostatecznie bliskich zeru.

Numerycznie ta alternatywa jest bardzo wygodna, ponadto zaś ma określone znaczenie fizyczne. W każdym stadium dla każdego punktu układu określamy różnicę między rzeczywistym naprężeniem odpowiadającym danemu odkształceniu a naprężeniem odpowiadającym rozwiązaniu sprężystemu. Tę różnicę rozkładamy

następnie tak, przy uwzględnieniu prawa sprężystości, aby zachować równowagę. Proces ten pierwotnie nazwano procesem „przenoszenia naprężeń” [1].

Zauważmy, że tutaj w każdym stadium iteracji używana jest ta sama macierz sztywności i gdy zostanie ona raz odwrócona każda następna iteracja wymaga już tylko małego ułamka czasu, potrzebnego do uzyskania pierwszego rozwiązania.

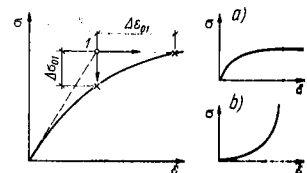
Powstaje pytanie, jakie stałe sprężyste powinny być przyjęte dla pierwszego obliczenia macierzy  $[K_0]$ . Jeżeli materiał zachowuje się w zasadzie jako sprężysty, z małymi tylko lokalnymi odchyleniami od liniowości, wówczas słuszne będzie przyjęcie do tego obliczenia początkowych stałych sprężystości. Jeżeli jednak nieliniowość występuje dla wszystkich wartości naprężenia, warto będzie poprawić stałe sprężystości po pierwszej iteracji w celu przyspieszenia zbieżności.

**18.2.4. Sposób początkowych odkształceń.** W pewnych zagadnieniach, np. pełzania, nie można dokładnie określić stanu naprężeń poprzez odkształcenia. Z drugiej strony jest jednak możliwe określenie odkształceń lub ich przyrostów poprzez naprężenia. Symbolicznie

$$\{\varepsilon\} = f(\{\sigma\}). \quad (18-10)$$

Zgodność wyników z równaniami (18-10) i (18-2) można teraz uzyskać przez odpowiednie poprawienie  $\{\varepsilon_0\}$ . Równanie (18-8) będziemy znów rozwiązywać iteracyjnie, ale odkształcenia sprężyste, otrzymywane w każdym stadium iteracji, będą teraz porównywane z zależnością wyjściową (18-10), a różnice — używane do obliczenia  $\Delta\{R_n\}$ . W innych szczegółach proces ten jest identyczny z opisany poprzednio, zachowując przy tym stałość macierzy sztywności we wszystkich stadiach iteracji.

Niektóre prawa reologii (por. p. 18.7) pozwalają explicite oddzielić odkształcenia pełzania od sprężystych. W ten sposób właściwe odkształcenia początkowe w każdym stadium iteracji jest zadane. Różnicę między sposobami początkowego naprężenia a początkowego odkształcenia najlepiej zilustrujemy na rysunku. Rys. 18.1 przedstawia stan zależności (punkt I), „naprężenie-odkształcenie”, uzyskanej z pierwszego rozwiązania. W sposobie początkowego naprężenia odnosi się naprężenie do właściwego poziomu przez wprowadzenie początkowego przyrostu naprężenia  $\Delta\{\sigma_0\}_1$ , podczas gdy w procesie początkowego odkształcenia pierwotne odkształcenia poprawiane są tak, by uzyskać właściwe  $\Delta\{\varepsilon_0\}_1$ . Pierwszy proces jest, oczywiście, lepszy wtedy, gdy odkształcenia wzrastają szybko ze wzrostem naprężeń, drugi — gdy odwrotnie (materiały sztywniejące — locking materials).



Rys. 18.1. Odształcenia i naprężenia początkowe dla materiału: a) miękniejącego, b) twardniejącego

**18.2.5. Przyspieszenie zbieżności.** Zarówno w sposobie początkowego naprężenia jak i początkowego odkształcenia rozwiązanie końcowe można uzyskać wtedy, gdy właściwie odgadnie się wartości  $\{\sigma_0\}$  lub  $\{\varepsilon_0\}$ . Procesy iteracyjnego poprawiania nie zawsze muszą być szybko zbieżne. Zbieżność można przyspieszyć w czasie obliczeń przez dodatkowe poprawki na każdym stopniu iteracji. Odpowiednie postępowanie podał Irons [2], tym niemniej wiele jeszcze pozostało do zrobienia. Każdy sposób jest tutaj dozwolony, jeśli tylko rozwiązanie końcowe spełnia wszelkie postawione wymagania.

### 18.3. Matematyczna strona zagadnienia

Na obecnym etapie rozważań warto zbadać nasz problem od strony matematycznej [3]. Zakładamy, że Czytelnik zna metodę Newtona rozwiązywania równań nieliniowych w postaci

$$\psi(x) = 0.$$

Jeśli „próbna” wartość  $x_n$  okaże się wystarczająco bliska wartości dokładnej, lecz zachodzi dla niej  $\psi(x_n) \neq 0$ , poprawione rozwiązanie można otrzymać znajdując

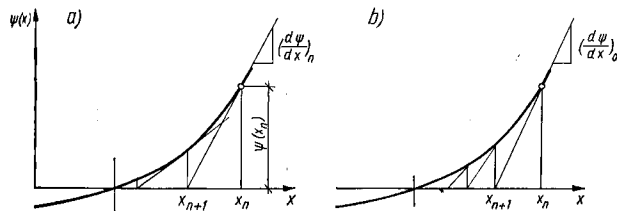
$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_{n+1}$$

z warunku

$$\Delta x_{n+1} = - \frac{\psi(x_n)}{\frac{d}{dx} \psi(x_n)}.$$

Zbieżność metody Newtona scharakteryzowana jest na rys. 18.2. Można też użyć alternatywnego sposobu, przyjmując stałą wartość  $\frac{d}{dx}(\psi)_0$  i stosując poprawki typu

$$\Delta x_{n+1} = - \frac{\psi(x_n)}{\frac{d}{dx} \psi(x_0)}.$$



Rys. 18.2. Procesy iteracyjne: a) newtonowski, b) stałej stycznej

Zbieżność tego postępowania będzie powolniejsza niż poprzednio (rys. 18.2b). Wydaje się, że procesy zmiennej i stałej sztywności, opisane ogólnie w p. 18.2, podpadają pod te dwie kategorie.

Przypomnijmy sobie teraz podstawowe sformułowanie równań metody elementów skończonych na bazie pracy wirtualnej (p. rozdz. 2). Wyprowadzenie równania (2-28) opierało się na poszukiwaniu równowagi przez badanie zmiany sił zewnętrznych i wewnętrznych. Jeżeli zatem  $\{\psi\}$  reprezentuje wektor sumy sił zewnętrznych i wewnętrznych, to możemy napisać

$$d\{\delta\}^T \{\psi\} = \int_V d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - d\{\delta\}^T \{\bar{R}\} = 0, \quad (18-11)$$

gdzie  $\{\bar{R}\}$  przedstawia wszystkie siły zewnętrzne, obliczone jak poprzednio. W przypadku gdy dla wariacji odkształceń można napisać wyrażenie

$$d\{\varepsilon\} = [B]d\{\delta\}, \quad (18-12)$$

wówczas eliminując  $d\{\delta\}^T$  otrzymamy równanie ważne dla ogólnego przypadku zależności naprężeń  $\{\sigma\}$  od osiągniętego stanu odkształceń

$$\{\psi(\{\delta\})\} = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \{\bar{R}\} = 0. \quad (18-13)$$

Dla małych przemieszczeń macierz  $[B]$  jest macierzą odkształceń zależną od współrzędnych, jak stwierdzono w rozdz. 2. Jeżeli można uzależnić  $\{\sigma\}$  od odkształceń, a zatem także od przemieszczeń, wówczas mamy do rozwiązania równanie nieliniowe

$$\psi(\{\delta\}) = 0$$

będące ogólnym sformulowaniem zagadnienia.

Rozważmy teraz wariację  $\{\psi\}$ . Jeżeli  $\{\delta\}$  podlega wariacji, wówczas

$$d\{\psi\} = \int_V [B]^T d\{\sigma\} dV. \quad (18-14)$$

ponieważ  $\{\bar{R}\}$  nie zależy od  $\{\delta\}$ .

Jeżeli teraz możemy napisać

$$d\{\sigma\} = [D_T(\{\varepsilon\})]d\{\varepsilon\}, \quad (18-15)$$

w którym  $[D_T]$  jest tzw. macierzą „styczną” lub macierzą wzrostu sprężystości, wówczas uwzględniając (18-15) i (18-12) możemy zapisać (18-14) w postaci

$$d\{\psi\} = \left( \int_V [B]^T [D_T(\{\varepsilon\})] [B] dV \right) d\{\delta\} = [K_T]d\{\delta\}. \quad (18-16)$$

Gdy teraz zastосуemy postępowanie Newtona do uzyskania rozwiązania próbnego  $\{\delta\}_n$ , którego wynikiem jest niezerowa wartość  $\{\psi\}_n$ , wtedy poprawkę do następnego przybliżenia może być zapisana jako

$$\Delta\{\delta\}_{n+1} = -[K_T]_n^{-1} \{\psi\}_n, \quad (18-17)$$

gdzie  $[K_T]_n$  — macierz styczna obliczona dla przemieszczeń i naprężeń uzyskanych dla próby  $\{\delta\}_n$ .

W sposobach początkowego naprężenia lub początkowego odkształcenia zamiast macierzy stycznej postuluje się stałą macierz sztywności (p. rys. 18.2b)<sup>1)</sup>. W ogólności będzie to wymagać większej liczby kroków iteracyjnych, jednak, jak już wspomniano, jest to prostsze, ponieważ odwracana jest tylko jedna macierz sztywności. Może się okazać, że rozsądną oszczędność uzyskuje się przez kombinowanie obu omówionych sposobów postępowania.

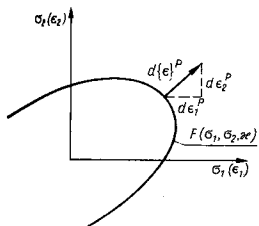
Wydaje się zatem, że we wszystkich procesach nieliniowych istotne jest bezpośrednie obliczenie wektora  $\{\psi\}$ , obrazującego całkowite niewyważenie sił. Rozwiązanie sprężyste liniowe użyte tu jest tylko jako środek do przyspieszenia zbieżności rozwiązań „próbnych”. Można też stosować wszelkie inne środki przyspieszenia zbieżności łącznie z omówionymi poprzednio. Jednym z nich jest np. uogólnienie dobrze znanej metody *Aitkena* opisane przez *Ironsa* [2].

## 18.4. Plastyczność

**18.4.1. Teoria ogólna.** Plastyczność metali, będąca szczególnego rodzaju odstępstwem od liniowej sprężystości, jest dobrze znana i z teoretycznego punktu widzenia szeroko zbadana [4] ÷ [7]. Istotą jej jest nieodwracalne odkształcenie niezależne od czasu i zachodzące tylko wtedy, gdy osiągnięty zostanie pewien stan naprężenia zwany granicą plastyczności.

**Powierzchnia płynięcia.** Postuluje się ogólnie, jako fakt doświadczalny, że płynięcie zachodzi tylko wtedy, gdy naprężenia  $\{\sigma\}$  spełniają ogólne kryterium płynięcia

$$F(\{\sigma\}, \{\kappa\}) = 0. \quad (18-18)$$



Rys. 18.3. Powierzchnia plastyczności i kryterium prostopadłości w dwuwymiarowym stanie naprężeń

Tutaj  $\kappa$  jest parametrem „wzmocnienia”. Warunek płynięcia (18-18) można przedstawić jako powierzchnię w  $n$  wymiarowej przestrzeni naprężeń, której położenie zależy od chwilowej wartości parametru  $\kappa$  (rys. 18.3).

**Prawo płynięcia (zasada normalności).** *Mises* [4] jako pierwszy sugerował związki określające przyrosty odkształcenia plastycznego względem powierzchni płynięcia.

<sup>1)</sup> Sposób początkowego naprężenia jest w rzeczywistości identyczny z tym sformulowaniem, jeżeli będziemy aproksymować  $[K_T]$  przez  $[K_0]$ .

Hcurystyczne wyznaczenie słowności zaproponowanego związku podało wielu autorów [4], [5]. W chwili obecnej na ogół uznaje się następującą hipotezę. Jeżeli  $\delta\{\varepsilon\}_p$  oznacza przyrost odkształcenia plastycznego, to

$$\delta\{\varepsilon\}_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (18-19)$$

albo dla każdej składowej

$$d\varepsilon_{n,p} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_n}$$

Tutaj  $\lambda$  jest stałym, na razie nieokreślonym, współczynnikiem. Prawo to znane jest jako *zasada normalności*, gdyż związek (18-19) można interpretować jako wymaganie prostopadłości wektora przyrostu odkształcenia plastycznego do powierzchni płynięcia w  $n$  wymiarowej przestrzeni naprężeń.

**Związki między naprężeniem a odkształceniem.** Zmiany odkształcenia podczas nieskończenie małych przyrostów naprężenia można podzielić na część sprężystą i plastyczną

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon\}_e + d\{\varepsilon\}_p. \quad (18-20)$$

Przyrosty odkształceń sprężystych związane są z przyrostami naprężenia przez macierz symetryczną  $[D]$  o stałych wyrazach. Równanie (18-20) można zatem zapisać jako

$$d\{\varepsilon\} = [D]^{-1}d\{\sigma\} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}. \quad (18-21)$$

W przypadku płynięcia plastycznego naprężenia znajdują się na powierzchni płynięcia wg wzoru (18-18). Różniczkując tę zależność otrzymamy

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0$$

lub

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T d\{\sigma\} + A d\kappa = 0, \quad (18-22)$$

gdzie

$$A = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa. \quad (18-23)$$

Równania (18-21) i (18-22) można zapisać w postaci prostej macierzy symetrycznej

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \\ & & & \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \\ & & \vdots & \\ & \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} & \dots & A \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ \vdots \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (18-24)$$

Nieokreślona stała  $\lambda$  może być wyeliminowana (należy się starać nie mnożyć przy tym lub nie dzielić przez  $A$ , które w ogólności może być zerem). Daje to w wyniku rozwinięcie *explicite*, określające zmiany naprężeń poprzez dane zmiany odkształceń

$$d\{\sigma\} = [D]_{ep}^* d\{\varepsilon\}, \quad (18-25)$$

gdzie

$$[D]_{ep}^* = [D] - [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left[ A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T, [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \right]^{-1} \quad (18-26)$$

Macierz sprężysto-plastyczna  $[D]_{ep}^*$  zajmuje teraz miejsce macierzy sprężystej  $[D]$  w analizie przyrostów. Jest ona symetryczna, dodatnio określona i zachowuje ważność niezależnie od tego, czy  $A$  przybiera wartość zerową, czy nie. Sformułowanie zagadnienia plastyczności w tej postaci podane było po raz pierwszy przez Yamadę i in. [8] oraz Zienkiewicza i in. [9].

Znaczenie parametru  $A$ . W przypadku idealnej plastyczności bez wzmocnienia parametr  $A$  jest po prostu zerem. Gdy badamy wzmocnienie, należy zwrócić uwagę na znaczenie parametru (lub parametrów)  $\kappa$ , od którego zależy aktualne położenie powierzchni płynięcia.

Dla materiałów o wzmocnieniu izotropowym (work-hardening) przyjmuje się, że  $\kappa$  przedstawia pracę, wykonaną podczas odkształcenia plastycznego. Wówczas

$$d\kappa = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \dots = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}_p. \quad (18-27)$$

Podstawiając prawo płynięcia (18-19) otrzymamy

$$d\kappa = \lambda \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}. \quad (18-28)$$

Uwzględniając (18-23) widzimy, że  $\lambda$  znika i możemy napisać

$$A = \frac{\partial F}{\partial \kappa} \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}. \quad (18-29)$$

Jest to zależność ściśle określona, gdy znamy związek między  $F$  i  $\kappa$ .

Związki *Prandtl-Reussa*. Rozważmy szczególnie przypadek ogólnie znanej powierzchni płynięcia *Misesa*. Dana jest ona przez

$$F = \left[ \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 3\sigma_4^2 + 3\sigma_5^2 + 3\sigma_6^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \bar{\sigma}, \quad (18-30)$$

gdzie wskaźniki 1,2,3 odnoszą się do składowych normalnych naprężeń a 4,5,6 — do składowych stycznych w ogólnym trójwymiarowym stanie naprężenia.

Różniczkując znajdziemy

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = \frac{3\sigma'_1}{2\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = \frac{3\sigma'_2}{2\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} = \frac{3\sigma'_3}{2\bar{\sigma}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_4} = \frac{3\sigma_4}{\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_5} = \frac{3\sigma_5}{\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_6} = \frac{3\sigma_6}{\bar{\sigma}},$$

gdzie znakami prím oznaczono naprężenia dowiatrowe, tj.

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \text{ itd.}$$

Wielkość  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\kappa)$  jest jednoosiowym naprężeniem przy płynięciu. Jeżeli dysponujemy wynikami badania jednoosiowego (na rozciąganie), z którego znany jest związek między  $\bar{\sigma}$  a jednoosiowym odkształceniem *plastycznym*  $\varepsilon_{up}$ , wtedy

$$d\kappa = \bar{\sigma} d\varepsilon_{up}$$

oraz

$$-\frac{\partial F}{\partial \kappa} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\kappa} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon_{up}} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} = \frac{H'}{\bar{\sigma}},$$

gdzie  $H'$  jest nachyleniem krzywej przy odpowiedniej wartości  $\bar{\sigma}$ . Podstawiając to do (18-29) znajdziemy po pewnych przekształceniach, że

$$A = H'. \quad (18-31)$$

To właśnie jest znany związek fizyczny *Prandtl-Reussa* między naprężeniem a odkształceniem.

Uogólnienie koncepcji powierzchni płynięcia mającej „naroża” znajdzie Czytelnik w pracy *Koitera* [6].

**18.4.2. Rys historyczny.** Z powyższego wynika, że skoro związki teorii plastyczności sformułowane są dla przyrostów poprzez (18-25) i (18-26) procesy iteracyjne *wolno stosować dla małych przyrostów obciążenia*.

W pierwszych zastosowaniach elementów skończonych do plastyczności fuworyzowano sposób *początkowego odkształcenia* (*Gallagher* i in. [10], *Argyris* [11]). Sposób ten jednak zawodzi całkowicie, jeśli badamy idealną plastyczność bez wzmocnienia, wtedy bowiem nie można jednoznacznie określić odkształceń dla żadnego stanu naprężenia. W dalszych pracach preferuje się z tego powodu raczej iterację ze zmienną sztywnością [12]–[16]. Można było zachować wówczas dostateczną oszczędność pracy maszyny, ponieważ proces iteracyjny stosowany był do rozwiązywania równań uwikłanych, wtedy zaś modyfikacja sztywności jest częścią składową procesu iteracji.

Sposób początkowego odkształcenia zastosował do plastyczności po raz pierwszy *Zienkiewicz* i in. [9]. Sposób ten wydaje się najbardziej odpowiedni dla tych celów, każdy bowiem krok odciążenia automatycznie prowadzi do stanu sprężystego. Jest to dodatkowa i ważna zaleta sposobu w przypadku obciążeń cyklicznych. W chwili pisania tej książki sposób ten jest powszechnie uznawany [17].

**18.4.3. Zastosowania.** Adaptacja metody początkowego naprężenia do zagadnień plastyczności, choć nadal rozwijana, komplikuje się przez dwa fakty:

a) związek przyrostowy „naprężenie-odkształcenie” (18-25) jest ważny tylko od chwili, gdy naprężenie osiągnie powierzchnię płynięcia  $F(\sigma) = 0$ ; dopóki  $F(\sigma) < 0$  mamy stan czysto sprężysty;

b) związek (18-25) ważny jest tylko dla małych przyrostów odkształcenia. Dla skończonych kroków mogą wystąpić odchylenia naprężeń od powierzchni płynięcia. Aby zabezpieczyć się przed tym, należy zredukować naprężenia do granicy płynięcia po każdym kroku iteracji.

W stosowanym z powodzeniem sposobie, na którym oparto pokazane dalej przykłady, postępuje się następująco:

a) przykłada się przyrost obciążenia i wyznacza odpowiadające mu przyrosty naprężenia sprężystego i odkształcenia,

b) wyznacza się wartość  $F(\{\sigma\})$  z naprężenia całkowitego znalezione pod a). Jeżeli  $F < 0$ , to mamy do czynienia ze stanem sprężystym i nie zachodzi potrzeba dalszej iteracji. Gdy  $F > 0$ , to porównuje się je z wartością  $F$  na początku rozważanego przedziału i określa się przez interpolację stosunek naprężenia sprężystego i przyrostu odkształcenia, który miał miejsce w obszarze powyżej punktu płynięcia. Z powyższego wyznacza się odpowiednie przyrosty naprężenia sprężysto-plastycznego za pomocą wzoru (18-25). Naprężenie na początku płynięcia zwiększone o ten przyrost jest teraz porównywane z poprzednio uzyskanym całkowitym naprężeniem. Różnicę traktuje się jako nowe naprężenie początkowe (korygujące),

c) wylicza się teraz odpowiednie siły residualne i otrzymuje nowe rozwiązanie sprężyste, dające inne wartości naprężenia całkowitego. Jeżeli siły te znajdują się poniżej pewnej granicy, proces zatrzymujemy. Jeżeli nie, to

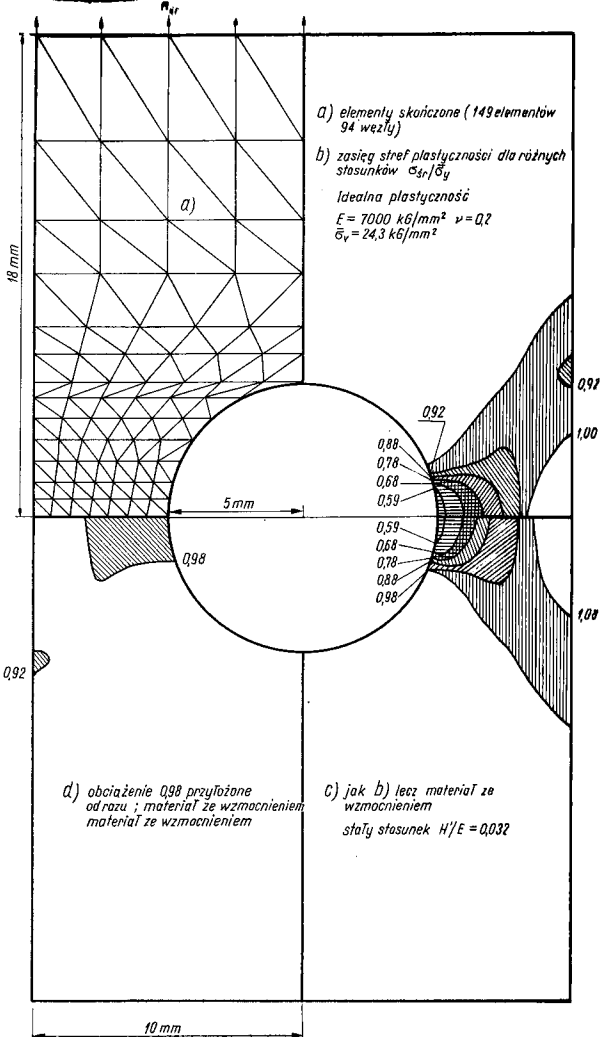
d) powtarza się kroki b) i c) itd.

Jak widać, na każdym etapie naprężenie całkowite odnosi się do powierzchni płynięcia. Macierz elastoplastyczną albo wylicza się z wartości naprężenia, dla której  $F = 0$ , albo zmienia się w miarę postępu iteracji.

W pokazanych dalej przykładach stosowano bezpośrednie postępowanie iteracyjne bez żadnego przyspieszenia; zbieżność uzyskiwano po 5÷15 cyklach. Zwolnienie lub brak zbieżności jest zwykle oznaką zniszczenia układu.

Opisane postępowanie ważne jest w ogólnym przypadku stanu trójwymiarowego. Ulega ono znacznej redukcji w zagadnieniach stanów płaskich. Dla *plaskiego stanu naprężenia* redukcja ta wynika z opuszczenia odpowiednich kolumn w równaniu (18-24), któremu odpowiadają zerowe wartości naprężenia; w przypadku *plaskiego stanu odkształcenia* wszystkie naprężenia istnieją, ale należy podstawić zerowe wartości odpowiednich składowych odkształcenia. Po dokonaniu tego uzyskamy zredukowane wyrażenia (por. np. [9]). Należy zauważyć, że w tych przypadkach wyraz na przekątnej odpowiadający wyrazowi  $A$  nie jest już zerem nawet dla idealnej plastyczności.

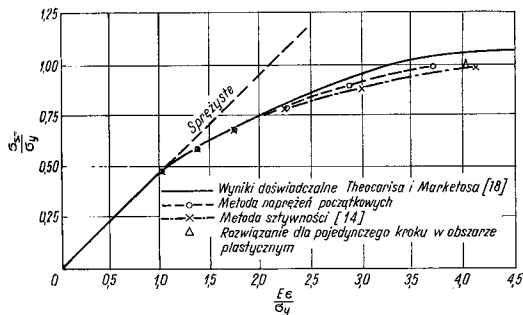
*Tarcza i płyta (z otworem) z materiału wzmacnianego lub bez wzmacnienia.* Przy rozwiązaniu tarczy (rys. 18.4) założono stan płaski naprężenia i materiał albo idealnie plastyczny albo ze wzmacnieniem. Zastosowano kryterium *Misesa*, a w przypadku wzmacnienia przyjęto stałe nachylenie jednoosiowej krzywej wzmacnienia  $H'$  (18-31). Rozległość stref plastycznych przy różnych poziomach obciążenia pokazano na rys. 18.4b i 18.4c.



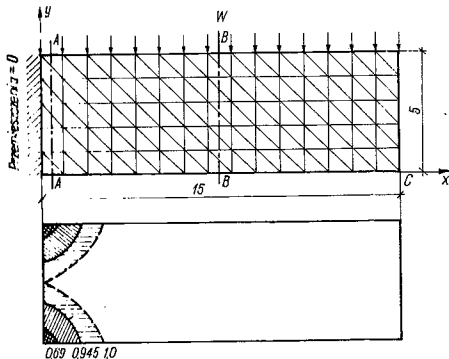
Rys. 18.4. Podział na elementy trójkątne rozciąganej tarczy oraz wyniki obliczeń

Mimo iż związek plastyczny odnowił się w miarę przystosowywania, okazało się, że gdy obciążenie zostanie przyłożone dużymi porcjami, wówczas sposób początkowego naprężenia daje zadowalające rozwiązania i to takie, które nie przekracza granicy płynięcia. Rozwiązanie takie dla bardzo dużych kroków obciążenia pokazano na rys. 18.4d. Zauważyliśmy, że mimo naruszenia prawa narastających odkształceń dla stref plastycznych otrzymano bardzo podobne wyniki.

Jeszcze bardziej godne uwagi jest to, że maksymalne odkształcenie osiągnięte w punkcie rozpoczęcia płynięcia obliczane metodą przystosów wykazuje zgodność



Rys. 18.5. Rozwój maksymalnego odkształcenia od punktu rozpoczęcia płynięcia plastycznego w płycie z otworem (materiał ze wzmocnieniem):  $l/r = 0,032$ . Przyrost obciążenia = 0,2 obciążenia odpowiadającego początkowi płynięcia plastycznego

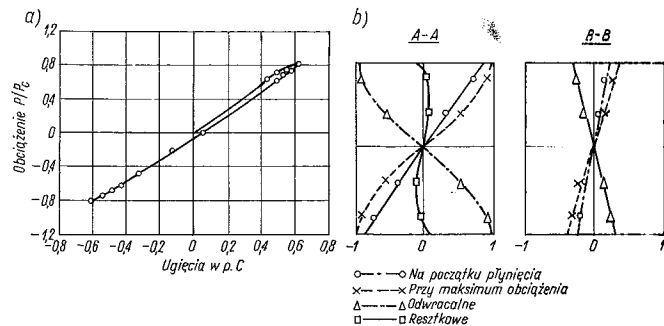


Rys. 18.6. Rozwój stref plastycznych dla różnych stosunków  $w/w_c$  w belce wspornikowej, przy założeniu płaskiego stanu naprężenia i idealnej plastyczności,  $w_c$  — obciążenie niszczące obliczone z teorii belki plastycznej; lewy koniec całkowicie utwierdzony

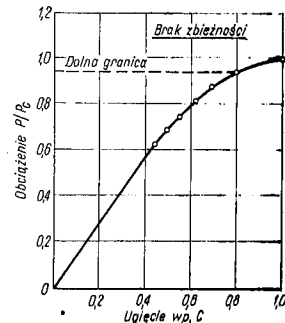
z wynikami doświadczałnymi [18], a także wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu sposobu zmiennej wtywności [14] (rys. 18.5).

**Belka wspornikowa, obciążenie cykliczne.** Przy rozpatrywaniu belki pokazanej na rys. 18.6 założono materiał idealnie plastyczny typu *Misesa*. Obciążenia są wyrażone jako ułamki obciążenia krytycznego, oszacowanego na bazie elementarnej teorii przegubów plastycznych. Najpierw dany jest cykl obciążenia, jak pokazano na rys. 18.7, w celu zilustrowania przydatności sposobu do śledzenia zachowania sprężystego po odciążeniu. Warto odnotować histerezę przemieszczeń, pokazaną na rys. 18.7a, i naprężenie resztkowe (residualne), istniejące po zdjęciu obciążenia jako rezultat odkształcenia plastycznego.

Na rysunku 18.8 pokazano wzrost przemieszczeń ze wzrostem obciążenia. Przy zbliżaniu się do obciążenia niszczonego konieczna jest coraz większa liczba ite-



Rys. 18.7. Belka wspornikowa: a) ugięcie przy zmianie kierunku obciążenia, b) rozkład naprężeń  $\sigma_x$  przy różnych stadiach obciążenia — odciążenia

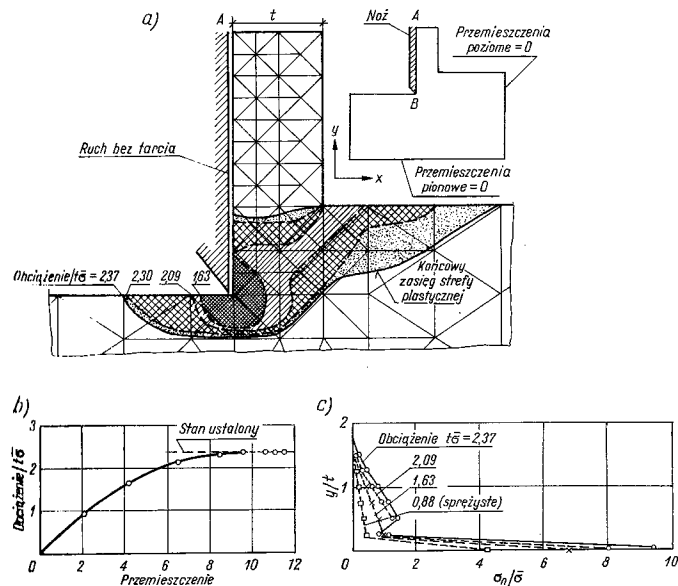


Rys. 18.8. Zależność ugięć od  $w/w_c$



racji, aż przy  $P = P_c$  zbieżność całkowania znoweliz Stąd wynika wniosek, że aczkolwiek rozwiązanie nieliniowe pozwala znaleźć dolną granicę obciążenia niszczonego (przy spełnieniu warunków równowagi i warunku plastyczności), to rzeczywiste obciążenie niszczące nie może być znalezione poprzez zwiększanie obciążenia. Aby uzyskać lepszy obraz zachowania się przy zniszczeniu, prościej jest przyjąć określone przemieszczenie w punkcie obciążenia i zwiększać je aż do chwili, gdy ustanie wzrost oddziaływania w tym punkcie. Tego rodzaju postępowanie rozważone jest w następnym przykłdzie.

**Płynięcie plastyczne przy cięciu metali.** Na rysunku 18.9a pokazano schematycznie narzędzie tnące, oddzielające wiór od macierzystego bloku metalu. Co prawda, zadanie rzeczywiste odnosi się do dużych odkształceń, rozwiązano jednak zadanie zastępcze elastoplastycznego zachowania się materiału o zadanej geometrii przy założonym jednorodnym przemieszczeniu pionowej ścianki. Pokazano rozwój obszarów plastycznych i rozkład obciążeń, a także całkowite obciążenie narzędzia. Ponieważ materiał jest idealnie plastyczny, widać, że obciążenia wzrastają do pewnej stałej granicy przy określonym przemieszczeniu. W tym stadium istnieją



Ryn. 18.9. Aproxymacja procesu skrawania: a) narzędzie tnące, b)  $\bar{\sigma}$  — granica plastyczności, płański stan odkształcenia, kryterium *Misesa*, c) rozkład ciśnień wzdłuż linii AB

warunki pełnego wykorzystania materiału i obciążenie krytyczne odpowiada prawdziwemu zachowaniu się wióra. Praktyczne znaczenie ma więc tutaj tylko stadium końcowe

**Materiały Coulomba-Mohra. Tunele.** W szeregu takich materiałów, jak grunty, skały, ceramika i betony, występują zjawiska podobne do plastyczności. Tutaj także może zachodzić nieodwracalna deformacja materiału przy prawie niezmiennym stanie naprężenia. Jednak powierzchnia płynięcia w takich materiałach zależy nie tylko od dewiatora naprężeń, jak w prawie *Misesa*, lecz także od wartości działającego naprężenia pośredniego (izotropowego).

Znane kryterium *Coulomba-Mohra*, określające maksymalne naprężenie styczne w każdym punkcie jako

$$\tau = c + \sigma_n \operatorname{tg} \phi, \quad (18-32)$$

gdzie:  $c$  jest kohezją,  $\sigma_n$  naprężeniem normalnym na rozważanej płaszczyźnie, a  $\phi$  kątem tarcia wewnętrznego. Wyrażenie to może być aproksymowane za pomocą bardziej wygodnej postaci zaproponowanej przez *Druckera* [19]

$$F = \alpha \sqrt{J_1} + \sqrt{J_2} - K = 0, \quad (18-33)$$

gdzie:  $J_1$  jest pierwszym niezmiennikiem naprężenia

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

a  $J_2$  — drugim niezmiennikiem naprężenia

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2,$$

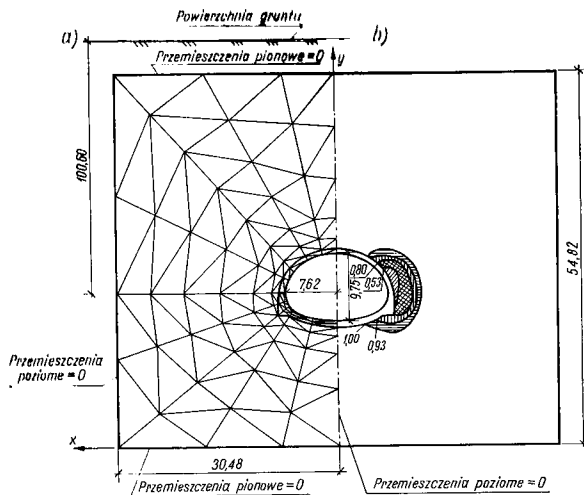
zaś  $\alpha$  i  $K$  — stałe zależne od kohezji i tarcia wewnętrznego w materiale. Stałe z (18-33) można powiązać ze stałymi z (18-32) w poniższy sposób

$$\alpha = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi}}, \quad K = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi}}.$$

Inne możliwe postaci tych związków omawia *Bishop* [20], lecz dla naszych celów wystarczy sformułowanie *Druckera*.

Jeżeli poza powierzchnią płynięcia założymy ważność zasady normalności, możemy rozpatrywać zadania, w których występują te materiały w taki sam sposób, jak poprzednio. Na rys. 18.10 pokazane jest rozwiązanie mające na celu ustalenie kształtu stref plastycznych wokół długiego tunelu po zdjęciu naprężeń wskutek wykonania chodników. Inne podobne rozwiązania podane są w pracach [9], [15], [21], [22].

Główną trudnością w rozwiązywaniu takich zagadnień nie jest obliczenie, lecz ustalenie odpowiedniego prawa reologicznego (równania stanu). W szczególności wydaje się, że warunek prostopadłości dla materiałów typu *Coulomba-Mohra* nie jest słuszny i że obowiązują inne, tzw. „niewspółosiowe” prawa płynięcia plastycznego [23].



Ry. 18.10. Długi tunel prosty: a) siatka 153 elementów, 94 węzły; obudowa:  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\nu = 0,15$ ; skala:  $E = 3,52 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\nu = 0,20$ ,  $c = 9,81 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\phi = 30^\circ$ . Naprężenie początkowe  $\sigma_{y0} = \gamma h$ , gdzie początek  $h$  na  $+121,92 \text{ m}$ ,  $\sigma_{x0} = 0,20 \gamma h$ ,  $\gamma = 732,4 \text{ kG/m}^3$ , b) rozchodzenie się stref plastycznych

Według sugestii *Davisa* [24] odkształcenia plastyczne spełniają związek reologiczny

$$d\{\epsilon\}_p = \lambda[D_0(\{\sigma\})]^{-1}, \quad (18-34)$$

gdzie  $[D_0]$  jest macierzą zależną od wartości naprężeń, lecz mającą postać podobną do macierzy sprężystości. Powtarzając postępowanie zgodne z równaniami (18-20) do (18-24) otrzymamy nową macierz elastoplastyczną, która jednak nie będzie wymetryczna [25]. Za pomocą sposobu naprężeń początkowych możemy mimo to badać takie zagadnienia bez trudności.

## 18.5. Materiały nie przenoszące ciągnięć

Materiał hipotetyczny, stawiający opór tylko siłom ściskającym i ulegający rozciąganiom bez oporu, w wielu aspektach wykazuje podobieństwo do materiału idealnie plastycznego. Aczkolwiek materiał taki prawdopodobnie w rzeczywistości nie istnieje, to stanowi on dobre przybliżenie dla opisu zachowania się skał spękanych, gruntów i innych materiałów ziarnistych.

Dla takiego materiału nie można napisać szczegółowych związków reologicznych (naprężenie-odkształcenie); wystarczy przeprowadzić analizę stanu sprężystego, gdziekolwiek zaś pojawiają się naprężenia rozciągające, redukować je do zera. Sposób naprężenia początkowego jest tutaj zupełnie naturalny i istotnie został on opracowany dla tych właśnie materiałów [1]. Sposób postępowania jest tu taki sam jak omówiono poprzednio, musimy jednak pamiętać, że należy eliminować główne naprężenia rozciągające.

Prawo reologiczne dla tych materiałów może co najwyżej w sposób przybliżony ujmować stan rzeczywisty. Nie można np. opisać zamykania się szczelin wskutek przyłożonych ciśnień. Tym niemniej uzyskane wyniki dają przybliżony obraz rzeczywistego zachowania się skał spękanych.

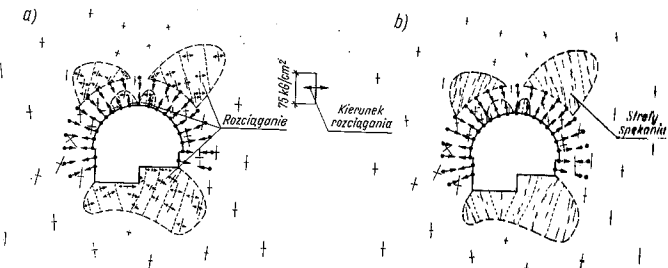
*Siłownia podziemna.* Na rysunku 18.11a i b pokazano zastosowanie omówionego sposobu postępowania do zagadnienia praktycznego.

Na rysunku 18.11a pokazano rozwiązanie sprężyste dla całego obszaru i naprężenia w otoczeniu siłowni podziemnej z wykonanym w pobliżu otworów wstępnym sprężeniem kablami. Pokazano strefy, w których występuje rozciąganie.

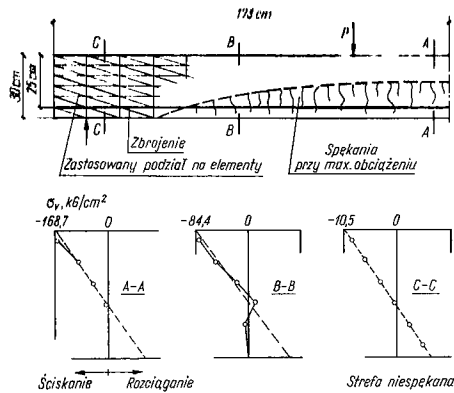
Na rysunku 18.11b podano rozwiązanie po wyeliminowaniu ciągnięć. Wskazuje ono na raczej małe zmiany rozkładu naprężeń głównych, a także pokazuje strefy, w których zaszło spękanie.

Odmianą tego typu materiałów może być taki materiał, gdzie istnieje ograniczony opór na rozciąganie, gdy jednak zostanie on przekroczony, ciągnięcie spada do zera, np. wskutek pęknięcia. Takie założenie zastosował *Valliappan* i *Nuth* [26] przy badaniu zachowania się belek żelbetowych. Otrzymał bardzo dobrą zgodność z wynikami doświadczeń na belkach przezbrojonych (gdzie plastyczne płynięcie wskutek sił ściskających nie ma znaczenia). Obliczono belkę, dla której badania doświadczalne wykonał *Krahl* i in. [27].

Na rysunku 18.12 pokazano kilka ciekawszych wyników.



Rys. 18.11. Siłownia podziemna: a) rozkład naprężeń dla stanu sprężystego z uwzględnieniem sprężenia kablami, b) jak a) lecz przy założeniu niemożliwości przenoszenia rozciągania



Rys. 18.12. Pęknięcia w belce żelbetowej; maksymalna wytrzymałość na rozciąganie 14,06 kG/cm<sup>2</sup>; rozkład naprężeń w betonie w różnych przekrojach

## 18.6. Materiały uwarstwione i elementy łączące

Innym wyidealizowanym modelem materiału jest model zbudowany z dużej liczby izotropowych warstw sprężystych. Poddane ciśnieniu mogą one przenosić ścinanie wzdłuż uwarstwienia pod warunkiem, że tarcie między warstwami nie zostało przekroczone. W kierunku normalnym do warstw nie mogą jednak być przekazywane żadne ciągnięcia.

Ten wyidealizowany model materiału można zastosować do badania pokładów wklutych z równoległym uwarstwieniem; poniżej pokazane będzie, że ma on znacznie szersze możliwości zastosowania.

Na rysunku 18.13 pokazano dwuwymiarowy układ dla takiego materiału. Przyjmując, że oś lokalna  $x'$  skierowana jest wzdłuż warstw, możemy napisać zależność dla naprężeń w obszarze sprężystym

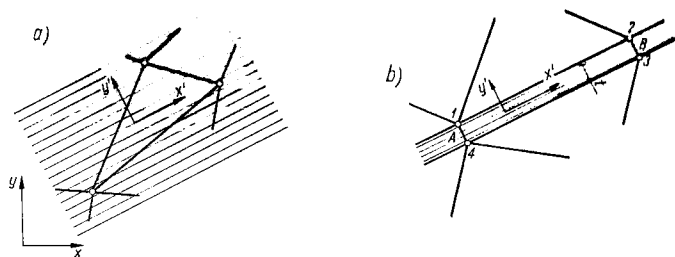
$$|\tau_{x'y'}| \leq \mu \sigma_y' \quad (18-35a)$$

oraz

$$\sigma_{y'} \leq 0, \quad (18-35b)$$

gdzie  $\mu$  — współczynnik tarcia występującego między warstwami.

Jeżeli naprężenia w fazie sprężystej przekraczają założoną wartość graniczną, to należy zredukować je do wartości podanych w równaniu (18-35).



Rys. 18.13. Materiał uwarstwiony: a) element typowy, b) połączenie

Zastosowanie sposobu naprężenia początkowego w tych zagadnieniach jest zrozumiałe samo przez się, a samo zagadnienie jest bardzo podobne do omówionego poprzednio dla materiału nie przenoszącego ciągnięć. Na każdym kolejnym etapie rozwiązania sprężystego sprawdza się najpierw istnienie naprężeń rozciągających  $\sigma_y$  i jeśli one występują, stosuje się poprawione naprężenia początkowe, redukujące ciągnięcia i ścinania do zera. Jeśli naprężenia  $\sigma_y$  są ściskające, sprawdzą się bezwzględne wartości naprężeń stycznych  $\tau_{x'y'}$  i znów, gdy przekraczają one wartości graniczne obliczone wg wzoru (18-35), redukuje się je do właściwych granic.

Podobnie jak poprzednio model matematyczny niekoniecznie odzwierciedla rzeczywiste zachowanie się materiału przy odwróceniu kierunku działania obciążenia, luki bowiem między warstwami muszą zamknąć się, zanim materiał będzie mógł przejść naprężenie ściskające. Prostim sposobem omięcia tej trudności dla przypadku, gdy współczynnik Poissona jest zerem, jest kontrola odkształcenia rozciągającego. Zamiast (18-35) piszemy

$$\text{jeżeli } \varepsilon_{y'} \geq 0, \text{ to } \sigma_{y'} = 0, \quad (18-36)$$

w pozostałych przypadkach materiał zachowuje się sprężysto. W ten sposób sformułowaliśmy prawo rzeczywistego zachowania się materiału.

Nie trzeba dodawać, że kierunki warstw mogą zmieniać się od elementu do elementu. Metody te pozwalają badać bardzo złożone układy mas skalnych o przypadkowym rozkładzie warstw.

Wprowadzenie sił spójności i tarcia wewnętrznego, na ogół zmiennych z wartością odkształcenia ścinającego (w ogólności malejącego ze wzrostem odkształcenia), będzie tylko sprawą pewnej rozbudowy programu. Można więc badać w ten sposób zagadnienie „zmiękczania się materiału” przy obróbce [25].

W pewnych przypadkach materiał uwarstwiony znajduje się w stosunkowo wąskich warstwach między względnie jednorodnymi blokami sprężystymi. Tak jest np. w przypadku uskoków geologicznych lub większej strefy częściowo spękanych skał. W takich okolicznościach wygodny jest podział na wąskie prostokątne elementy, których geometrię można łatwo określić poprzez współrzędne dwu

krawędzi  $A$  i  $B$  oraz grubości (rys. 18.1.1b)). Element musi jednak mieć określone punkty styku z przyległymi elementami (pktki 1 : 4). Takie elementy łączące mogą być nie tylko prostokątne, jak pokazano tutaj, lecz mogą mieć bardziej złożoną, określone izoparametrycznie, postacie, p. rozdz. 8.

Goodman i in. [28] opisał podobne elementy łączące, użyte do badania stateczności masywów skalnych. Opisane jednak tutaj nieliniowe zachowanie się elementów łączących ma szersze pole zastosowań. Problemy *pasowania* lub *luzu* między częściami maszyn mogą być również badane przy użyciu cienkich elementów łączących. Jeśli założymy istnienie bardzo wąskich elementów pomiędzy dwiema częściami maszyny, to efektem luzowania będzie wprowadzenie początkowego odkształcenia rozciągającego  $\epsilon_{p_0}$  takiego, aby  $i \epsilon_{p_0}$  było równe luzowi ( $i$  — grubość warstewki). Skoro elementy warstwowe, wiążące omawiane części maszyny, nie mogą przenosić rozciągania, otrzymujemy więc bezpośrednio wskazanie czy luzy się zamknęły, czy też nie. Odwrotnie, pasowanie jest równoważne ujemnemu początkowemu odkształceniu w kierunku normalnym do elementu łączącego.

Wadą tego przybliżenia jest to, że należy przyjąć skończoną grubość elementu łączącego, aby uniknąć bardzo dużego współczynnika sztywności w kierunku normalnym, i co za tym idzie, numerycznej nieokreśloności równań.

Aby uniknąć powyższego, można stosować postępowanie specjalnego rodzaju przedstawione np. w pracy [29].

## 18.7. Pełzanie i odkształcenia zależne od czasu

**18.7.1. Uwagi ogólne.** Zjawisko pełzania polega na tym, że odkształcenia zależą nie tylko od wartości naprężenia, lecz także od czasu jego działania. Najogólniej postulując się pewne prawa, z których można wyznaczyć odkształcenia w rozważanej chwili czasu, znając cały poprzedni przebieg naprężeń. Każdy zatem proces obliczeń musi tutaj odbywać się w *sposób przyrostowy*, rozważając odpowiednio małe przedziały czasu. W każdym takim przedziale czasowym ze znajomości określonych praw reologicznych pełzania, przeciwnego poziomu naprężeń w tym przedziale i — jeśli trzeba — poprzedniego przebiegu zjawiska można znaleźć *przyrosty odkształceń*. Tutaj więc naturalny staje się sposób początkowego odkształcenia opisany w p. 18.2.4.

Jest jednak czasem możliwe odwrócenie prawa pełzania w ten sposób, że definiuje się *naprężenia* w dowolnej chwili czasu poprzez *historię odkształcenia*. Jeżeli można wygodnie zdefiniować takie prawo w zależności od *funkcji relaksacji*, wówczas można, jako równoważnego, użyć także sposobu naprężenia początkowego, jak w p. 18.2.3.

Ponieważ jednak łatwiej jest zmierzyć pełzanie, dlatego chętniej na ogół stosowany jest sposób początkowego odkształcenia. Dalej zostanie zastosowany ten właśnie sposób.

W zantagonizacji do pełzania sposób odkształcenia początkowego składa się z następujących etapów [30]–[34]:

a. Rozpatrujemy wszystkie zmiany obciążenia (temperatura itp.), zachodzące na początku przedziału  $t$  i poprzez rozwiązanie sprężyste określamy stan początkowy naprężenia i odkształcenia.

b. Określamy „pełzającą” zmianę odkształcenia, zachodzącą w przedziale  $\{\Delta \epsilon_c\}_t$ , zakładając, że stan naprężenia podczas trwania tego przedziału pozostaje wciąż równy wartości początkowej (z p. a).

c. Traktując  $\{\Delta \epsilon_c\}_t$  jako *odkształcenie początkowe* określamy, poprzez ponowne rozwiązanie zadania sprężystego, nowy stan naprężenia i odkształcenia w końcu badanego przedziału czasu.

Jeżeli przedział czasu  $\Delta t$  jest względnie mały, proces ten niewiele różni się od dokładnego i można rozpatrywać w podobny sposób dalsze przedziały czasu. Jeżeli zachodzą stosunkowo znaczne zmiany odkształceń, można oczywiście powtórzyć czynności b) i c) używając poprawionych, średnich wartości naprężeń dla określenia  $\{\Delta \epsilon_c\}_t$ . Taka iteracja bywa czasem pożądana, lecz rzadko tylko bywa potrzebne wykonanie więcej niż dwu cykli.

Stabilność opisanego postępowania wyraźnie zależy od wielkości obranego przedziału czasu i dla każdego przypadku obliczenia należy dobór ten sprawdzić numerycznie.

W tym miejscu należy chyba powiedzieć kilka słów o wydajności liczenia na maszynie cyfrowej. Jeżeli chwilowe, sprężyste własności materiału nie ulegają zmianie w zależności od czasu (lub od zmian temperatury, które mogą odbywać się w czasie), jest pewne, że można wielokrotnie powtarzać identyczny proces rozwiązania sprężystego. W takich przypadkach wygodniej jest odwrócić, przynajmniej częściowo, macierze rozwiązań, niż uciekać się do numerycznych rozwiązań iteracyjnych. Odwrotnie, jeżeli własności sprężyste zmieniają się w czasie i w każdym przedziale czasu, mamy właściwie do czynienia z nowym zadaniem sprężystym, lepsze rozwiązanie iteracyjne, wykorzystujące poprzednio uzyskane wyniki, jako punkt wyjścia do następnego kroku obliczenia.

Głównym zagadnieniem w opisanym postępowaniu jest określenie algorytmu wyznaczania przyrostów pełzania  $\{\Delta \epsilon_c\}$ . W dalszym ciągu sprawie tej poświęcimy więcej uwagi.

**18.7.2. Związek między pełzaniem a historią materiału (lepkosprężystość).** Zjawiska lepkosprężyste charakteryzują się tym, że predkość wzrostu odkształceń pełzania zależy nie tylko od stanu aktualnego, ale też i od *całej historii* ich powstawania. Aby zatem określić przyrost odkształcenia  $\{\Delta \epsilon_c\}_t$  w określonym przedziale czasu, trzeba znać stan naprężeń i odkształceń we wszystkich *poprzedzających przedziałach czasu*. Chociaż w procesie obliczania na maszynie faktycznie otrzymuje się to wszystko, tym niemniej w *istocie* problem nastrocza pewne trudności. Ograniczenia praktyczne pojawiają się natychmiast. Nawet w największych dostępnych maszynach nie jest praktycznie celowe przechowywanie całej historii w pamięci wewnętrznej, a powtarzające się odwoływanie do pamięci zew-

netrzej jest zwykle zbyt powolne, tym samym zbyt kosztowne, by można je brać pod uwagę.

Sposób ominięcia tych trudności opisany został przez Zienkiewicza i in. [31] w odniesieniu do *liniowej lepkosprężystości*. Stwarza on jednak możliwości odpowiedniego sformułowania zadania także dla zagadnień *nieliniowych* materiałów lepkosprężystych.

W liniowej lepkosprężystości jest zawsze możliwe zapisać związki reologiczne w podobnej postaci, jak w sprężystości liniowej, jeżeli np. w równaniu (18-2) w macierzy  $[D]$  zamiast stałych sprężystości wprowadzimy odpowiednie operatory różniczkowe lub całkowe [35]. W ten sposób w kontinuum izotropowym pojawi się para operatorów, odpowiadająca analogicznej parze stałych sprężystych. Dla anizotropowego zadania może okazać się potrzeba uwzględnienia aż 21 oddzielnych operatorów.

Odształcenie pełzania może teraz być opisane przez

$$\{\varepsilon_c\} = [\bar{D}]^{-1} \{\sigma\},$$

gdzie każdy wyraz „macierzy lepkosprężystości”  $[\bar{D}]^{-1}$  może mieć postać

$$\bar{d}_{rs} = \frac{a_0 + a_1 \left(\frac{d}{dt}\right) + a_2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\right) + \dots}{b_0 + b_1 \left(\frac{d}{dt}\right) + b_2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\right) + \dots}, \quad (18-37)$$

jeżeli operatory zapisane są w postaci różniczkowej. Jeśli rozwinięcie to jest skończone, wtedy rozdzielając każdy natychmiastowy efekt sprężysty można (18-37) przepisać w postaci ułamków częściowych jako

$$\bar{d}_{rs} = \frac{A_1}{\frac{d}{dt} + B_1} + \frac{A_2}{\frac{d}{dt} + B_2} + \dots \quad (18-38)$$

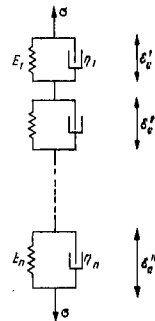
Jak dobrze wiemy, można to interpretować jako reakcję układu złożonego z serii elementów *Kelvina* pokazanej na rys. 18.14 (nawet jeśli nie chcemy przywiązywać jakiegokolwiek sensu fizycznego do tych modeli). Każdy wyraz rozwinięcia (18-38) przedstawia jeden element *Kelvina*. Typowy zatem udział w składowej odształcenia jest sumą składników o postaci

$$e_n = \frac{A_n}{\frac{d}{dt} + B_n} \cdot \sigma_n \quad (18-39)$$

lub

$$\frac{d}{dt} e_n = A_n \sigma_n - B_n e_n. \quad (18-40)$$

Myśląc bardziej konkretnie w przedziale czasu można znaleźć z powyższych wyrażeń wychodząc z *aktualnej wartości* odpowiedniej składowej naprężenia  $\sigma_n$  i *aktualnej wartości*  $e_n$ . Staje się więc konieczne zapamiętanie w pamięci operacyjnej maszyny tylko skończonej liczby takich wyrazów, jak  $e_n$  (aktualne), aby przedstawić całkowity wpływ historii.



Rys. 18.14. Szereg elementów *Kelvina*

W praktyce wystarczy ograniczona liczba elementów *Kelvina*, aby przedstawić zachowanie się materiału, ponadto zaś istnieje tylko ograniczona liczba operatorów lepkosprężystych. Np. w izotropowym, nieściśliwym materiale tylko jeden operator wystarczy do zdefiniowania macierzy  $[\bar{D}]^{-1}$ . Dwa wyrazy rozwinięcia (18-38) wystarczające do jego zdefiniowania wymagają zapamiętania tylko dwu wartości w czasie obliczeń [31].

Wartości  $A_n$  i  $B_n$  dla każdego modelu *Kelvina* mogą zależeć od wicku materiału oraz temperatury i nie wymagają przez to żadnego komplikowania obliczeń przy badaniu zagadnień pełzania betonu lub termolepkosprężystości.

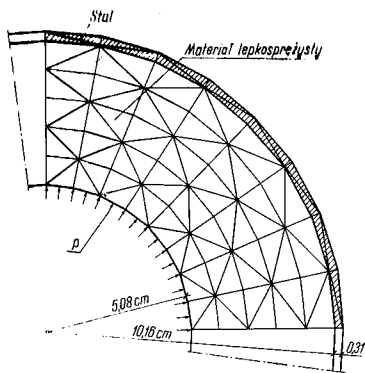
Wydaje się także możliwe rozszerzenie tego sposobu postępowania na zjawiska nieliniowej lepkosprężystości poprzez określenie z zależności „sprężyna-tłumik” wpływu stałych  $A$  i  $B$  na bieżącą wartość naprężeń. Potrzeba jest jednak jeszcze dużo pracy dla sformułowania takich praw w stosowny sposób, przy równoczesnym właściwym sprawdzeniu doświadczalnym.

Aby zilustrować przydatność powyższych wywodów, zacytujemy jeden przykład z pracy [31].

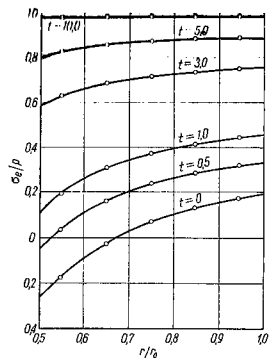
Przedstawia on problem obliczenia ścian cylindra wykonanych z materiału lepkosprężystego i wzmocnionych osłoną metalową (rys. 18.15). Znane jest dokładne rozwiązanie tego zadania [36], potraktowanego jako problem jednowymiarowy. Tutaj zostało ono rozwiązane przy użyciu ogólnego programu zagadnienia dwuwymiarowego, a otrzymane wyniki wskazują na uzyskaną dokładność.

Przyjęto przedziały czasu 0,1, co zmusiło do zastosowania stu kolejnych kroków dla znalezienia końcowego wyniku po upływie czasu 10 (rys. 18.16).

Inne, bardziej złożone przykłady znaleźć można w pracy [31].



Rys. 18.15. Zbrojony walec lepkosprężysty pod ciśnieniem wewnętrznym rozwiązany jako ogólne zadanie dwuwymiarowe



Rys. 18.16. Zmiana naprężenia stycznego dla przykładu z rys. 18.15 w zależności od czasu; materiał zewnętrznej powłoki jest sprężysty, a wewnętrznej lepkosprężysty na ścinanie, lecz sprężysty na ciśnienie izotropowe [31], [36]; wyniki pokrywają się z analitycznymi [36]

**18.7.3. Prawa pełzania zależne od stanu.** Mimo iż pełny obraz rozwoju naprężeń i odkształceń odgrywa pewną rolę w prawach rządzących pełzaniem większości materiałów, to jednak wysoki stopień nieliniowości względem naprężeń, obserwowany u większości metali, doprowadził do sformułowania uproszczonych praw opisowych, przy pomocy których *prędkość odkształcenia* daje się wyznaczyć na podstawie tylko aktualnego stanu zmiennych niezależnych (w szczególności naprężenia, odkształcenia, czasu i temperatury).

Przegląd takich praw podali *Leckie* i *Martin* [37]. Przy założeniu izotropii i nieściśliwości odkształcenia pełzania wyrażają się zwykle w postaci

$$\frac{d}{dt} \{ \epsilon \}_c = F_1(t) F_2(\bar{\epsilon}_c) F_3(\bar{\sigma}) F_4(\theta) [D_0]^{-1} \{ \sigma \} / E, \quad (18-41)$$

gdzie  $[D_0]^{-1}$  odpowiada macierzy sprężystości przy współczynniku *Poissona*  $\nu = 0,5$ , zaś  $\bar{\epsilon}_c$  i  $\bar{\sigma}$  oznaczają drugie niezmienniki, odpowiednio, odkształcenia pełzania i naprężenia, wreszcie  $\theta$  — temperatury.

Dla wtórnego pełzania zależność od czasu i nagromadzone odkształcenia są małe, toteż często stosowane jest prawo wykładnicze [38], [39]

$$\frac{d}{dt} \{ \epsilon_c \} = K \bar{\sigma}^n [D_0]^{-1} \{ \sigma \} / E. \quad (18-42)$$

Azkielwiek wartość fizyczna prawa jest sporna, szczególnie z uwagi na funkcję czasu, reprezentującą tzw. „prawo wzmocnienia z upływem czasu”, to jego zastosowanie praktyczne w rozwiązaniach numerycznych jest bardzo proste. Prędkość odkształceń pełzania

$$\frac{d}{dt} \{ \epsilon \}_c$$

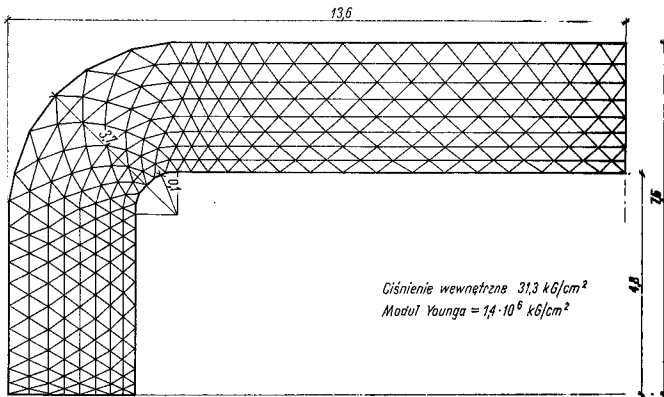
da się w każdej chwili łatwo określić, a więc przyrost odkształcenia pełzania można znaleźć po prostu jako

$$\Delta \{ \epsilon \}_c = \frac{d}{dt} \{ \epsilon \}_c \cdot \Delta t, \quad (18-43)$$

po czym zastosować go do ogólnego postępowania.

Zastosowania tego sposobu można znaleźć w pracach [33], [34], [40]. Na rysunku 18.17 i 18.18 pokazano przykład obliczenia naczynia ciśnieniowego.

Przy takich i oczywiście innych zagadnieniach pracy przy rozwiązywaniu najlepszego kompromisu między oszczędnością pracy przy rozwiązywaniu a stabilnością samego rozwiązania. Dlatego należy zwykle korygować odstępy czasu w miarę toku obliczenia. Mogą one stawać się progresywnie dłuższe, jeżeli, jak to się często zdarza, rozkład naprężeń ma tendencję do zbliżania się do pewnej wartości stałej. Odpowiednim kryterium takiego korygowania może być wymaganie, aby zmiany naprężeń w jednym przedziale czasu nie przekraczały odpowiedniego procentu całości [34].



Rys. 18.17. Idealizacja zbiornika ciśnieniowego z płaskim dnem;  $\nu = 0,3$ ;  $e^c = 19,8 \cdot 10^{-10}$ ;  $\sigma^c, \epsilon^c, t, \theta, \theta^c$



## 18.8. Uwagi dodatkowe

Poprzednio omówiono ogólne postępowanie przy złożonych nieliniowych równaniach reologicznych stanu, opisujących materiał i przedyskutowano kilka szczególnych zastosowań. Oczywiście, zagadnienie jest tak obszerne i ma tak wielkie znaczenie praktyczne, że omówienie go w krótkim rozdziale nie jest możliwe. Różne postacie równań reologicznych dla różnych materiałów mogą być jeszcze zaproponowane i zbadane doświadczalnie. Gdy takie równania są już znane, można wówczas zaadaptować dla ich zastosowania przy rozwiązywaniu zadań metody, omówione w zarysach powyżej; można też wówczas zbudować różne standardowe układy programów, dające się zastosować do szeregu różnorodnych materiałów. Nowe opisy reologiczne są po prostu wmontowywane do programów jako „nowe skrzynki”. W ten sposób można badać szereg zjawisk lepkosprężystych, a także takie zjawiska jak *lepkoplastyczność*, gdzie deformacje plastyczne same zależą od czasu, lub też zjawiska zachodzące w różnych gruntach i skałach, o ile mamy dla nich adekwatny opis reologiczny [44].

W odniesieniu do problemów nieliniowych należy raz jeszcze podkreślić, że:

- może wystąpić niejednoznaczność rozwiązań,
- nigdy nie można *a priori* zagwarantować zbieżności,
- koszt rozwiązania jest niepomierne większy niż w przypadku odpowiednich rozwiązań liniowych.

Podczas gdy pierwsze dwa aspekty wymagają odpowiedniego potraktowania fizycznego, to zagadnienie zmniejszenia kosztów obliczeń będzie wymagać jeszcze wiele dalszej pracy i badań. W pokazanych dotąd przykładach zastosowano tylko elementy najprostsze. Oczywiście można i tutaj zastosować wszystkie zabiegi omawiane poprzednio dla dowolnej postaci funkcji kształtu elementu. Ostatnie badania wskazują, że nawet w zagadnieniach dwuwymiarowych zastosowanie złożonych elementów, jak to opisano w rozdz. 7 i 8, może doprowadzić do znacznej oszczędności kosztów [45].

Na rysunku 18.20 pokazano szczegółowe porównanie stref plastycznych w rozważanym przypadku przy stałym naprężeniu i przy zastosowaniu elementów izoparametrycznych. Gładkie przejście między strefami plastycznymi (wy-

Rys. 18.20. Oszacowanie przydatności różnych elementów przy rozwiązaniu elastoplastycznym próbki z karbem (płaski stan naprężeń)

Również stref plastycznych

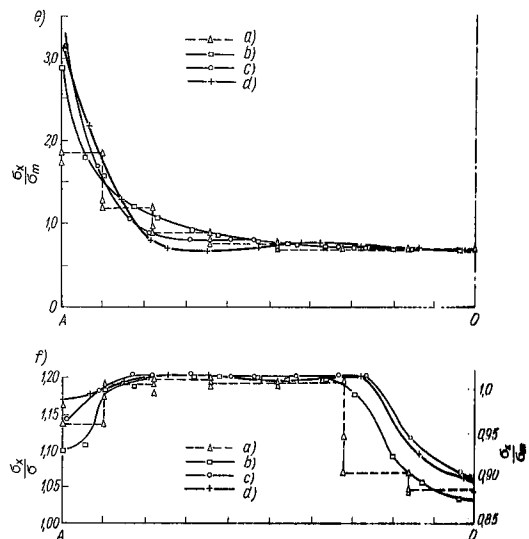
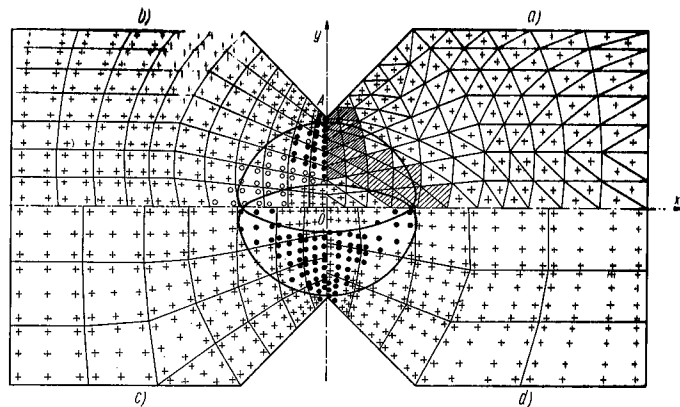
- elementy trójkątne  $\sigma_m/\bar{\sigma} = 1,186$  i  $1,226$ ,
- liniowe elementy czworoboczne  $\sigma_m/\bar{\sigma} = 1,186$  i  $1,226$ ,
- elementy czworoboczne drugiego stopnia  $\sigma_m/\bar{\sigma} = 1,186$ ,
- elementy czworoboczne trzeciego stopnia  $\sigma_m/\bar{\sigma} = 1,186$ ,

( $\sigma_m$  — naprężenie średnie w karbie,  $\bar{\sigma}$  — granica plastyczności przy jednoosiowym stanie naprężeniu)

Rozkład naprężeń w przekroju karbu

- stan sprężysty,
- stan sprężysto-plastyczny dla  $\sigma_m/\bar{\sigma} = 1,186$ .

Liczba stopni swobody: w przybliżeniu 172–178 we wszystkich czterech rozwiązaniach.





znaczonymi przez odpowiednie punkty (*Jausu*) w ostatnim przypadku prowadzi do znacznego przyspieszenia zbieżności i polepszenia dokładności.

Należy wreszcie zwrócić uwagę, że opisane postępowanie może być użyte dla rozwiązywania także *zagadnień liniowych*, sformułowanych pierwotnie względem innego układu *liniowych stałych materiałowych*. Nie wydaje się to interesujące, jednak tylko do chwili, aż rozważymy przypadek rozwiązania sprężystego dla współczynnika *Poissona*  $\nu = 0,5$ . Wspomniano już, że dla takiego przypadku macierz  $[D]$  staje się nieokreślona i potrzebne są specjalne sformułowania (rozdz. 4.5).

Można jednak sformułować zadanie sprężyste przy założeniu możliwego do przyjęcia współczynnika *Poissona*, a następnie skorygować odkształcenia metodą „odkształcenia początkowego” aż do osiągnięcia warunku nieściśliwości [34], [46].

### 18.9. Nieliniowe, quasi-harmoniczne zagadnienia pola

Nieliniowość występuje w licznych problemach pola, typu rozważanego w rozdz. 15, np. w przypadku gdy zagadnienie opisane jest przez równanie różniczkowe (15-1)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0, \quad (18-45)$$

współczynnik przewodnictwa  $k$  może zależeć od funkcji  $\phi$  lub jej gradientów. Można tutaj podać dwie sytuacje, typowe dla ilustracji zagadnienia. W pierwszej, dotyczącej wypływu, prędkość może nie spełniać warunku laminarności *Darcy'ego*, wg którego

$$v_x = k \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ itd.}, \quad (18-46)$$

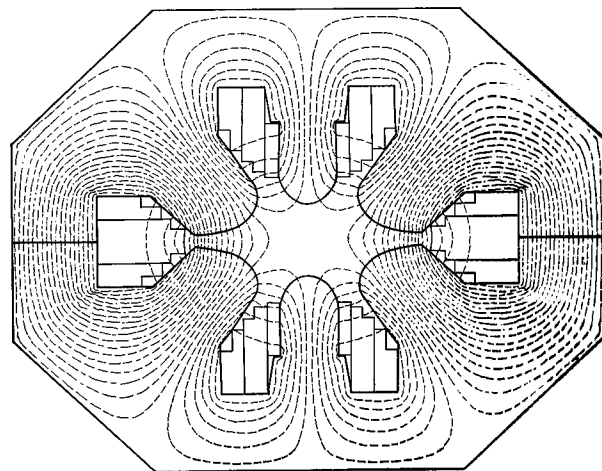
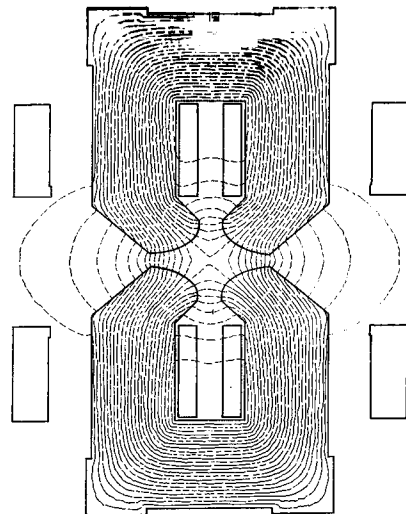
lecz przy przejściu do stanu turbulentnego wymaga takiej formy płynięcia, gdzie główny spadek ( $\text{grad } \phi$ ) zależy od wyższej potęgi prędkości. Takie prawo zaproponował np. *Forchheimer* [47] i inni [48]. Można je wyrazić w postaci równania (18-46), ale z wprowadzeniem [49] ÷ [51]

$$k = k(\bar{v}), \quad \bar{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Druga, podobna sytuacja ma miejsce w zagadnieniach magnetostatycznych. Jeżeli  $\phi$  jest tutaj potencjałem magnetycznym, a  $k$  odwrotnością przenikalności magnetycznej, to ustalono, że ta ostatnia zależy w wyraźny sposób od gradientu pola magnetycznego [52]. Sytuacja więc w obu wymienionych zagadnieniach jest prawie identyczna.

Chociaż w wymienionych zagadnieniach terminologia „zmienna sprężystość” czy „początkowe odkształcenie i naprężenie” nie może mieć zastosowania, można jednak zaadaptować zasadniczo podobną iterację jak w p. 18.3. Równania dyskretyzujące pozostają nadal, jak pokazano w rozdz. 15 [równanie (15-4)], podobne do postaci równań sprężystości

$$\{\psi\} = [H]\{\phi\} + \{F\} = 0. \quad (18-47)$$



Rys. 18.21. Pole magnetyczne znalezione metodą elementów skończonych

Ponieważ  $k$  wchodzi do „przepisu” na obliczenie  $\{H\}$ , mamy więc

$$\{H\} = \{H(\{\phi\})\}$$

i zadanie nasze staje się zadaniem tej samej kategorii, co rozpatrywane w p. 18.3.

Posługując się podczas iteracji schematem podobnym do iteracji Newtona otrzymujemy

$$\Delta\{\phi\}_{n+1} = -\{\psi(\{\phi\}_n)\} [H_n]^{-1}. \quad (18-48)$$

To zaś, jak pokazano poprzednio, pociąga za sobą odwracalność różnych macierzy w każdym stadium obliczenia.

Jako ekwiwalentnego można użyć sposobu „stałego nachylenia”, przyjmując

$$\Delta\{\phi\}_{n+1} = -\{\psi(\{\phi\}_n)\} [H_0]^{-1}, \quad (18-49)$$

gdzie  $[H_0]^{-1}$  — macierz złożona ze współczynników pierwszego stopnia iteracji.

Można także zastosować różne sposoby przyspieszenia iteracji w celu uzyskania rozwiązania [2]. Widać stąd oczywistą analogię do sposobu „stałej” i „zmiennej sztywności”, omawianych poprzednio.

Dotąd w stosunkowo nielicznych przypadkach zastosowano metodę elementów skończonych do rozwiązywania omówionych zagadnień. Volker [49] rozwiązał problem nielaminarnego przepływu przez osrodki porowate, stosując postępowanie ze zmienną  $[H]$  (18-48) uzyskując dobry wynik po paru cyklach iteracji. Winslow [52] zastosował to samo postępowanie do badania szeregu zagadnień magnetostrykcyjnych. Na rys. 18.21 pokazano kilka dość efektywnych rozkładów pola w materiałach nieliniowych<sup>1)</sup>.

## 18.10. Inne możliwe zastosowania

Możliwe jest, oczywiście, inne bezpośrednie zastosowanie rozwiązań nieliniowych problemów opisanych powyżej. Przykładem może być zagadnienie przewodnictwa cieplnego w wysokich temperaturach, gdzie przewodność zależy od temperatury, albo problem laminarnego przepływu cieczy nienewtonowskiej. Sformułowanie ostroźnego zagadnienia jest identyczne z przepływem lepkiem (p. 15.6), z tym że lepkość zależy teraz od gradientu prędkości.

Dalsze możliwe zastosowania omówionych rozwiązań pozostawia się inwencji Czytelnika.

## Cytowane publikacje

- [1] O. C. Zienkiewicz, N. Valliappan, I. P. King: Stress analysis of rock as a „no-tension” material, Geotechnique, 18, s. 56—66, 1968.
- [2a] B. M. Irons, H. C. Turk: A variation of the Aitken accelerator for computer iteration, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, 275—8, 1969.
- [2b] O. C. Zienkiewicz, B. M. Irons: Matrix iteration and acceleration processes in finite element problems of structural mechanics, Chapter 9 of Numerical Methods for non-linear algebraic equations, ed. P. Rabinowitz, Gordon and Breach 1970.
- [3] T. J. Oden: Numerical formulation of non linear elasticity problems, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 93, 8173, s. 235—255, 1967.
- [4] R. von Mises: Mechanik der plastischen Formänderung der Kristallen, Z. angew. Math. Mech., 8, s. 161, 1928.
- [5] D. C. Drucker: A more fundamental approach to plastic stress-strain solutions, Proc. 1st U.S. natn. Cong. appl. Mech., s. 487—91, 1951.
- [6] W. T. Koiter: Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic plastic materials with a singular yield surface, Q. appl. Math., 11, s. 350—54, 1953.
- [7] W. Johnson, P. W. Mellor: Plasticity for Mechanical Engineers, Van Nostrand, Princeton 1962.
- [8] Y. Yamada, N. Yoshimura, T. Sakurai: Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastoplastic Problems by the Finite Element Method, Int. J. Mech. Sci., 10, s. 343—354, 1968.
- [9] O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan, I. P. King: Elasto-plastic solutions of engineering problems. Initial-stress, finite element approach, Int. J. Num. Meth. in Eng., 1, s. 75—100, 1969.
- [10] R. H. Gallagher, J. Padlog, P. B. Bittard: Stress analysis of heated complex shapes, J. Am. Rocket Soc., 32, s. 700—707, 1962.
- [11] J. H. Argyris: Elasto-plastic matrix displacement analysis of three-dimensional continua, J. Roy. Aeronaut. Soc., 69, s. 633—5, 1965.
- [12] G. G. Pope: A discrete element method for analysis of plane elasto-plastic strain problems, R.A.E. Farnborough T.R. 65028, 1965.
- [13a] T. L. Swedlow, M. L. Williams, W. M. Yang: Elasto-plastic stresses in cracked plates, Calif. Report 8M, 65—10, California Institute of Technology, 1965.
- [13b] J. L. Swedlow: Elastic plastic cracked plates in plane strain. Int. J. Fracture Mech., 5, s. 33—44, 1969.
- [14] P. V. Marcal, I. P. King: Elastic-plastic analysis of two dimensional stress systems by the finite element method, Int. J. Mech. Sci., 9, s. 143—155, 1967.
- [15] S. F. Reyes, D. U. Deere: Elasto-plastic analysis of underground openings by the finite element method, 11th Int. Congr. Rock Mechanics, II, s. 477—86, Lisbon, 1966.
- [16] E. P. Popov, M. Khojasteh-Bakht, S. Yaghtai: Bending of circular plates of hardening material, Intern. J. Nucl. Struct., 3, s. 975—988, 1967.
- [17] J. H. Argyris, D. W. Scharpf: Methods of elasto-plastic analysis, Symp. on Finite Element techniques, Stuttgart, lipiec 1969.
- [18] P. S. Theocaris, E. Markatos: Elastic-plastic analysis of perforated thin strips of strain-hardening material, J. Mech. Phys. Sol., 12, s. 377—90, 1964.
- [19] D. C. Drucker, W. Prager: Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Q. appl. Math., 10, s. 157—165, 1952.
- [20] A. W. Bishop: The strength of soils as engineering materials, Geotechnique, 16, s. 91—128, 1966.
- [21] O. C. Zienkiewicz: Continuum mechanics as an approach to rock mass problems, Chapter 8 of Rock Mechanics in Engineering Practice ed. K. G. Stagg and O. C. Zienkiewicz, J. Wiley & Son, 1969.
- [22] S. Valliappan: Non-Linear Stress Analysis of two-dimensional Problems with Special Reference to Rock and Soil Mechanics, Ph. D. Thesis, University of Wales, 1968.
- [23] Z. Mroz: Non associated laws in plasticity, J. Mec. & Phys. Appl., 2, s. 21—41, 1963.
- [24] E. M. Davis: Theories of plasticity and the failure of soil masses, Chapter 6 of Soil Mechanics, ed. I. K. I. I., Butterworth, 1969.
- [25a] O. C. Zienkiewicz, B. Best: Some non-linear problems in soil and rock mechanics—finite element solution, Conf. on Rock Mechanics, Univ. of Queensland, Townsville, June 1969.
- [25b] O. C. Zienkiewicz, B. Best, C. Dullage, K. G. Stagg: Analysis of non-linear problems in rock mechanics with particular reference to jointed rock systems, Proc. 2nd Congress on Rock Mechanics, Belgrade 1970.
- [26] S. Valliappan, P. Nath: Tensile crack propagation in reinforced concrete beams by finite element techniques, Int. Conf. on Shear Torsion and Bond in reinforced concrete, Coimbatore, India, stycznia 1969.
- [27] N. W. Krahl, W. Khachatryan, C. P. Seiss: Stability of tensile cracks in concrete beams, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 93, 8171, s. 235—254, 1967.
- [28] R. E. Goodman, R. L. Taylor, T. Brekke: A model for the mechanics of jointed rock, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 94, 8M3, s. 637—59, 1968.
- [29] A. Schols, E. M. Stover: The piecewise linear analysis of two connected structures including the affect of clearance at the connections, Int. J. Num. Meth. in Eng., 3, 45—52, 1971.
- [30] A. Mendelson, M. H. Hirschberg, S. S. Manson: A general approach to the practical solution of creep problems, J. of Basic Engineering, Trans ASME Series D, 81, s. 585—598, 1959.

<sup>1)</sup> W pracach [49] i [50] zastosowano iteracyjne rozwiązanie równań, co wpłynęło w sposób oczywisty na wybór metody.

- [131] O. C. Zienkiewicz, M. Watson, I. P. King: A numerical method of visco elastic stress analysis. Int. J. of Mech. Sci. 1968.
- [132] O. C. Zienkiewicz: The finite element method in structural and continuum mechanics (First edition) McGraw-Hill, 1967.
- [133] G. A. Greenbaum, M. F. Rubinstein: Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements, Nucl. Eng. and Design, 7, s. 379—397, 1968.
- [134] G. Trehurn: Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea, 1970.
- [135] R. H. Lee: Visco-elasticity in Handbook of Engineering Mechanics, ed. W. Flügge, McGraw-Hill, 1962.
- [136] R. H. Lee, T. R. M. Radok, W. B. Woodward: Stress analysis for linear visco-elastic materials, Trans. of the Soc. of Rheology, 3, s. 41—59, 1959.
- [137] P. A. Leckie, J. B. Martin: Deformation bounds for bodies in a state of creep, J. Appl. Mech., A.S.M.E., s. 411—417, ćwiczenie 1967.
- [138] I. Finnie, W. R. Heller: Creep of Engineering Materials, McGraw-Hill, 1959.
- [139] A. E. Johnson: Complex stress creep, Met. Rev., 5, s. 447, 1960.
- [140] C. O. Frederick, E. J. Chubb, W. P. Bromley: Cyclic loading of a tube with creep, plasticity and thermal effects, Applied Mechanics Convention, Proc. Inst. Mech. Eng., 180, s. 31, 1965.
- [141] O. C. Zienkiewicz: Analysis of visco-elastic behaviour of concrete structures with particular reference to thermal stresses, Proc. Am. Concr. Inst., 58, s. 383—394, 1961.
- [142] H. H. Hilton, H. G. Russell: An extension of Alfrey's analogy to thermal stress problems in temperature dependent, linear visco-elastic media, J. Mech. Phys Solids, 9, s. 152—164, 1961.
- [143] O. C. Zienkiewicz, M. Watson, Y. K. Cheung: Stress analysis by the finite element method — thermal effects, Proc. Conf. on Prestressed Concrete Pressure Vessels, Inst. Civ. Eng., London 1967.
- [144] H. Malina: Berechnung von Spannungsanlagerungen in Fels und Boden mit Hilfe der Elementenmethode. Veröffentlichungen Un v. Karlsruhe, 40, s. 1—90, 1969.
- [145] G. C. Nayak: Plasticity and large deformation problems by finite element method, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1971.
- [146] O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan: Analysis of real structures for creep, plasticity and other complex constitutive laws, Conf. on Materials in Civ. Eng. Univ. of Southampton, 1969.
- [147] P. H. Forchheimer: Wasserbewegung durch Boden, Zeit. Ver. Dt. Ing. s. 1782, 1901.
- [148] M. Muskat: The flow of homogeneous fluids through porous media, J. W. Edwards Inc., 1946.
- [149] R. E. Volker: Numerical solutions to problems of nonlinear flow through porous media, Ph. D. thesis, University of Queensland, Townsville, 1969.
- [150] A. M. Winslow: Numerical solution of the quasi-linear Poisson's equation in a non uniform triangle mesh, J. Comp. Physics, 1, s. 149—172, 1967.
- [151] N. Ahmed, D. K. Suresh: Non-linear flow in porous media, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 95, HY6, 1847—59, 1969.
- [152] A. M. Winslow: Numerical solution of the quasi-linear Poisson's equation in a non-uniform triangle mesh, J. Comp. Physics, 1, 149—72, 1967.

## 19. Zagadnienia geometrycznie nieliniowe — duże odkształcenia i stateczność budowli

### 19.1. Wstęp

Poprzednio rozważaliśmy zagadnienia nieliniowości wynikające z własności materiału i przedstawiliśmy metody pozwalające na zastosowanie standardowych form liniowych dla uzyskania rozwiązań na drodze iteracyjnej. W ten sam sposób rozważamy obecnie zagadnienia nieliniowości geometrycznej.

We wszystkich badanych dotąd zagadnieniach z góry zakładaliśmy, że zarówno przemieszczenia jak i odkształcenia układu są małe. Praktycznie oznacza to, że geometria elementu pozostaje w zasadzie nie zmieniona podczas procesów obciążenia i że można zatem przyjąć liniowe przybliżenie pierwszego rzędu.

W praktyce takie założenie często zawodzi, mimo iż rzeczywiste odkształcenia mogą być małe i granice sprężystości zwykłych materiałów konstrukcyjnych nie są przekroczone. Gdy niezbędne jest dokładne wyznaczenie przemieszczeń, należy w pewnych, szczególnych przypadkach uwzględnić geometryczną nieliniowość układów. Tak np. naprężenia wywołane wybočeniem płyty mogą powodować większy wzrost przemieszczeń niż wynikałoby to z rozwiązania liniowego, chociaż same przemieszczenia pozostają stosunkowo nieznaczne. Odwrotnie, można stwierdzić, że wytrzymałość jest osiągnięta w miejscach, gdzie ugięcia wzrastają bardziej gwałtownie niż przewiduje to rozwiązanie liniowe, i istotnie, może być osiągnięty stan, przy którym nośność *maleje* z narastaniem deformacji. Takim klasycznym problemem jest tutaj problem stateczności konstrukcji. Zastosowanie analizy geometrycznej nieliniowości ma także duże znaczenie w inżynierii lotniczej i kosmicznej, projektowaniu radioteleskopów, wież chłodniczych i innych smukłych konstrukcji.

Duże przemieszczenia mogą zachodzić w pewnych przypadkach nie wywołując dużych odkształceń. Typowym w tym przypadku jest problem „elastyki”, jednym z przykładów którego jest sprężyna zegarka.

W niniejszym rozdziale postaramy się przedstawić i przedstawić ogólny sposób postępowania przy ich rozwiązywaniu.

Jeden z aspektów geometrycznej nieliniowości nie jest omawiany szczegółowo. Jest to przypadek dużych odkształceń, jakie mogą wystąpić także i w obszarze sprężystym, np. w gumie i podobnych materiałach. Tutaj należy wprowadzić specjalne związki między naprężeniami i odkształceniami [1], a zakres niniejszej książki nie pozwala na ich wyczerpującą dyskusję. Jednakże ogólne metody postępowania podane w następnym punkcie można stosować i dla takich materiałów, pod warunkiem wprowadzenia odpowiednich praw wiążących naprężenia i odkształcenia.

Geometryczna nieliniowość wiąże się często z równoczesną nieliniowością fizyczną materiału, w postaci omawianej w poprzednim rozdziale, jak np. małe odkształcenia plastyczne itd. W zasadzie nie wprowadza to dodatkowych komplikacji i metody podane poniżej można łatwo rozciągnąć także i na takie przypadki.

## 19.2. Rozważania ogólne

**19.2.1. Problem podstawowy.** Niezależnie od tego czy przemieszczenia (lub odkształcenia) są duże czy małe, warunki równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych muszą być spełnione. Jeżeli zatem przemieszczenia zadane są w zwykły sposób poprzez skończoną liczbę węzłowych parametrów  $\{\delta\}$  (por. rozdz. 2 i p. 18.13), wtedy

$$\{\psi(\{\delta\})\} = \int_V [\bar{B}]^T \{\sigma\} dV - \{\bar{R}\} = 0, \quad (19-1)$$

gdzie  $\{\psi\}$  znów przedstawia sumę zewnętrznych i wewnętrznych sił uogólnionych,  $[B]$  zaś jest zdefiniowane poprzez związek odkształcenie-naprężenie

$$d\{\varepsilon\} = [\bar{B}] d\{\delta\}. \quad (19-2)$$

Kreska u góry oznacza zależność macierzy  $[\bar{B}]$  od przemieszczeń, ponieważ wskutek dużych przemieszczeń odkształcenia nie są już liniowo związane z przemieszczeniami. Pokażemy później, że można zapisać tę zależność w postaci

$$[\bar{B}] = [B_0] + [B_L(\{\delta\})], \quad (19-3)$$

gdzie  $[B_0]$  jest taką samą macierzą, jaka wystąpiłaby w przypadku liniowych, nieskończenie małych odkształceń, natomiast  $[B_L]$  przedstawia zależność od przemieszczeń  $\{\delta\}$ . Ogólnie biorąc  $[B_L]$  można traktować jako *liniową funkcję* tych przemieszczeń.

Jeżeli odkształcenia są dostatecznie małe, można nadal stosować ogólne równanie sprężystości

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (19-4)$$

w którym  $[D]$  jest macierzą stałych sprężystych, jak poprzednio<sup>1)</sup>.

Można jednak zapisać równie dobrze każdy nieliniowy związek „naprężenie-odkształcenie”, ponieważ całkowity przebieg rozwiązania zawsze sprowadza się do rozwiązania nieliniowego układu równań.

Wydaje się celowe powtórzyć być może oczywiste stwierdzenie, że w równaniu (19-1) całkowania dokonuje się w istocie element po elemencie, a udziały poszczególnych elementów w równowadze węzła dodaje się do siebie w zwykły sposób.

**19.2.2. Procesy iteracyjne.** Oczywiście, rozwiązania równania (19-1) dokonujemy na drodze iteracyjnej. Ogólne metody postępowania opisane w poprzednim rozdziale (p. 18.3) pozostają słuszne i tutaj.

Jeżeli stosujemy iterację Newtona, należy, jak to było już wyjaśnione, znaleźć związek między  $d\{\delta\}$  a  $d\{\psi\}$ . Dokonując odpowiednich wariacji równań (19-1) ze względu na  $d\{\delta\}$  mamy<sup>2)</sup>

$$d\{\psi\} = \int_V d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dV + \int_V [\bar{B}]^T d\{\sigma\} dV, \quad (19-5)$$

stosując zaś dalej (19-4) i (19-2) otrzymujemy

$$d\{\psi\} = [D] d\{\varepsilon\} = [D][\bar{B}] d\{\delta\},$$

z (19-3) natomiast mamy

$$d[\bar{B}] = d[B_L].$$

Zatem

$$d\{\psi\} = \int_V d[B_L]^T \{\sigma\} dV + [\bar{K}] d\{\delta\}, \quad (19-6)$$

gdzie

$$[\bar{K}] = \int_V [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] dV = [K_0] + [K_L]. \quad (19-7)$$

Tutaj  $[K_0]$  przedstawia zwykłą macierz sztywności dla małych przemieszczeń, tj.

$$[K_0] = \int_V [B_0]^T [D] [B_0] dV. \quad (19-7a)$$

<sup>1)</sup> Należy pamiętać, że składowe naprężenia definiowane w (19-4) mają odpowiadać przyjętym składowym odkształceniom. W niektórych dużych pomieszczeniach takie odkształcenia odchyliły się czasem od kierunków początkowych stałych osi.

<sup>2)</sup> W przypadku związków nieliniowych  $[D] = [D(\{\sigma\})]$  jest przystosowaną macierzą sprężystości, jak to było w (18-15).

Macierz  $[K_L]$  pochodzą od dużych przemieszczeń i wyraża się jako

$$[K_L] = \int_V ([B_0]^T [D] [B_L] + [B_L]^T [D] [B_L] + [B_L]^T [D] [B_0]) dV. \quad (19-7b)$$

$[K_L]$  jest często nazywana *macierzą początkowych przemieszczeń* [2], *macierzą dużych przemieszczeń* itd. Można pokazać, że macierz ta może być otrzymana za pomocą postępowania, jak dla macierzy przy małych przemieszczeniach. Należy wtedy dostosować odpowiednie współrzędne elementu przy obliczeniu sztywności.

Pierwszy wyraz w (19-6) można ogólnie zapisać (jest to może mniej oczywiste, zanim nie rozpatrzymy szczególnych przypadków) jako

$$\int_V d[B_L]^T \{\sigma\} dV = [K_\sigma] d\{\delta\}, \quad (19-8)$$

gdzie  $[K_\sigma]$  jest macierzą symetryczną, zależną od stanu naprężeń. Macierz ta nazywa się *macierzą naprężeń początkowych* [2] lub *macierzą geometryczną* [3], [4]. Zatem

$$d\{\psi\} = ([K_0] + [K_\sigma] + [K_L]) d\{\delta\} = [K_T] d\{\delta\}. \quad (19-9)$$

Macierz  $[K_T]$  jest ogólną *macierzą sztywności stycznej*. Iteracja typu newtonowskiego może być znów zastosowana dokładnie tak, jak podano w p. 18.3.

Podsumowując:

- rozwiązanie liniowo-sprężyste daje pierwsze przybliżenie  $\{\delta\}$ ,
- $\{\psi\}_1$  znajduje się za pomocą (19-1), przy odpowiednim określeniu  $[\bar{B}]$  i naprężeń, jak podano np. w (19-4), lub w oparciu o inne liniowe lub nieliniowe prawo,
- znajduje się macierz  $[K_T]$ , a następnie
- ustala się poprawkę jako

$$\Delta\{\delta\}_1 = -[K_T]^{-1} \{\psi\}_1,$$

po czym powtarza się postępowanie aż do chwili, gdy  $\{\psi\}_n$  stanie się dostatecznie małe.

Można znów użyć stałej macierzy przy powiększeniu liczby kroków iteracji, korzystając z półodwrotnego procesu rozwiązania przy małym koszcie czasu maszyny, jeżeli przy każdym kroku  $\{\psi\}_n$  oblicza się z poprawnego wyrażenia [5].

Chociaż wszystkie rozwiązania można uzyskać w pojedynczym kroku operacji dla całego obciążenia, to czasami, jak we wszystkich zagadnieniach nieliniowych, istnieje możliwość niejednoznacznego rozwiązania; można więc otrzymać wynik nie mający sensu fizycznego. W takich przypadkach zaleca się postępowanie poprzez stopniowe zwiększanie obciążenia i uzyskiwanie nieliniowego rozwiązania dla każdego przyrostu tego obciążenia. Czasami jest to istotnie tańsze ze względu na czas maszyny, ponieważ efekt nieliniowości w każdym kroku redukuje się. Istotnie, jeśli przyrosty obciążenia są dość małe, wówczas każde kolejne rozwiązanie można uzyskać dość dokładnie w jednym kroku [3], [4], [6]. Ważne jest jednak sprawdzić okresowo równowagę ogólną, stosując pełne równanie (19-1).

**19.2.3. Problem matematyczny początkowej.** Warto w tym miejscu odnotować, że macierz  $[K_\sigma]$  nie zawiera w sposób jawny przemieszczeń i jest proporcjonalna do wartości naprężeń  $\{\sigma\}$ . Jeśli zatem przy pierwszym kroku obliczeń znajdziemy  $\{\sigma\}$  za pomocą liniowego rozwiązania, otrzymamy z (19-6), że

$$d\{\psi\} = ([K_\sigma] + [K_0]) d\{\delta\}, \quad (19-10)$$

(jeżeli przy tym kroku było  $[K_L] = 0$ ). Gdy obciążenie wzrośnie o czynnik  $\lambda$ , możemy stwierdzić, że istnieje równowaga obojętna, tj.

$$d\{\psi\} = ([K_0] + \lambda[K_\sigma]) d\{\delta\} \equiv 0, \quad (19-11)$$

gdzie  $\lambda$  otrzymuje się poprzez rozwiązanie typowego zagadnienia wartości własnych określonego poprzednio.

Jest to klasyczny problem stateczności początkowej, jaki występuje w zagadnieniach wybożenia prętów, płyt, powłok itd.

W literaturze stosuje się dość często ten sposób postępowania, nawet poza przedziałem jego stosowności. „Stateczność początkowa” może dać poprawne wyniki tylko wtedy, gdy rozwiązanie sprężyste odpowiadające macierzy  $[K_0]$  daje takie odkształcenia, przy których *macierz dużych deformacji  $[K_L]$  jest taksu-mościowo równa zeru*. Zdarza się to jedynie w bardzo ograniczonej liczbie sytuacji praktycznych (np. idealnie prosty pręt pod obciążeniem osiowym, pełna kula pod równomiernym ciśnieniem itd.). Zaabsorbowanie badaczy przedmiotem „początkowych niedokładności” jest ściśle ograniczone do takich sytuacji, gdy np. może wystąpić rzeczywista utrata stateczności kształtu. W realnych problemach inżynierskich takie zagadnienia muszą być badane przy zastosowaniu pełnej macierzy sztywności stycznej [6]. Gdy  $[K_T] d\{\delta\} = 0$  otrzymujemy równowagę obojętną. Postępowanie krok po kroku staje się tutaj niewątpliwie konieczne.

**19.2.4. Energetyczna interpretacja kryteriów stateczności.** W rozdz. 2 pokazano, że praca wirtualna podczas zmiennego przemieszczenia  $d\{\delta\}$  jest równa zmianie całkowitej energii potencjalnej  $\chi$ . Zatem w przypadku równowagi

$$d\chi = d\{\delta\}^T \{\psi\} = 0, \quad (19-12)$$

tj. *całkowita energia potencjalna jest stacjonarna* (co jest równoważne równaniu (19-1)).

Druga wariacja  $\chi$  zgodnie z (19-9) jest

$$d^2\chi = d(d\chi) = d\{\delta\}^T d\{\psi\} = d\{\delta\}^T [K_T] d\{\delta\}. \quad (19-13)$$

Kryterium stateczności wyraża się poprzez dodatnią wartość tej drugiej wariacji; jej wartość ujemna oznacza niestateczność. W pierwszym bowiem przypadku należy dodać energię do układu, w drugim — układ ma nadwyżkę tej energii. Innymi słowy, *jeżeli  $[K_T]$  jest dodatnio określona, stateczność istnieje*. Kryterium to jest znane i bardzo użyteczne przy badaniu stateczności w przypadku dużych deformacji<sup>1)</sup> [7], [8], [9].

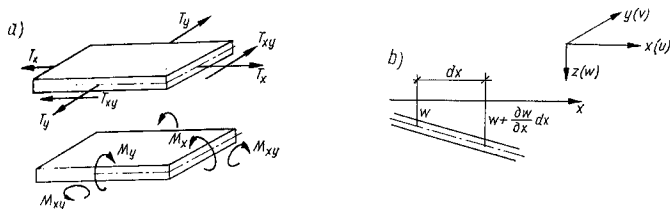
<sup>1)</sup> Odmienne, chociaż mniej praktyczne, sprawdzenie polega na zbadaniu znaku wyznacznika  $[K_T]$ , [9].

**19.2.5. Siły zależne od deformacji.** Wyprowadzając równanie (19-5) założono z góry, że siły  $\{R\}$  nie zależą od deformacji. W pewnych okolicznościach nie jest to słuszne, np. gdy obciążenia działają na silnie odkształcalny układ. Podobnie, niektóre siły aerodynamiczne zależą od deformacji układu.

Jeśli siły zmieniają się w zależności od deformacji, w równaniu (19-5) należy rozpatrywać wariację  $d\{R\}$  ze względu na  $d\{\delta\}$ . Stateczność i duże odkształcenia pod takimi (nie zachowawczymi) obciążeniami można badać pod warunkiem, że przytoczona powyżej zależność zostanie wzięta pod uwagę.

### 19.3. Duże ugięcia i początkowa stateczność płyt

**19.3.1. Definicje.** Rozpatrzmy jako pierwszy przykład zagadnienie związane z odkształceniem płyt poddanych działaniu sił w płaszczyźnie i obciążeń poprzecznych, gdy przemieszczenia nie są nieskończenie małe, lecz także i nie nadmierne. Wiadomo, że w tym przypadku przemieszczenia poprzeczne wpływają na wartości odkształceń typu membranowego; toteż dwa zagadnienia: odkształceń w płaszczyźnie i odkształceń poprzecznych są teraz ze sobą *sprzężone* i nie mogą być rozpatrywane oddzielnie.



Rys. 19.1. Siły wewnętrzne w płycie: a) wypadkowe naprężeń w płaszczyźnie i naprężeń od zginania  $\{\sigma\}$ , b) przyrost długości na powierzchni środkowej spowodowany przemieszczeniami poprzecznymi

Jak i poprzednio będziemy opisywać „odkształcenia” płyty w zależności od przemieszczeń jej powierzchni środkowej. Jeżeli płaszczyzna  $x-y$  pokrywa się z powierzchnią środkową, jak na rys. 19.1a, wówczas mamy

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{pl} \\ \varepsilon_b \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{pl} \\ \sigma_b \end{Bmatrix} \quad (19-14)$$

„Naprężenia” definiowane są w zależności od wypadkowych sił wewnętrznych<sup>1)</sup>:  $T_x$ ,  $\sigma_{xt}$ , gdzie  $\sigma_x$  jest średnim naprężeniem membranowym itd. Jeżeli teraz rozpatrzmy powierzchnię odkształconą (rys. 19.1b), to zobaczymy, że przemieszczenie  $w$  powoduje dodatkowe rozciąganie w kierunkach  $x$  i  $y$  powierzchni środkowej i element długości  $dx$  staje się teraz

$$dx' = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dots\right]$$

lub, określając wydłużenie w kierunku  $x$  w zależności od przemieszczeń, możemy z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu włącznie napisać

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Rozpatrując w podobny sposób dalsze składowe [10] możemy przedstawić odkształcenia w postaci

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{pl}^0 \\ \varepsilon_b^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{pl}^L \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19-15)$$

gdzie pierwsze wyrazy są to wyrażenia liniowe, wielokrotnie przez nas stosowane, drugie zaś dają związki nieliniowe.

Jeżeli rozpatrujemy tylko liniowe, sprężyste zachowanie się płyty, macierz  $[D]$  jest złożona z macierzy stanu membranowego i macierzy zginania, tj.

$$[D] = \begin{bmatrix} [D^{pl}] & 0 \\ 0 & [D^b] \end{bmatrix} \quad (19-16)$$

Wreszcie przemieszczenia zdefiniowane są w zależności od parametrów węzłowych za pomocą odpowiednich funkcji kształtu. Tak więc np.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\}^e, \quad (19-17)$$

<sup>1)</sup> Składowe membranowe i od zginania są tutaj zaznaczone za pomocą odpowiednich indeksów:  $\sigma_{pl}$  i  $\sigma_b$ ,  $\varepsilon_{pl}$  i  $\varepsilon_b$ .

przy czym typowy układ parametrów węzłowych  $\{\delta^p\}$  jest zginaniem, i te, które powodują zginania

$$\{\delta_i\} = \left\{ \delta_i^{pl} \right\}, \text{ gdzie } \{\delta_i^{pl}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \text{ jak w rozdz. 3;} \quad (19-18)$$

$$\{\delta_i^b\} = \left\{ \begin{Bmatrix} w_i \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \right\}_i \text{ jak w rozdz. 10.}$$

Podobnie można również podzielić i funkcje kształtu

$$[N_i] = \begin{bmatrix} [N_i]^{pl} & 0 \\ 0 & [N_i]^b \end{bmatrix} \quad (19-19)$$

a ponadto należy założyć, że całkowity wektor przemieszczeń jest również podzielną w sposób podany w równaniu (19-18).

Jest to wygodne dlatego, że — z wyjątkiem odkształceń nieliniowych — wszystkie poprzednie definicje zagadnienia liniowego są nadal stosowalne i nie będziemy ich tutaj ponownie omawiać.

**19.3.2. Obliczenie macierzy  $[\bar{B}]$ .** Dla dalszych rozważań należy ustalić wyrażenia dla macierzy  $[\bar{B}]$  i  $[K_T]$ . Zauważmy najpierw, że

$$[\bar{B}] = [B_0] + [B_L], \quad (19-20)$$

gdzie

$$[B_0] = \begin{bmatrix} [B_0^b] & 0 \\ 0 & [B_0^l] \end{bmatrix}; \quad [B_L] = \begin{bmatrix} 0 & [B_L^l] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz gdzie  $[B_0^b]$ ,  $[B_0^l]$  są to dobrze znane standardowe macierze, odpowiednio dla obciążenia w płaszczyźnie i dla zginania, natomiast  $[B_L^l]$  znajduje się poprzez wariację  $\{\varepsilon_i^L\}$  ze względu na parametry węzłowe  $\{\delta^p\}$ . Ten nieliniowy składnik odkształcenia (19-15) wygodnie jest zapisać w postaci

$$\{\varepsilon_i^L\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A] \{\theta\}. \quad (19-21)$$

Pochodną (nachylenie)  $w$  można wyrazić poprzez parametry węzłowe  $\{\delta^p\}$  jako

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G] \{\delta^p\}, \quad (19-22)$$

gdzie

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^b}{\partial x} & \frac{\partial N_j^b}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_i^b}{\partial y} & \frac{\partial N_j^b}{\partial y} & \dots \end{bmatrix}. \quad (19-23)$$

Tak więc  $[G]$  jest macierzą określoną wyłącznie w zależności od współrzędnych. Wyznaczając wariację równania (19-21) mamy<sup>1)</sup>

$$d\{\varepsilon_i^L\} = \frac{1}{2} d[A] \{\theta\} + \frac{1}{2} [A] d\{\theta\} = [A] d\{\theta\} = [A][G] d\{\delta^p\}, \quad (19-24)$$

stąd zaś bezpośrednio, poprzez definicję

$$[B_L^l] = [A][G]. \quad (19-25)$$

<sup>1)</sup> Przekształcenie (19-24) wynika z interesującej własności macierzy  $[A]$  i  $\{\theta\}$ . Łatwo sprawdzić, że jeśli  $\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$  jest dowolnym wektorem, wtedy

$$d[A] \{x\} = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} d\{\theta\},$$

zatem

$$d[A] \{\theta\} = [A] d\{\theta\}.$$

Podobnie, jeśli

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

to

$$d[A]^T \{y\} = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_2 \end{bmatrix} d\{\theta\}.$$

Tę ostatnią zależność wykorzystamy później.

**19.3.3. Obliczenie**  $[K_T]$ . Liniowe macierze małych odkształceń zapisane były jako

$$[K_0] = \begin{bmatrix} [K_0^x] & 0 \\ 0 & [K_0^y] \end{bmatrix} \quad (19-26)$$

stosując odpowiednie wyrażenia z rozdz. 3 i 10. Macierze dużych przemieszczeń można określić za pomocą równania (19-7b), podstawiając tam (19-20). Po pewnych przekształceniach otrzymujemy

$$[K_L] = \begin{bmatrix} 0 & [B_0^x]^T & [D^x] & [B_0^x] \\ \text{sym.} & [B_0^y]^T & [D^y] & [B_0^y] \end{bmatrix} \quad (19-27)$$

Wreszcie  $[K_\sigma]$  można znaleźć w oparciu o (19-8). Z (19-20) dokonując wariacji mamy

$$d[B_L]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d[B_0^x]^T & 0 \end{bmatrix} \quad (19-28)$$

co po podstawieniu do (19-9) i (19-25) daje

$$[K_\sigma]d\{\delta\} = \int_V [G]^T d[A]^T \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} dV. \quad (19-29)$$

Uwzględniając własności opisane w uwadze pod tekstem na str. 367 można napisać

$$d[A]^T \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} d\{\theta\} = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} [G]d\{\delta^b\}$$

i ostatecznie otrzymujemy

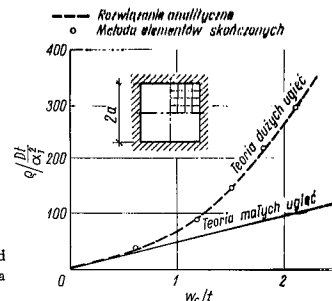
$$[K_\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_\sigma^b] \end{bmatrix} \quad (19-30)$$

gdzie

$$[K_\sigma^b] = \int_V [G]^T \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} [G] dV \quad (19-31)$$

jest dobrze znaną, symetryczną postacią macierzy naprężeń początkowych w płycie.

**19.3.4. Zagadnienie dużych ugięć.** Wszystkie wyrażenia niezbędne dla obliczenia dużych ugięć płyty są więc już znane. Najpierw znajdziemy przemieszczenia odpowiadające małym odkształceniom w zadaniu niesprężonym. Określają one aktualne odkształcenia przy uwzględnieniu udziału składnika nieliniowego zdefiniowanego przez (19-21) wespół z odpowiednimi udziałami składników



Rys. 19.2. Ugięcie środka płyty kwadratowej pod obciążeniem równomiernym [8]:  $u = v = 0$  na krawędzi

liniowych. Odpowiadające tym odkształceniom naprężenia można znaleźć za pomocą związków sprężystości i zgodnie z (19-1) określić  $\{\psi\}_0$ . Dla kolejnych przybliżeń znajdujemy  $[K_T]$  wg (19-26), (19-27) i (19-30).

Uzyskane w ten sposób rozwiązanie (por. [9] oraz rys. 19.2) pokazuje wzmocnienie płyty przy rosnących odkształceniach, wynikające z uwzględnienia naprężeń membranowych. W narożach płyty zarówno odkształcenia w płaszczyźnie, jak i zginające są skrupowane. Wyniki wskazują na znakomitą zgodność z rozwiązaniem analitycznym.

Macierz sztywności elementu wyprowadzono przy wykorzystaniu najprostszych funkcji dla prostokąta (podanych w rozdz. 7 dla sił w płaszczyźnie, a dla zginania — niedostosowane funkcje kształtu dla prostokąta, jak w p. 10.4).

Kilka innych przykładów dużych odkształceń płyt, rozwiązanych za pomocą metody elementów skończonych, podano w pracach [11] ÷ [15].

**19.3.5. Stateczność kształtu.** W niektórych praktycznych przypadkach, jak np. w klasycznym zagadnieniu *Eulera*, występuje problem nieodpowiedniości odkształcenia i obciążenia (ugięcie nie „odpowiada” sile osiowej). Rozpatrzmy przykład płyty obciążonej wyłącznie w jej płaszczyźnie. Dopóki nie powstanie ugięcie poprzeczne  $w$  ma zastosowanie teoria małych odkształceń, dając poprawne rozwiązanie. Jednakże macierz naprężeń początkowych  $[K_0^b]$  można wyznaczyć nawet dla zerowych przemieszczeń chociaż  $[K_L] = 0$ . Jeśli naprężenia w płaszczyźnie płyty są ujemne, macierz ta na ogół ma taką postać, że można znaleźć rzeczywiste wartości własne równania odkształceń od zginania z zależności

$$([K_0^b] + \lambda[K_0^b])\{\delta^b\} = 0, \quad (19-32)$$

gdzie  $\lambda$  oznacza czynnik wzrostu naprężeń w płaszczyźnie, niezbędny do osiągnięcia stanu równowagi obojętnej.

Przy takim wzrastającym obciążeniu zachodzi utrata stateczności kształtu i ugięcia poprzeczne mogą wystąpić bez żadnego obciążenia poprzecznego.

Zagadnienie formuluje się w prosty sposób poprzez zapisanie równania zginania przy  $[K_0^b]$  określonym jak w rozdz. 10 i  $[K_0^b]$  znalezionym z (19-31).



Wartości  $C$  dla płyty kwadratowej swobodnie podpartej, ściskanej w jednym kierunku

	Niedostosowane		Dostosowane	
	Prostokąty [13] 12 st. sw.	Trójkąty [15] 9 st. sw.	Prostokąty [16] 16 st. sw.	Czworoboki [17] 16 st. sw.
2 × 2		3,22		
4 × 4	3,77	3,72	4,015	4,029
8 × 8	3,93	3,90	4,001	4,002

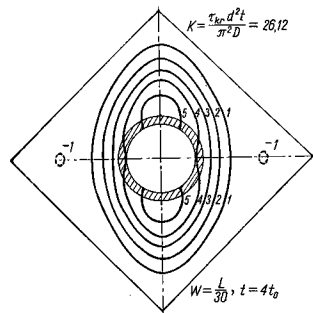
Ściskanie:  $C = 4,00$ 

Punkty takiej „rozpoczynającej się” niestateczności (wyboczenia) dla szeregu zagadnień płyt były określane przy użyciu różnych rodzajów elementów [16] ÷ [21]. Pewne wyniki porównawcze dla swobodnie podpartej, kwadratowej płyty, poddanej równomiernemu ciśnieniu  $T_x$  w jednym kierunku, pokazano w tabl. 19.1. Parametr wyboczenia zdefiniowano tutaj jako

$$C = T_x a^2 / \pi^2 D,$$

gdzie  $a$  jest długością boku płyty,  $D$  zaś — sztywnością zginania.

Zastosowane tutaj elementy omawiane były w rozdz. 10. Warto odnotować, że wszystkie dostosowane elementy dawały wartość z nadwyżką, elementy zaś niedostosowane — z niedomiarem.



Rys. 19.3. Postać wyboczenia płyty kwadratowej przy ścinaniu; krawędzie zamocowane, otwór w środku wzmocniony pierścieniem

Na rysunku 19.3 pokazano postacie wyboczenia dla geometrycznie bardziej złożonego przypadku [19]. Tutaj użyto elementów niedostosowanych.

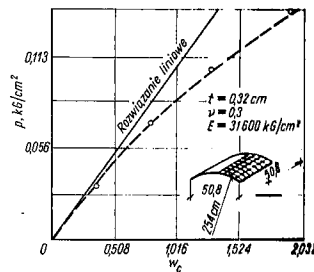
Tęgo rodzaju zagadnienia początkowej niestateczności w płytach mają ograniczoną wartość praktyczną. Gdy tylko bowiem powstanie ugięcie poprzeczne, sztywność płyty wzrasta i można dodawać dalsze obciążenie (por. rys. 19.2). Zachowanie się po wyboczeniu musi zatem być badane za pomocą teorii dużych deformacji, co opisano w poprzednich paragrafach [22] ÷ [24]. Aby uniknąć trudności z niejednoznacznością rozwiązania, należy stosować metodę małej perturbacji (lub poprzeczne obciążenie).

## 19.4. Powłoki

Zagadnienia stateczności powłok mają znacznie większe znaczenie niż stateczność płyt. Tutaj, na ogół, dla rozwiązania zagadnienia muszą być określone macierze sztywności stycznej  $[K_T]$  przy uwzględnieniu stanu deformacji, ponieważ szczególne przypadki niesprężonych stanów błonowego i zgięciowego nie może tutaj mieć miejsca (z wyjątkiem, może, przypadków trywialnych). Chociaż na początku utraty stateczności macierz  $[K_e]$  jest określona dla naprężeń sprężystych, niolnu czasami za jej pomocą otrzymać pożyteczne wyniki, dotyczące czynnika stateczności  $\lambda$ . W klasycznych pracach poświęconych wyboczeniu powłok rozpoczyna się prawie wyłącznie tę początkową stateczność. Rzeczywiste jednak obciążenie krytyczne może leżeć znacznie poniżej obciążenia odpowiadającego stateczności początkowej. Należy zatem określić, choćby w sposób przybliżony, wpływ odkształcenia (przy badaniu stateczności początkowej wpływ ten jest pomijany).

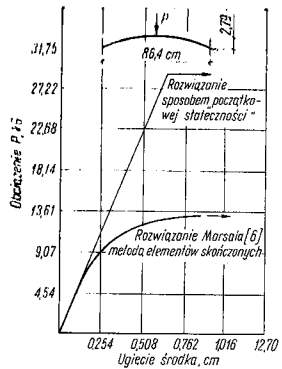
Jeżeli założymy, że powłoka zbudowana jest z płaskich elementów płytowych, można dokonać na macierzy sztywności stycznej takich samych transformacji, jak podane w rozdz. 11 [25], [26]. Jeżeli stosujemy zakrzywione elementy powłoki, należy powrócić do równania teorii powłok i włączyć do niego człony nieliniowe [9], [27]. Odsyłamy Czytelnika do wymienionych prac, gdzie znajdzie On pełne wyjaśnienie zagadnienia.

Należy ponownie podkreślić, że obliczenia początkowej stateczności mają sens tylko w szczególnych przypadkach i że często dają one zawyżoną wartość obciążenia krytycznego. Dla uzyskania poprawnej odpowiedzi należy traktować problem jako w pełni nieliniowy. Postępujące „zmiękczenie się” powłoki pod obciążeniem, znacznie mniejszym od wyliczonego na podstawie zlinearyzowanej teorii



Rys. 19.4. Ugięcie powłoki walcowej w środku. Wszystkie krawędzie zamocowane [8]

wyboczenia, pokazano na rys. 19.4 wg [9]. Rysunek 19.5 pokazuje postępujące zniszczenie łuku przy obciążeniu znacznie mniejszym od wyznaczonego na podstawie liniowej teorii wyboczenia [6].



Rys. 19.5. „Początkowa stateczność” i rozwiązania przyrostowe dla dużych odkształceń łuku pod siłą skupioną w środku

Obliczenie aktualnego obciążenia prowadzącego do wyboczenia powłoki lub inne wiotkie konstrukcje sprawia zrozumiałe trudności, których istotę omówiono w rozdz. 18. Nie udaje się bowiem uzyskać zbieżności przemieszczeń w obszarze, w którym obciążenie zbliża się do wartości nośności granicznej.

Dlatego w przypadku obciążenia siłą skupioną wygodniej postępować w ten sposób, że z a d a w a n e są wartości przemieszczeń, a o b l i c z a n e odpowiednie reakcje. *Argyris* [4] uzyskał w ten sposób pełny obraz zachowania się łuku przy zniszczeniu.

*Pian* i *Ping Tong* [28] pokazali, w jaki sposób można uogólnić to postępowanie w przypadku, gdy rozpatrywany jest układ obciążeń proporcjonalnych.

Odmienne sposoby postępowania przy badaniu problemów zniszczenia opisane zostały w pracach [29]–[33], a w chwili obecnej dokonuje się istotnego postępu w tym ważnym zagadnieniu.

## 19.5. Ogólne sformułowania zagadnienia dużych odkształceń i przemieszczeń

Nieliniowe związki między odkształceniami a przemieszczeniami dla płyt zastosowane w p. 19.3 (19–15) wyprowadzone były na zasadzie *ad hoc*. Podobne związki można wyprowadzić dla powłok; we wszystkich jednak przypadkach możliwy jest inny sposób przybliżenia. Istnieje wszakże możliwość zastosowania ogólnej definicji odkształcenia *ważnego niezależnie od tego, czy przemieszczenia lub odkształcenia są duże czy małe*. Taka definicja wprowadzona została przez *Greena* i *St-Venant* i znana jest pod nazwą tensora odkształceń *Greena*. W odniesieniu do nieruchomego kartezjańskiego układu współrzędnych  $x, y, z$  przemieszczenia  $u, v, w$  określają odkształcenia [34] jako

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (19-33)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

a dalsze składowe otrzymuje się przez cykliczne przestawienie. Gdy przemieszczenia są małe, otrzymuje się znane liniowe przybliżenie przez pominięcie wyrazów drugiego stopnia.

Interpretacja geometryczna powyższej definicji odkształceń nie jest w ogólnym przypadku oczywista; należy pamiętać, że oznaczają one miarę wydłużenia i odkształcenia postaciowego pierwotnie prostokątnego elementu.

Gdy aktualne wartości odkształceń są małe, łatwo zauważyć, że  $\epsilon_x$  określa zmianę długości jednostkowej *pierwotnie skierowanej wzdłuż osi x*,  $\gamma_{xy}$  zaś daje zmianę kąta między dwiema liniami, *pierwotnie równoległymi do osi x i y*. Jest to słuźne w powyższej definicji także w przypadku, gdy zaszły duże ruchy, przemieszczające lub obracające pierwotny wektor o duże wartości.

Ustalmy teraz ogólne, nieliniowe wyrażenia dla  $[B]$  i  $[K_T]$  w przypadku pełnego stanu trójwymiarowego naprężeń. Z tych wyrażeń można następnie uzyskać w prosty sposób wyrażenia dla jedno- i dwuwymiarowego zagadnienia; pozostawimy to Czytelnikowi jako ćwiczenie. Ponadto zagadnienia płyt i powłok można będzie przy okazji zbadać w oparciu o takie ogólne sformułowania i przez pominięcie niektórych wyrazów typowych dla specjalnych przypadków, jak np. problem płyty omawiany poprzednio.

**19.5.1. Macierz  $[B_L]$ .** Ogólny wektor odkształcenia w stanie trójwymiarowym można zdefiniować poprzez wyraz uzyskany z analizy małych wielkości i wyrzucić zależny od dużych odkształceń

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + \{\epsilon^L\}, \quad (19-34)$$

gdzie

$$\{\epsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (19-35)$$

dokładnie tak samo, jak podano w rozdz. 6. Nieliniowe czony (19-33) wygodnie jest zapisać w postaci

$$\{\varepsilon^L\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \{\theta_x\}^T & 0 & 0 \\ 0 & \{\theta_y\}^T & 0 \\ 0 & 0 & \{\theta_z\}^T \\ 0 & \{\theta_x\}^T & \{\theta_y\}^T \\ \{\theta_x\}^T & 0 & \{\theta_x\}^T \\ \{\theta_y\}^T & \{\theta_x\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\theta_x\} \\ \{\theta_y\} \\ \{\theta_z\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A] \{\theta\}, \quad (19-36)$$

gdzie

$$\{\theta_x\}^T = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right] \text{ itd.}$$

[A] zaś jest macierzą  $9 \times 6$ .

Czytelnik łatwo sprawdzi poprawność powyższego sformułowania i określi ponownie własności macierzy [A] i  $\{\theta\}$  podane w p. 19.3.2 (uwaga pod tekstem strony 367). Tak więc znów mamy

$$d\{\varepsilon^L\} = \frac{1}{2} d[A] \{\theta\} + \frac{1}{2} [A] d\{\theta\} = [A] d\{\theta\} \quad (19-37)$$

i ponieważ możemy określić  $\{\theta\}$  jako zależną od funkcji kształtu [N] i parametrów węzłowych  $\{\delta\}$ , przeto można napisać

$$\{\theta\} = [G] \{\delta\} \quad (19-38)$$

lub

$$d\{\varepsilon^L\} = [A][G] d\{\delta\}$$

oraz

$$[B_L] = [A][G]. \quad (19-39)$$

**19.5.2. Macierz  $[K_T]$ .** Zauważmy, że

$$[\bar{B}] = [B_0] + [B_L].$$

Możemy więc łatwo zbudować macierz z równania (19-7)

$$[\bar{K}] = [K_0] + [K_L] = \int_V [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] dV. \quad (19-40)$$

Aby skompletować pełną macierz sztywności stycznej, należy jedynie wyznaczyć macierz naprężeń początkowych  $[K_\sigma]$ . Znów z równania (19-8) mamy

$$[K_\sigma] d\{\delta\} = \int_V d[B_L]^T \{\sigma\} dV = \int_V [G]^T d[A] \{\sigma\} dV. \quad (19-41)$$

Możemy sprawdzić, że wolno napisać

$$d[A] \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x I_3 & \tau_{xy} I_3 & \tau_{xz} I_3 \\ \sigma_y I_3 & \tau_{yx} I_3 & \\ \text{sym.} & & \sigma_z I_3 \end{bmatrix} d\{\theta\} = [M][G] d\{\theta\}, \quad (19-42)$$

gdzie  $I_3$  jest macierzą jednostkową  $3 \times 3$ .

Podstawiając (19-42) do (19-4) znajdujemy

$$[K_\sigma] = \int_V [G]^T [M][G] dV, \quad (19-43)$$

gdzie [M] jest macierzą  $9 \times 9$  sześciu składowych naprężenia, rozmieszczonych jak pokazano w równaniu (19-42). Stwierdzamy ponownie, że macierz  $[K_\sigma]$  jest symetryczna.

Pominęliśmy indeksy elementu, chociaż w istocie wszystkie powyższe macierze powinny być obliczone element po elemencie i dodane w ustalony poprzednio sposób na etapie analizy układu.

Stosowanie wyrażań ogólnych jest pożyteczne jako punkt wyjścia dla badania płyt i powłok. Należy jedynie poczynić odpowiednie uproszczenia. Szczególnie dobrze opisywany jest przez te wyrażenia przypadek powłok grubych (por. rozdz. 14).

Z kolei, gdy określone zostaną odpowiednie związki między naprężeniami i odkształceniami, są one ważne zarówno w zakresie małych, jak i dużych odkształceń. Tutaj jednak bardziej pożyteczne jest zwykle, bezpośrednie określenie funkcji energii odkształcenia w zależności od składowych odkształcenia i uzyskania sił uogólnionych poprzez minimalizację tej funkcji. Kilka przykładów znajdowania dużych odkształceń podał Oden [35] ÷ [38] przy badaniu dużych deformacji gumowych membran i innych ośrodków.

## 19.6. Uwagi końcowe

W rozdziale tym spróbowano przedstawić jednolite podejście do wszelkich zagadnień dużych deformacji. Przytoczono szereg sposobów rozwiązania podstawowego równania nieliniowego. Czytelnik może słusznie zapytać, który z nich jest lepszy. Jeżeli wymagane jest proste rozwiązanie zadania o dużych nieliniowych deformacjach, w większości przypadków iteracja Newtona zapewni dostatecznie szybką zbieżność. Jednak w niektórych przypadkach bardziej ekonomiczne okazują się metody stałych macierzy.

Gdy wymagane jest pełne badanie związku deformacji z obciążeniem, w codziennej praktyce stosuje się małe przyrosty obciążenia i dla każdego z nich traktuje się zadanie jako liniowo-sprężyste, stosując macierz sztywności stycznej, wyznaczoną dla stanu poprzedzającego dany przyrost obciążenia [2], [3]. Metoda taka może jednak akumulować błędy, dlatego Brebbia i Connor [9] zalecają kompletnie rozwiązanie typu newtonowskiego dla każdego z kilku kolejnych przyrostów.

Rozwiązanie problemu geometrycznej nieliniowości na przykładach dynamicznych jest możliwe zwłaszcza wówczas, gdy lżejsze macierze naprężeń początkowych i zadanie może być rozpatrywane jako quasi-liniowe. Anderson i in. [16] rozwiązali np. szereg problemów drgań płyt początkowo ścisłanych [39].

Kombinowanie nieliniowości fizycznej z nieliniowością geometryczną jest stosunkowo proste, jeżeli uda się określić macierz narastającej sprężystości. Marçal [2] rozwiązał szereg takich zadań, w których duże deformacje były związane z plastycznością. Warto odnotować, że operacje wymagane dla rozwiązywania zagadnień fizycznej i geometrycznej nieliniowości są podobne i możliwe jest opracowanie programów obliczeniowych pozwalających na wspólne ujęcie obu tych zjawisk.

Wreszcie trzeba zwrócić uwagę na dwie sprawy. Jedną — to dość rozległy wywód macierzy naprężeń początkowych dla płyt, choć macierze te w innych pracach [17], [19] były wyprowadzone w sposób bardziej bezpośredni. Spowodowane to było dążeniem do uzyskania pełnej ogólności, co jak się wydaje zostało osiągnięte. Drugą — to fakt, że rozważając ogólny problem dużych odkształceń użyto nieco zagnatwanych operacji, w celu zachowania konwencjonalnego zapisu macierzowego, stosowanego w całej książce. Można uzyskać pewne uproszczenia przy zastosowaniu notacji tensorowej i, w zasadzie, można by go użyć w książce jako alternatywnej formy zapisu. Nie ma jednak powodów do tego, by nie stosować bardziej bezpośredniej lub lepiej zrozumiałej notacji, jaką jest zapis macierzowy.

#### Cytowane publikacje

[1] C. Truesdell (Editor): Continuum Mechanics IV, Problems of non-linear elasticity, 8, s. 4, Gordon and Beach, 1965.

[2] P. V. Marçal: Finite element analysis of combined problems of material and geometric behaviour, Techn. Rep. 1, ONR, Brown University, 1969.

[3] J. H. Argyris, S. Kelsey, H. Kamel: Matrix Methods of Structural Analysis, AGARD-ograph 72, Pergamon Press, 1963.

[4] P. H. Argyris: Continua and Discontinua, Proc. Conf. Matrix methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Tech. Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.

[5] G. C. Niyaki: Plasticity and large deformation problems by finite element method, Ph. D. thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1970.

[6] P. V. Marçal: Effect of initial displacement on problem of large deflection and stability, Techn. Report ARPA E54, Brown University, 1967.

[7] K. Marguerre: Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme, Hohrb, 1938, D.V.L., s. 252—262, 1938.

[8] B. Fraijs de Veubeke: The second variation test with algebraic and differential contrasts, Advanced problems and methods for space flight optimisation, Pergamon Press, 1969.

[9] G. Hrabčič, J. Connor: Geometrically non linear finite element analysis, Proc. Am. Soc. Civ. Eng. EM2, s. 463—483, 1969.

[10] N. P. Timoshenko, S. M. Gere: Theory of elastic stability, McGraw-Hill, 2 wydanie, 1961. Książka ta ukazała się w tłumaczeniu polskim pt.: „Teoria stateczności sprężystej”. Arkady, Warszawa 1963.

[11] L. A. Schmit, F. K. Bygner, R. L. Fox: Finite deflection structural analysis using plate and cylindrical shell discrete elements, Proc. AIAA/ASME 8th Struct. and Stress dynamic conference, Palm Springs, California, s. 197—211, marzec 1967. Also J. A.I.A.A., 5, s. 1525—27, 1968.

[12] M. Y. Turner, E. H. Dill, H. C. Martin, R. J. Melosh: Large deflection of structures subjected to heating and external loads, J. of Aerospace Sciences 27, s. 97—106, 1960.

[13] T. Kawai, M. Yoshimoto: Analysis of large deflection of plates by finite element method. Int. J. Num. Meth. Eng., 1, s. 123—33, 1969.

[14] H. H. Mallat, P. M. Alford: Finite element analysis of non-linear structures, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 94, 9, s. 2081—108, 1968.

[15] D. W. Murray, K. L. Wilson: Finite element large deflection analysis of plates, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 94, EM 1, s. 143—168, 1968.

[16] N. C. Martin: On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, październik 1965.

[17] K. K. Kapur, B. J. Hurst: Stability of thin plates using the finite element method, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., EM2, s. 177—95, 1966.

[18] R. H. Gallagher, J. Padlog: Discrete element approach to structural instability analysis, J. A.I.A.A., 1, s. 1537—39, 1963.

[19] R. G. Anderson, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz: Vibration and stability of plates using finite elements, Int. J. Solids Struct., 4, s. 1031—1055, 1968.

[20] W. G. Carson, R. E. Newton: Plate buckling analysis using a fully compatible finite element, J. A.I.A.A., 8, s. 527—529, 1969.

[21] A. P. Kabała, B. Fraijs de Veubeke: A quadrilateral element for plate buckling analysis, Int. J. Num. Meth. in Eng. to be published 1971.

[22] D. W. Murray, E. L. Wilson: Finite element post buckling analysis of thin elastic plates, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.

[23] K. C. Rokey, D. K. Bagchi: Buckling of plate girder webs under partial edge loadings, Int. J. Mech. Sci., 12, s. 61—76, 1970.

[24] T. M. Roberts, D. G. Ashwell: Post-buckling analysis of slightly curved plates by the finite element method. Report 2, Dept. of Civil and Struct. Engineering, University of Wales, Cardiff, 1969.

[25] R. G. Anderson: A finite element eigenvalue solution system, Ph. D. thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1968.

[26] R. Gallagher, R. Gellatly, R. Malliet, J. Padlog: A discrete element procedure for thin shell instability analysis, J. A.I.A.A., 5, s. 138—145, 1967.

[27] R. H. Gallagher, H. T. Y. Yang: Elastic Instability predictions for doubly curved shells, Proc. 2nd Conf. Matrix Methods, Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.

[28] T. H. H. Pian, Ping Tong: Variational formulation of finite displacement analysis, Symp. Int. Un. Th. Appl. Mech. on High speed computing of elastic structures, Liege, 1970.

[29] H. C. Martin: Finite Element and the analysis of geometrically non-linear problems. U.S.—Japan Seminar on Matrix Methods in Structural Analysis and Design, Tokio, 1970.

[30] A. C. Walker: A non-linear finite element analysis of shallow circular arcs. Int. J. Solids Struct., 5, s. 97—107, 1969.

[31] J. M. T. Thompson, A. C. Walker: A non-linear perturbation analysis of discrete structural systems, Int. J. Solids Struct., 4, s. 757—767, 1968.

[32] J. S. Przemieniecki: Stability analysis of complex structures using discrete element techniques. Symp. on Struct. Stability and optimisation, Loughborough Univ., March 1967.

[33] J. Connor, N. Morin: Perturbation techniques in the analysis of geometrically non-linear shells. Symp. Int. Un. Th. Appl. Mech. on High speed computing of elastic structures, Liege, 1970.

[34] Y. C. Fung: Fundation of solid mechanics, Prentice Hall Int., 1965.

[35] J. T. Oden: Finite plane strain of incompressible elastic solids by the finite element method, The Aeronautical Quarterly, s. 254—264, 1967.

[36] J. T. Oden, T. Sato: Finite deformation of elastic membranes by the finite element method, Int. J. Solids & Struct., 3, s. 471—88, 1967.

[37] J. T. Oden: Numerical formulation of non linear elasticity problems, Proc. Am. Soc. Civ. Eng. 93, ST3, s. 235—258, 1967.

[38] J. T. Oden: Finite element applications in non-linear structural analysis, Proc. Symp. on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Am. Soc. Civ. Eng. Vanderbilt Univ., 1969.

[39] J. A. Stricklin: Non-linear dynamic analysis of shells of revolution. Symp. Int. Un. Th. Appl. Mech. on High speed computing of elastic structures, Liege, 1970.

## 20. Metody numeryczne i programy

(Y.K. Cheung i I.P. King)

### 20.1. Wstęp

Obliczenia w metodzie elementów skończonych można łatwo programować na szybkie maszyny cyfrowe. Programy te jednak można wykorzystać wtedy, kiedy dysponuje się maszyną odpowiednią do rozwiązywania dużych układów równań, wynikających z procesu dyskretyzacji.

Opracowano dotychczas szereg bardzo wielkich programów dla metody elementów skończonych. Najwcześniejsze z nich były to programy wąsko wyspecjalizowane, zapisane często w języku wewnętrznym danej maszyny. Podobieństwo budowy programów, zaobserwowane w toku ich realizacji, doprowadziło do rozwoju bardziej złożonych systemów ogólnych. Program ASKA, opracowany przez prof. J. H. Argyrisa ze Stuttgartu, jest przykładem takiego rozwoju; opracowany on był również dla największych maszyn. W zastosowaniu do zagadnień lotniczych i kosmicznych położono nacisk na możliwość rozwiązywania tych zagadnień we wszystkich przypadkach, przez co opłacalność stosowania tych programów do analizy prostszych zagadnień została znacznie zmniejszona.

Szybki rozwój kolejnych generacji maszyn cyfrowych spowodował konieczność pisania programów tak, by były one łatwo wymienne z maszyny do maszyny. Przydatność języka FORTRAN do tych celów doprowadziła do stosowania go w większości programów związanych z elementami skończonymi.

Program NASA (National Aeronautical Space Administration) przedstawił próbę zbudowania elastycznego systemu programów do rozwiązywania dużej skali problemów przemysłu lotniczo-kosmicznego.

Program FESS (Finite Element Solution Swansea) i FINESSE w Swansea był nastawiony bardziej na efektywne rozwiązywanie układów o mniejszych i średnich wymiarach, typowych dla zagadnień inżynierjno-budowlanych, jak: mosty, zapory, osłony reaktorów. W tych programach poświęcono dużo uwagi na stworzenie prostych koncepcji, które można łatwo modyfikować dla szczególnych przypadków.

We wszystkich próbach programowania ważne jest, aby pamiętać, że skuteczność programu musi odpowiadać wysiłkowi włożonemu w programowanie. Im mniej

zatem programom musi być opracowanych od początku, tym bardziej uświadomiony staje się wysiłek zbudowania programu uniwersalnego. Przy programowaniu zagadnień elementów skończonych trzeba znać ograniczenia, jakie stawia dostępną nam maszyna i należy zamienić ją na większą maszynę, gdy tylko zachodzi konieczność „ściskania” programu lub wykonywania programów specjalnych. Stosowanie specjalnego kodowania rzadko warte jest wysiłku, jako że program taki jest sztywny i rozwinięcie jego jest kosztowne.

Program i technika programowania opisane w niniejszym rozdziale mają pewne wspólne cechy z FESS, lecz przedstawiają FESS tylko w jego początkowym stadium. Pewne zabiegi oszczędzające pamięć i ulepszenia istniejące w FESS, z uwagi na uproszczenie wykładu, zostały pominięte. Warto wspomnieć, że system ten został rozbudowany na zagadnienia elastoplastyczne bez zasadniczej zmiany układu programu.

Analiza stateczności i zagadnienia drgań, oparte na najnowszej technice wyznaczania wartości własnych, zostały także włączone do wykładu, chociaż przedstawiamy tutaj tylko prosty przypadek programu.

## 20.2. Struktura programów w metodzie elementów skończonych

Program wykorzystujący koncepcję elementów skończonych może mieć szereg różnych zastosowań. Najczęściej wchodzi w grę analiza statyczna zagadnień sprężystych, przy czym rozmiar zagadnienia może wahać się od mniej niż sto do kilkunastu tysięcy stopni swobody. W zadaniach dynamicznych albo stateczności można szukać wartości własnych, wreszcie mogą występować w programach różne procedury iteracyjne dla rozwiązywania problemów nieliniowych.

Potencjalny użytkownik szczególnego zagadnienia elementów skończonych spotka się z dużymi trudnościami, jeśliby chciał każdą nową klasę zagadnień programować od początku. Stąd tak ważne jest wykorzystanie dorobku poprzedników.

Typowy program metody elementów skończonych jest zbudowany z szeregu wspólnych bloków, które mogą mieć różne zastosowania w różnym kontekście. Typowymi blokami są: wprowadzenie danych, budowanie sztywności elementu i układu, procedura rozwiązywania równań, budowanie macierzy masy i znajdowanie wartości własnych, obliczanie naprężeń i druk wyników.

W praktyce programowania bloki te występują jako podprogramy (subroutines)<sup>1)</sup>. Dobrze jest, gdy ich połączenia i układ danych są dostatecznie standaryzowane, aby można było je wymieniać. Z omówionych dalej programów możliwe

<sup>1)</sup> Programy omawiane tutaj napisane są w języku FORTRAN IV. W literaturze polskiej język ten omawiany jest w książce K. Fijałkowskiego: Autokody i programowanie maszyn cyfrowych, WNT, W-wa 1968 (wyd. 2) rozdz. 6. Czytelnik nie znający tego języka przosony jest o przedstudowanie tej książki; podana w niej symbolika nie jest w dalszym ciągu tłumaczona; terminy, których w wymienionej książce brak, podawane są w tłumaczeniu i brzmieniu oryginalnym (przyp. tłum.).

jest wybrane odpowiednio programów tak, że przy nowym zagadnieniu dodatkowy wyśiłek programisty ogranicza się jedynie do wprowadzenia niezbędnych innowacji lub uwzględnienia specjalnych wymagań.

W podanym schemacie główny program wiodący (master driving program) jest programem bardzo prostym. Wymienia się tutaj tylko zasadnicze czynności poszczególnych podprogramów w odpowiedniej kolejności. Dla niektórych klas zagadnień można po napisaniu programu głównego automatycznie wybrać podprogramy. W dużych ośrodkach obliczeniowych przy specjalizowanym typie problemów taka standaryzacja jest najdogodniejsza do stosowania. Dla celów jednak badawczych elastyczność wynikająca z ręcznie skomponowanego programu jest prawdopodobnie wygodniejsza.

Istotną sprawą jest to, aby rozwojowi wspomnianych bloków (podprogramów) towarzyszyła dostateczna dokumentacja, pozwalająca na łatwe ich użycie przez innych użytkowników, poza ich autorem. Włączenie więc odpowiednich komentarzy<sup>1)</sup> we właściwych miejscach podprogramu jest szczególnie cenne, daje bowiem wskazówki użytkownikowi.

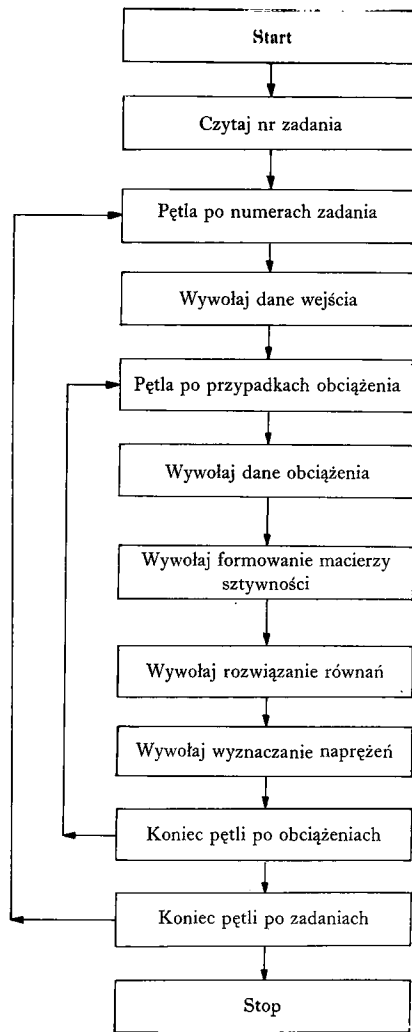
**Przykład programu głównego.** Pokazany niżej program służy do rozwiązywania zadania płaskiego w płaskim stanie odkształcenia o ograniczonym rozmiarze. Można go używać na małych maszynach. Cały program napisany jest w języku FORTRAN IV i jest przykładem bardzo prostego zastosowania koncepcji blokowej. Jest on przydatny do zagadnień praktycznych i łatwo może być rozbudowany przez Czytelnika znającego język FORTRAN. Przykład dotyczy tarczy w płaskim stanie naprężenia przy zastosowaniu zmodyfikowanych stałych materiałowych; współ z zbiorem podprogramów (subroutines) stosowanych w tym programie podany jest w p. 20.7.

Dla innych elementów lub okoliczności należy skonstruować odpowiednie programy główne.

Schemat blokowy (operacyjny) programu głównego podano poniżej. Należy zwrócić uwagę, że „loop” (zawrót) — (pętla) w przypadku obciążenia jest środkiem do oszczędzania pamięci przy równoczesnym wzroście czasu maszyny. Jest to nieuniknione, gdy zachodzi potrzeba badania poszczególnych przypadków obciążenia, jak np. przy obliczaniu mostów.

Dla zadań o małej liczbie przypadków obciążenia nieraz wygodniej jest rozwiązywać je jednocześnie.

<sup>1)</sup> Komentarze to oznacza się na programie literami C z lewej strony, 5 odstępów w lewo od kolumny, w której wypisany jest tekst programu i wypisuje się ich tekst po prawej stronie programu (por. Program 20-1) (przyp. tłum.).



Opis zmiennych

a. *Wspólny blok*

Zmienna:	Opis:
TITLE 12	12 słów zbioru nazw
NP	liczba węzłów
NE	liczba elementów
NB	liczba węzłów zamocowanych
NDF	liczba stopni swobody w węźle
NCN	największa liczba węzłów w elemencie
NLD	liczba przypadków obciążenia
NMAT	liczba rodzajów materiału
NSZF	liczba równań w układzie
LI	licznik przypadków obciążenia
NT4	liczba numerów klatek pamięci

b. *Wspólne oznaczenia podstawowe*

Zmienna:	Opis:
COORD (100,2)	Zbiór współrzędnych punktów węzłowych
NOP (200,4)	Zbiór połączeń elementów
IMAT (200)	Zbiór elementów wg własności materiałów
ORT (25,2)	Własności materiału w elementach
NBC (25)	Numery węzłów zamocowanych
NFIX (25)	Rodzaj warunków brzegowych
R1 (200)	Wektory obciążenia
SK (200,40)	Prostokątna macierz równań

c. *Opis zmiennych programu ogólnego*

Zmienna:	Opis:
NPROB	Liczba problemów (zadań)
NPR	Licznik numerów problemów

PROGRAM 20-1

C CONTROL MAIN PROGRAM  
 COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4  
 COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFI(25)  
 1,R1(200),SK(200,40)

C  
 C INITIALIZE TAPE NO.  
 C AND NUMBER OF CORNER NODE MAX.  
 C

NT4=11  
 NCN=4  
 READ(5,1) NPROB

C  
 C LOOP ON NO. OF PROBLEMS  
 C

## Program 20-1 ciąg dalej

	DO 400 NPR = 1, NPROB	13
	REWIND NT4	
C		16
C	READ INPUT GEOMETRY AND PROP.	
C		14
	CALL GDATA	19
	NSZF = NP * NDF	21
	DO 200 LI = 1, NLD	22
C		
C	READ LOADS	
C		
	CALL LOAD	23
C		
C	FORM THEN SOLVE SIMULTANEOUS	
C	EQUATIONS	
C		
	CALL FORMK	
	CALL SOLVE	28
C		
C	CALCULATE STRESSES	
C		
	CALL STRESS	
200	CONTINUE	32
400	CONTINUE	33
1	FORMAT(915)	35
	STOP	36
	END	37

## 20.3. Dane wejściowe

W operacjach wewnętrznych programu dla elementów skończonych wymagane są cztery zasadnicze zbiory danych dodatkowych dla informacji kontrolnych:

- współrzędne połączeń elementów i ich charakterystyki,
- własności materiału w każdego rodzaju elementach,
- warunki brzegowe,
- obciążenia.

Mogą być napisane specjalne programy dla wprowadzenia danych; podstawowym ich zadaniem jest utworzyć cztery wymienione zbiory danych z innych prostych informacji, opisujących problem. Dla programu głównego bowiem niezbędny jest pełny zbiór danych.

**20.3.1. Współrzędne połączeń i charakterystyki elementów.** Są to współrzędne wszystkich punktów węzłowych (np.  $x_i$  i  $y_i$  w każdym węźle i w zadaniu o płaskim stanie naprężenia) wypisywane dla danego elementu w określonej kolejności. Macierze sztywności elementów dla większości przypadków

nie zależą od położenia początku układu współrzędnych; z reguły jest on obrany dowolnie wg uznania obliczającego. Charakterystyki elementów zawierają: połączenia elementów, którymi są numery wszystkich węzłów elementu, numery rodzaju materiału, występującego w tym elemencie oraz wielkości reprezentujące własności tego materiału. Charakterystyki te są również wymieniane w określonej kolejności, tej samej co współrzędne połączeń.

**20.3.2. Własności materiału.** W większości zastosowań elementów skończonych własności materiału są takie same dla dużych grup elementów. Wygodnie jest zatem dać każdemu elementowi numer materiału i odczytywać go jako oddzielną informację, opisującą własności materiału.

**20.3.3. Obciążenia.** Dla maksymalnego uproszczenia i elastyczności programu obciążenia mogą być odczytywane jako pojedynczy wektor, stosowany bezpośrednio w programie rozwiązania. W szeregu przypadków, gdy obciążone węzły stanowią mały ułamek całkowitej liczby węzłów układu, wygodniej jest odczytywać tylko niezerowe obciążenia z ich numerami węzłów. Wektor obciążenia deklaruje się wtedy uprzednio jako zero, aby pamiętać o węzłach nieobciążonych.

W pewnych jednak zastosowaniach należy uwzględnić siły masowe, i niezbędny jest osobny program, aby utworzyć wektory obciążenia na podstawie geometrii układu i własności materiału. Podprogramy tworzące obciążenia mogą też być użyte przy określaniu sił węzłowych od obciążeń rozłożonych. Wyniki końcowe takich podprogramów stanowią wektory sił, identyczne co do postaci z wektorami obciążeń odczytanymi bezpośrednio z kart.

**20.3.4. Warunki brzegowe.** Warunki brzegowe można wykorzystać albo w momencie budowania macierzy sztywności elementów, albo poprzez modyfikację układu równań bezpośrednio przed ich rozwiązywaniem, czyli przez modyfikację macierzy sztywności układu. Ostatni sposób jest wygodny dla prostych elementów, staje się jednak skomplikowany, gdy ma się do czynienia z elementami wyższych rzędów albo ze szczególnymi, nietypowymi warunkami brzegowymi, jak np. ograniczenie w określonym kierunku. W przykładzie podprogramu pokazanym poniżej warunki brzegowe węzłów są kodowane jako kombinacje 0 i 1 dla każdego sposobu podparcia, przy czym 0 oznacza swobodę przemieszczania się węzła, 1 zaś — ograniczenie przemieszczeń. Tak więc:

0 1 oznacza swobodę przemieszczenia w kierunku X i unieruchomienie w kierunku Y,

1 0 oznacza unieruchomienie w kierunku X i swobodę w kierunku Y,

1 1 oznacza unieruchomienie w obu kierunkach.

**Przykłady podprogramów.** Przytoczmy tu dwa podprogramy. Podprogram GDATA podaje podstawowe dane geometryczne, a podprogram LOAD — wektory obciążenia. Żaden z tych programów nie ma możliwości tworzenia zbiorów danych.





## PROGRAM 20-2

	SUBROUTINE GDATA	1
	COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4	
	COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFX(25)	
	1,R1(200),SK(200,40)	
	2,R(3)	
C		
C	READ AND PRINT TITLE AND CONTROL	
C		
	READ(5,7) TITLE	11
	WRITE(6,100) TITLE	15
	READ(5,1) NP,NE,NB,NLD,NDF,NMAT,I1	
	WRITE(6,1) NP,NE,NB,NLD,NDF,NMAT,I1	
C		
C	READ AND PRINT MATERIAL DATA	
C		
	READ(5,8) (N,(ORT(N,I),I=1,2),L=1,NMAT)	
	WRITE(6,108)	17
	WRITE(6,8) (N,(ORT(N,I),I=1,2),N=1,NMAT)	
C		35
C	READ NODAL POINT DATA	
C		37
	READ(5,2) (N,(CORD(N,M),M=1,2),L=1,NP)	
C		40
C	READ ELEMENT DATA	
C		42
	READ(5,3) (N,(NOP(N,M),M=1,4),IMAT(N),L=1,NE)	
C		44
C	READ BOUNDARY DATA	
C		46
	READ(5,4) (NBC(I),NFX(I),I=1,NB)	
480	IF(I1.NE.0) GO TO 500	50
C		
C	PRINT INPUT DATA	
C		
	WRITE(6,102)	51
	WRITE(6,2) (N,(CORD(N,M),M=1,2),N=1,NP)	52
	WRITE(6,103)	53
	WRITE(6,3) (N,(NOP(N,M),M=1,4),IMAT(N),N=1,NE)	
	WRITE(6,104)	55
	WRITE(6,4) (NBC(I),NFX(I),I=1,NB)	
500	CONTINUE	58
	1 FORMAT(9I5)	71
	2 FORMAT(110,2F10.3)	72
	3 FORMAT(6I5)	
	4 FORMAT(2I5)	

## Program 20-2 cont'd

	7 FORMAT(12A0)	75
	8 FORMAT(110,2F10.2)	
	100 FORMAT(1H1,12A8)	77
	102 FORMAT(20H0 NODAL POINTS )	
	103 FORMAT(20H0 ELEMENTS )	
	104 FORMAT(21H0 BOUNDARY CONDITIONS)	80
	108 FORMAT(1H0,20H MATERIAL PROPERTIES)	81
	RETURN	82
	END	83

## PROGRAM 20-3

	SUBROUTINE LOAD	1
	COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4	
	COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFX(25)	
	1,R1(200),SK(200,40)	
	2,R(3)	
C		
C	ZERO LOAD ARRAY	
C		
	DO 160 J=1,NSZF	10
160	R1(J)=0.	11
	WRITE(6,100) TITLE,LI	12
	WRITE(6,109)	13
C		
C	READ, PRINT AND STORE LOAD CARD	
C		
	165 CONTINUE	20
	READ(5,9)	21
	1NQ,(R(K),K=1,NDF)	22
	WRITE(6,9)	23
	1NQ,(R(K),K=1,NDF)	24
	DO 170 K=1,NDF	25
	IC=(NQ-1)*NDF+K	26
170	R1(IC)=R(K)+R1(IC)	27
C		
C	IF NODE NUMBER NOT MAX. NODE PT.	
C	GO BACK AND READ MORE	
C		9
	IF(NQ.LT.NP) GO TO 165	28
	9 FORMAT(110,3F10.2)	38
	20 FORMAT(10X,4I5)	40
100	FORMAT(1H1,12A6,5X,10HLOAD CASE, I5)	41
109	FORMAT(1H0,6H LOADS)	42
	RETURN	43
	END	44

## 20.4. Budowanie macierzy sztywności

Głównym celem programu jest zbudowanie macierzy sztywności elementów, odpowiedniej dla rozważanego zagadnienia. Wszystkie niezbędne do tego dane zwykle przenosi się poprzez wspólną pamięć, a wynik, tzn. macierz sztywności elementu, wstawia się do programu wywoływanego albo też zapisuje się w pamięci zewnętrznej. Program zależy w wysokim stopniu od podstawowego matematycznego sformułowania macierzy sztywności elementów, w szczególności zaś od tego, czy potrzebne jest całkowanie numeryczne, czy też możliwe jest całkowanie ścisłe.

Dla prostych elementów podstawowymi operacjami są:

- przetransformowanie elementów do współrzędnych lokalnych,
- zbudowanie macierzy odkształceń  $[B]$  (lub jej równoważnika),
- zbudowanie związków naprężenie—odkształcenie  $[D]$ ,
- dokonanie mnożenia macierzy  $[B]^T [D] [B]$ ,
- dokonanie całkowania po obszarze elementu

(dla płaskiego stanu naprężenia redukuje się to do prostego pomnożenia przez pole trójkąta),

f) w razie potrzeby, przetransformowanie macierzy wynikowej ze współrzędnych lokalnych do ogólnych.

Układ współrzędnych lokalnych zależy zwykle od sposobu wyprowadzenia macierzy sztywności. W prostych sformułowaniach (jak np. elementy trójkątne w zadaniach płaskich) współrzędne lokalne mogą być po prostu współrzędnymi ogólnymi albo też mogą być użyte osie zmienione, w których początkiem jest jeden z węzłów lub środek ciężkości elementu.

Współrzędne powierzchniowe lub objętościowe (rozdz. 7 i 8) powinny być, jeżeli zachodzi potrzeba, zastosowane właśnie na tym etapie obliczeń.

Program budowy macierzy sztywności może być również użyty do tworzenia macierzy naprężeń, otrzymywanej drogą mnożenia przez odpowiednie przemieszczenia węzłów. Taka macierz jest często produktem ubocznym procesu budowania macierzy sztywności i dla jej uzyskania potrzebny jest bardzo mały dodatkowy czas pracy maszyny. Możliwe są dwa sposoby. Po pierwsze — macierz naprężeń może być tworzona w tym samym czasie co macierz sztywności, a następnie zbierana w pamięci zewnętrznej dla dalszego użytku (tj. najpierw oblicza się  $[D] [B]$ , a następnie  $[B]^T [D] [B]$ ) albo, alternatywnie, macierz naprężeń  $[D] [B]$  odtwarza się wtedy, gdy zachodzi tego potrzeba. Wybór zależy od szybkości dostępu do pamięci zewnętrznej i od czasu niezbędnego na powtarzanie niektórych operacji.

W elementach złożonych (np. typu izoparametrycznego) porządek obliczeń podany powyżej na ogół nie jest ekonomiczny. Potrzebne są wtedy specjalne chwyt programowania, jakie np. zaproponował Irons [2].

W zależności od charakteru zadania do podstawowej procedury można wprowadzić różne modyfikacje. Kilka przypadków opisano poniżej.

a. Jeżeli atomowane są elementy wyższego rzędu z węzłami na środkach boków względnie małe elementy zgrupowane w przygotowanej siatce, można podawać dane węzłowe tylko dla pewnych węzłów, po czym stosuje się procedurę tworzenia siatki dla opisu pełnej geometrii elementów. Od czasu do czasu element może zawierać węzeł nie połączony z żadnym innym elementem (wewnętrzny stopień swobody), a w takim przypadku odpowiadające mu stopnie swobody mogą być wyeliminowane, dla układu zaś używa się zredukowanej macierzy sztywności.

b. Dalsza modyfikacja wynika ze stosowania osi współrzędnych powiązanych z kierunkami przemieszczeń (por. pracę [3]), a tym samym używa się macierzy transformacji zmieniających się od węzła do węzła. Prowadzi to do macierzy sztywności elementu nie odniesionej do jednolitego układu współrzędnych. Sformułowanie to wykazuje zalety w następujących przypadkach:

1) dla węzła, w którym kierunki jednego (lub kilku) przemieszczeń są nachylone do ogólnych osi układu, zatem bezpośrednie uwzględnienie warunków brzegowych prowadziłoby do trudności,

2) dla zastosowania warunków symetrii i antysymetrii, aby zredukować ogólną liczbę równań, np. gdy analizuje się 1/8 zamiast 1/4 płyty w przypadku podwójnej symetrii albo przy stosowaniu elementów nieosiowo-symetrycznych do analizy zagadnień osiowo-symetrycznych [3],

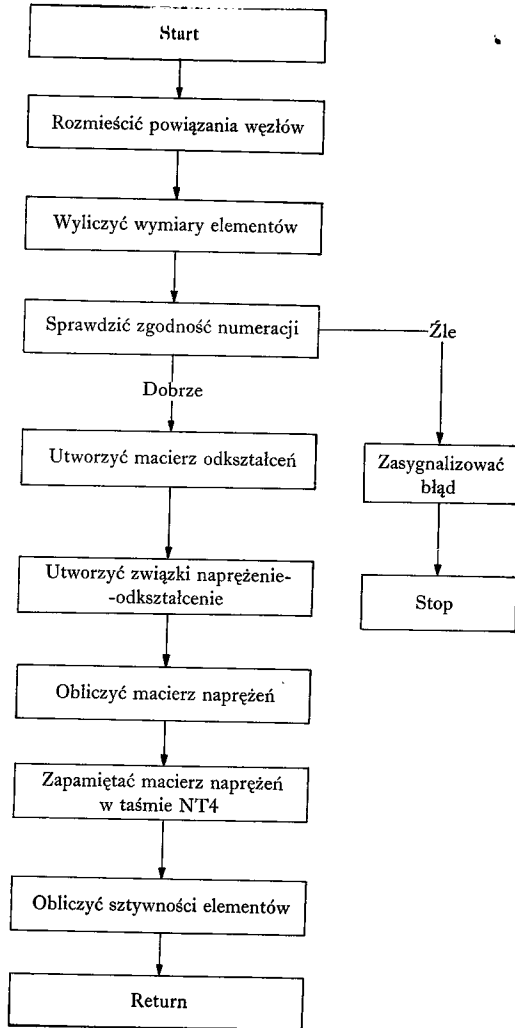
3) dla badania powłok podwójnie zakrzywionych, w których os  $x$  w każdym węzle obiera się zgodnie z normalną zewnętrzną do powierzchni powłoki, tak że pozostaje tylko 5 stopni swobody dla każdego węzła [4].

**Przykład programu.** Przedstawiony podprogram buduje macierz sztywności  $6 \times 6$  dla elementu w płaskim stanie odkształcenia i przesyła macierz naprężeń do pamięci zewnętrznej dla dalszego użytku przy wyznaczaniu naprężeń w elemencie.

Opis zmiennych — podprogram STIFT2 (N)  
N w kłatkach „nazwa” określa numery elementów

Zmienna:	Opis:
I, J, K	Powiązania elementów, użyte później jako liczniki w pętli
AJ, BJ, AK, BK	Lokalne współrzędne trójkąta
A (3, 6)*	Macierz odkształceń
ESTIFM (12, 12)*	Macierz naprężeń—odkształceń, później użyta dla macierzy sztywności elementu
B (3, 9)*	Macierz naprężeń dla późniejszego podstawienia.

\* Zbiory te mają wspólne oznaczenia.



```

SUBROUTINE #11P12(N)
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFX(25)
1,R1(200),SK(200,40)
2,ESTIFM(12,12),A(3,6),B(3,9)
C
C                                     DETERMINE ELEMENT CONNECTIONS
C
C                                     I = NOP(N,1)
C                                     J = NOP(N,2)
C                                     K = NOP(N,3)
C                                     L = IMAT(N)
C
C                                     SET UP LOCAL COORDINATE SYSTEM
C
C                                     AJ = CORD(J,1) - CORD(I,1)
C                                     AK = CORD(K,1) - CORD(I,1)
C                                     BJ = CORD(J,2) - CORD(I,2)
C                                     BK = CORD(K,2) - CORD(I,2)
C                                     AREA = (AJ*BK - AK*BJ)/2.
C                                     IF(AREA.LE.O.) GO TO 220
C
C                                     FORM STRAIN DISP. MATRIX
C
C                                     A(1,1) = BJ - BK
C                                     A(1,2) = 0.
C                                     A(1,3) = BK
C                                     A(1,4) = 0.
C                                     A(1,5) = -BJ
C                                     A(1,6) = 0.
C                                     A(2,1) = 0.
C                                     A(2,2) = AK - AJ
C                                     A(2,3) = 0.
C                                     A(2,4) = -AK
C                                     A(2,5) = 0.
C                                     A(2,6) = AJ
C                                     A(3,1) = AK - AJ
C                                     A(3,2) = BJ - BK
C                                     A(3,3) = -AK
C                                     A(3,4) = BK
C                                     A(3,5) = AJ
C                                     A(3,6) = -BJ
C
C                                     FORM STRESS STRAIN MATRIX
COMM = ORT(L,1)/((1. + ORT(L,2))* (1. - ORT(L,2)*2.) + AREA)
  
```



Procedura ta przedstawia najprościej bezpośrednie, w którym wszystkie wyrazy macierzy są opracowywane i zapamiętywane. Można jednak wykorzystać symetrię istniejącą w macierzach sztywności występujących w statyce budowli i ograniczyć się do uwzględnienia tylko dolnej części macierzy pod główną przekątną, co redukuje liczbę operacji o połowę. Całkowita liczba operacji dla rozwiązania wynosi około  $\frac{1}{6} N^3$ .

Typowa zbudowana macierz sztywności zawiera szereg wyrazów zerowych, w szczególności zaś z reguły istnieje część macierzy w pewnej odległości od głównej przekątnej, w której są same zera. Taką macierz nazywa się pasmową, a odległość wyrazu na przekątnej do ostatniego wyrazu oznaczanego w każdym wierszu — półszerokością pasma. Ta pasmowa struktura może być przedstawiona przez podział macierzy, jak pokazano poniżej, gdzie zera obejmują część podmacierzy  $K_{12}$  oznaczoną 0, tj.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{23}^T & K_{33} \end{bmatrix} \quad (20-6)$$

Zakłada się istnienie symetrii; wymiary poszczególnych macierzy są

$$K_{11}(1 \times 1), K_{12}(1 \times m), K_{22}(m \times m), K_{23}(m \times (N-1-m)), \\ K_{33}((N-1-m) \times (N-1-m)).$$

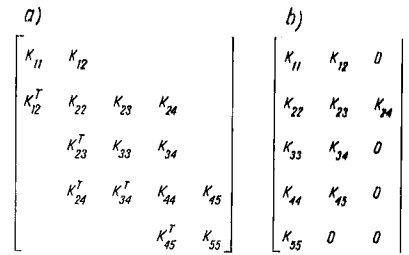
Gdy wyeliminujemy  $K_{11}$ , modyfikacji ulega tylko  $K_{22}$ , ponieważ podmacierz zerowa nie wywołuje zmian w  $K_{23}$  i  $K_{33}$ . Liczba operacji w każdym elemencie

jest teraz proporcjonalna do  $m^2$ , a całkowita liczba operacji do  $\frac{1}{2} \sum_{h=1}^N m_h^2$  lub w przybliżeniu do  $\frac{1}{2} N m_{max}^2$ , gdzie  $m_{max}$  — maksymalna szerokość pasma macierzy.

W praktyce półszerokość pasma macierzy jest mniejsza niż 1/10 jej wymiaru, dlatego opisana technika macierzy pasmowej redukuje arytmetykę do zaledwie 3%, co wybitnie podkreśla wartość takiego układania macierzy.

Dalszą zaletą takiego postępowania jest znaczna oszczędność pamięci, ponieważ macierz można zapamiętywać w postaci prostokątnego zbioru  $N \times m_{max}$ , jak pokazano na rys. 20.1. Całkowita jednak liczba równań do rozwiązania jest nadal  $N$ .

Pasmowa postać macierzy z rys. 20.1 jest bardzo przydatna do rozwiązywania dużych układów równań, ponieważ czas eliminacji ogranicza się tylko do operacji nad macierzą  $K_{22}$ . Jednak dla uzyskania rzeczywistej wydajności procesy budowania i eliminacji powinny być zgrane, tak że równania sztywności dla węzła eliminuje się natychmiast po ich kompletnym ułożeniu. Można to łatwo uzyskać, przyjmując zawsze najmniejszy numer węzła elementu za jego pierwszy numer węzłowy i porządkując elementy tak, by wszystkie pierwsze numery węzłowe następowały w kolejności za sobą. Wówczas proces układania zatrzyma się automatycznie, gdy tylko pierwszy numer węzła elementu będzie większy niż numer



Rys. 20.1. Zbieranie macierzy dla rozwiązania taśmowego: a) macierz pierwotna, kwadratowa, b) przedstawienie w postaci prostokąta

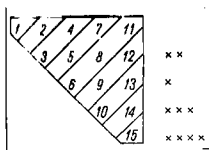
węzła, który właśnie został rozwiązany. Po eliminacji  $K_{11}$  cała pozostała macierz będzie przesunięta tak, że pierwszy wyraz zmodyfikowanej macierzy  $K_{22}$  będzie teraz znów zajmować pozycję (1, 1), pozostałe zaś zajmą odpowiednie pozycje dalsze. Wyeliminowane równania mogą być tymczasem zapamiętywane w pamięci wewnętrznej, a następnie zapisane w pamięci zewnętrznej jako blok do odpowiedniego odwrotnego podstawiania. Dla małych zadań pamięć wewnętrzną może okazać się wystarczającą do zapamiętania wszystkich eliminowanych równań i nie zajdzie potrzeba przekazywania ich na zewnątrz.

Nowa macierz zostaje następnie podzielona na  $K_{11}$ ,  $K_{12}$  itd., po czym powtarza się proces eliminacji.

Całkowita liczba komórek potrzebna do każdego etapu eliminacji wynosi  $(m+1) \times (m+2)$  albo połowę tej liczby, gdy wykorzystamy symetrię. Proces ten pozwala na rozwiązywanie nieograniczonej liczby równań pod warunkiem maksymalnego zawężenia taśmy macierzy. W większości zastosowań metody elementów skończonych dokładność nie jest ważnym problemem. Jeśli potrzebna, można powtórzyć proces rozwiązywania równań w podwójnej precyzji, przy powiększeniu pamięci i czasu maszyny. Niekiedy można otrzymać zadowalającą dokładność, jeśli wartości obliczone podstawią się do pierwotnego układu równań, wyznaczą reszty i gdy tych reszt użyje się ponownie jako nowe prawe strony równań do ponownego rozwiązania układu. Suma tych dwu rozwiązań stanowić będzie rozwiązanie wymagane. Jednak obliczone reszty znacznie częściej używane są jako miara oszacowania błędu średniego.

**20.5.2. Efektywny układ pamięci dla macierzy pasmowych.** Aby zredukować wymagania co do pojemności pamięci maszyny, program FESS dla rozwiązywania dużych układów równań (nie omawiany w niniejszym rozdziale) korzysta z jednowymiarowego wektora do zbierania górnej, trójkątnej części macierzy sztywności, potrzebnej na bieżąco w chwili eliminowania kolejnego górnego równania. Rys. 20.2 pokazuje przykład takiego uporządkowania miejsc w pamięci.

Kolumnowy układ zapewnienia pamięci wybrany był dlatego, gdyż jest on łatwiejszy w operowaniu niż wierszowy. W programie FESS do rozwiązywania równań odwrotne podstawienia macierzy [równania (20-5)] są zapamiętywane na górnym końcu jednowymiarowego zbioru. Gdy macierz sztywności i te ma-



x -- wyrazy nie zawarte w pamięci

Rys. 20.2. Układ zbierania równań w FESS

cierze zachodzą na siebie, górny koniec pamięci zostaje zapisany na taśmie i proces powtarza się. Metoda ta jest efektywna, gdyż zapewnia możliwość użycia długich zapisów na taśmie. Czasami jest też możliwe rozwiązywanie równań bez wykorzystania pamięci zewnętrznej.

**20.5.3. Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela.** Ogólnie  $n$ -te równanie z układu  $N$  równań można zapisać jako

$$\sum_{i=1}^{n-1} k_{ni} \delta_i + k_{nn} \delta_n + \sum_{i=n+1}^N k_{ni} \delta_i = F_n; \quad (20-7)$$

można to tak przekształcić, że

$$\delta_n = k_{nn}^{-1} \left\{ F_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_{ni} \delta_i - \sum_{i=n+1}^N k_{ni} \delta_i \right\}. \quad (20-8)$$

Jeśli zakładamy posługiwanie się procesem iteracyjnym, w którym wartości  $\delta_i$  z prawej strony są założone na podstawie ostatniego przybliżenia, wtedy przy  $m$ -tym cyklu iteracji mamy

$$\delta_n^m = k_{nn}^{-1} \left\{ F_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_{ni} \delta_i^{m-1} - \sum_{i=n+1}^N k_{ni} \delta_i^m \right\}, \quad (20-9)$$

Takie postępowanie zwimy procesem iteracyjnym Gaussa-Seidela.

Zazwyczaj używamy ulepszenia polegającego na tym, że zmiana  $\delta$  dla każdego cyklu jest mnożona przez czynnik dający zmodyfikowane końcowe oszacowanie  $\delta$ , tj.

$$\delta_n^m = \delta_n^{m-1} + \beta (\delta_n^{m*} - \delta_n^{m-1}), \quad (20-10)$$

gdzie  $\delta_n^{m*}$  jest wartością obliczoną z równania (20-9),  $\beta$  zaś jest czynnikiem „ponadrelaksacyjnym” mającym wartość zazwyczaj między 1 a 2. Dla szeregu praktycznych zastosowań wartość około 1,8 okazała się odpowiednia.

Metodę iteracyjną Gaussa-Seidela łatwo jest programować na maszynie. Macierz sztywności jest zapamiętywana w zwartej postaci, przy uwzględnieniu tylko wyników niezerowych i zastosowaniu macierzy wskaźnikowej, określającej umieszczenie w kolumnie poszczególnych wyrazów. Następnie stosuje się równanie (20-9) z modyfikacją (20-10) do każdego równania. Dalej powtarza się proces stosując ulepszony wektor niewiadomych, aż do chwili, gdy liczba cykli stanie się

wystarczającą do otrzymania zadowalającego rozwiązania; zbieżność mierzy się na ogół w odchyłkach między dwoma kolejnymi przybliżeniami.

Metody iteracyjne są atrakcyjne dla zagadnień nieliniowych, te bowiem często wymagają powtarzania rozwiązań w szeregu bardzo podobnych zagadnień, a zatem dostępne są dobre początkowe (wyjściowe) przybliżenia dla wektora rozwiązań. W takich przypadkach można zaoszczędzić na działaniach arytmetycznych, przyjmując rozwiązania o mniejszej dokładności podczas kolejnych, pośrednich kroków iteracji.

Ujemną stroną zastosowania metod iteracyjnych w maszynach jest wymaganie powtarzania podstawowego cyklu dla każdego równania, co czyni proces powolnym, szczególnie gdy do gromadzenia wyników pośrednich należy wykorzystywać pamięć zewnętrzną. Jednakże zwarte upakowanie w pamięci maszyny macierzy sztywności pozwala rozwiązać znaczną liczbę równań za pomocą pamięci wewnętrznej; np. ponad 1000 równań dla 32 K słownej pamięci. Największą jednak wadą jest to, że dla jednego rozwiązania może być użyty tylko jeden wektor obciążenia, ponieważ pamięć przemieszczeń jest krytyczna.

Podprogramy FORMK (dla ułożenia odpowiedniej macierzy sztywności i macierzy wskaźnikowej) oraz SOLVE (dla rozwiązywania równań metodą Gaussa-Seidela) podane są w Dodatku 20a. Są to programy uproszczone, w których liczby cykli i granice zbieżności są skonkretyzowane. W programach tych zastosowano jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy macierzą sztywności a wskaźnikową. Oba programy są całkowicie zgodne z pozostałymi, podanymi w niniejszym rozdziale. Należy zauważyć, że w tym przypadku FORMK tworzy wyrazy zarówno nad, jak i pod przekątną w zwartej macierzy sztywności i tym różni się od innych FORMK (np. Program 20-5), stosowanych do bezpośredniego rozwiązywania.

**20.5.4. Inne metody rozwiązywania bezpośredniego.** Odmianą procesu eliminacji macierzy pasmowych jest tzw. metoda macierzy rozszanej (sparse matrix method) będąca w zasadzie mechanizmem rejestracyjnym. Tutaj podmacierz zapamiętywana jest wraz z macierzą wskaźnikową, która określa wiersze i kolumnę, gdzie zlokalizowana jest ta podmacierz w pełnej macierzy sztywności. W metodzie skończonych elementów przy tej samej liczbie stopni swobody w każdym węźle macierzy wskaźnikowa może być włączona dla przedstawienia podmacierzy węzłowej.

W metodzie macierzy rozszanej przeprowadza się eliminację tak samo, jak opisano poprzednio, lecz używa się w niej macierzy wskaźnikowej jako indeksu. Pozwala to operować tylko podmacierzami niezerowymi. Co do kosztów, to zysk wynikający z pominięcia pewnych operacji równoważy się dodatkowym zużyciem czasu potrzebnego do ustalenia miejsca w pamięci za pomocą macierzy wskaźnikowej. Pojemność pamięci zależy od liczby niezerowych podmacierzy. Dla maksymalnego zaoszczędzenia pamięci i czasu na rozwiązanie, równania należy uporządkować tak, aby uzyskać najmniejszą liczbę wyrazów w macierzy na każdym etapie rozwiązywania. Dla określenia optymalnych warunków obliczeniowych należy stosować programowanie dynamiczne lub podobne procesy przy-

blizone [5]. Czasami takie postępowanie porównujące może być użyte dla zmniejszenia liczby niezerowych operacji w postępowaniu z macierzami pasmowymi. Wówczas jednak szerokość pasma może stać się nadmierna, co przekreśla korzyści procesu porządkowania.

W Dodatku 20b podano dwa podprogramy FORMK i SOLVE, które służą do budowania macierzy sztywności (w postaci górnego trójkąta lub czworoboku) z odpowiednią macierzą wskaźnikową i rozwiązują równania przy użyciu metody macierzy rozszajanej.

Bardziej zasadniczą zmianę postępowania przynosi metoda rozwiązywania frontalnego [2]\*). Podobnie jak metoda macierzy rozszajanej, korzysta ona z macierzy sztywności w formie sprzężonej z macierzą wskaźnikową. Eliminacja w niej przebiega jednak nie po węzłach, ale po elementach, jest więc niezależna od numerowania węzłów. Metoda w szczególności stosowana jest wówczas, gdy elementy mają węzły na środkach boków i może prowadzić do znacznych oszczędności pamięci w porównaniu z pasmowym procesem rozwiązywania.

Zalety systemu FINESSE, stosującego eliminację frontalną, przejawiają się w szczególności przy elementach wyższych rzędów i uwyplniają się w danych odniesionych do elementu. Ponieważ uprzywilejowane jest tutaj wyjście po elementach, w pamięci można np. od razu zebrać większą liczbę przypadków obciążenia. Odpowiednio w czasie eliminacji w pamięci w każdej chwili pojawia się tylko podukład wektorów obciążenia.

Metoda rozwiązywania frontalnego jest najbardziej przydatna w przypadkach, gdy mamy do czynienia z zagadnieniem o dużych rozmiarach przy elementach trójwymiarowych.

**20.5.5. Pewne szczególne ułatwienia.** W bardziej rozbudowanych programach można z powodzeniem zastosować pewne szczególne ułatwienia:

a. *Stosowanie podpodziałów.* Zamiast rozwiązywania kompletnego układu równań, czasem celowe jest zbudowanie macierzy zredukowanej, w której określona liczba równań pozostaje niewyeliminowana; wtedy macierz sztywności i zredukowana macierz obciążeń stanowią dane wyjścia. Można użyć tego sposobu do budowy macierzy sztywności dla zbioru elementów, w którym wyeliminowane są wszystkie punkty prócz zewnętrznych.

b. *Wprowadzenie dodatkowej sztywności.* W uzupełnieniu do tworzenia podpodziałów istnieje ułatwienie, polegające na wprowadzeniu dodatkowych wyrazów do pełnej macierzy sztywności. Pozwala to uwzględnić wprost sprężyste warunki podparcia dla punktowych podpór, a także w przypadku potraktowania podpodziału jako ciąglej podpory okształcalnej.

Wymienione dwie możliwości są w szczególności przydatne w zagadnieniach nieliniowych, gdzie duże części układu pozostają liniowo-sprężyste. W tych przypadkach układ liniowo-sprężysty można zredukować do pewnego podpodziału (podukładu), graniczącego z częścią nieliniową, będącą przedmiotem

badania i użyć tego podukładu jako zredukowanego warunku brzegowego do programu nieliniowego. W ten sposób redukuje się wymiar programu nieliniowego.

**20.5.6. Uwzględnienie warunków brzegowych.** W metodzie elementów skończonych warunki brzegowe są automatycznie wprowadzane do wektora obciążenia; zatem dla brzegu pozbawionego obciążenia wyrazy obciążeniowe odpowiadające takim węzłom są zerami.

Gdy zadane są warunki brzegowe w przemieszczeniach (np. osiadanie fundamentów itp.), należy zmodyfikować zarówno macierz sztywności, jak i wektor obciążenia. Na ogół dla ułatwienia rozmieszczania wskaźników wymiar macierzy powinien pozostać nie zmieniony, tj. nie należy opuszczać ani wierszy, ani kolumn macierzy. Pamiętając o powyższym, istnieją dwa sposoby, których można użyć dla uwzględnienia warunków brzegowych w przemieszczeniach. Załóżmy, że mamy układ równań

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} & \dots & k_{nN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nn} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (20-11)$$

i że np. dane jest  $u_1 = \alpha$ .

Pierwszy sposób polega na modyfikacji wektora-kolumny obciążeń tak, aby  $\bar{F}_1 = F_1 - k_{11}\alpha$  ( $i = 2, \dots, N$ ) oraz  $\bar{F}_1 = \alpha$ . Wówczas odpowiedni szereg i kolumna macierzy staje się zerem, a człon na przekątnej — jednością. W szczególnym, lecz częstym przypadku, gdy  $\alpha = 0$  (podpora niepodatna), potrzeba jedynie zmodyfikować macierz jak opisano powyżej, pozostawiając wektor obciążenia nie zmieniony, z wyjątkiem  $\bar{F}_1 = 0$ .

Drugi sposób polega na mnożeniu odpowiedniego wyrazu na przekątnej przez dużą liczbę, np.  $10^8$ , a następnie zmodyfikowaniu tylko odpowiedniego wyrazu obciążeniowego. W tym przypadku będziemy mieli

$$i \quad \begin{aligned} \bar{k}_{11} &= k_{11} \times 10^8, \\ \bar{F}_1 &= k_{11} \times 10^8 \times \alpha, \end{aligned}$$

podczas gdy  $\bar{k}_{ij} = k_{ij}$  (z wyjątkiem  $i = 1, j = 1$ ),

$$\bar{F}_i = F_i \quad (i \neq 1).$$

Da to rozwiązanie, w którym  $x_1$  jest bardzo bliskie  $\alpha$ . Ten sposób można stosować do wszelkich zagadnień i metod rozwiązywania.

W szeregu przypadków są wymagane, z konieczności, oddziaływania w punktach brzegowych, np. na podporach mostów. W tych przypadkach przy odwrotnym podstawianiu należy ponownie sformułować równania, zawierające te oddziaływania, tak aby zamiast rozwiązywać je w nieznanych przemieszczeniach dla danego obciążenia w punkcie podparcia, poszukiwać bezpośrednio nieznaną

\*) ang.: front solution method.

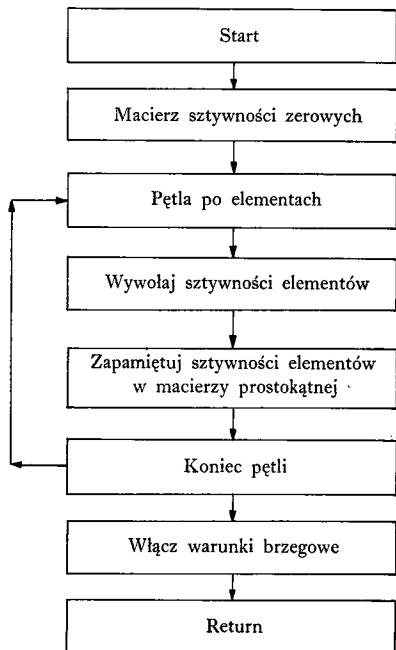


siły, wywołanej przez znane przemieszczenia. W odniesieniu np. do pierwszego równania (20-11) będziemy teraz mieli dla reakcji podporowej

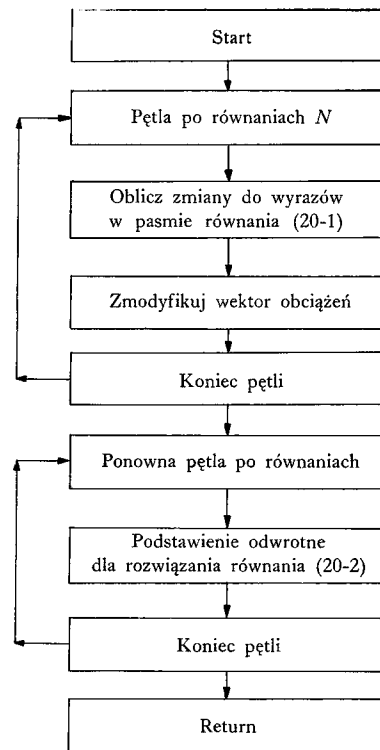
$$R_1 = F_1 - k_{11}\alpha - \sum_{j=2}^N k_{1j}u_j.$$

**20.5.7. Przykład podprogramu.** Podano poniżej dwa schematy blokowe (operacyjne) i dwa podprogramy. FORMK zastosowano do budowy prostokątnej macierzy sztywności i do uwzględnienia warunków brzegowych przy zachowaniu pierwszego z podanych powyżej sposobów (przy  $\alpha = 0$ ). SOLVE stosuje się do rozwiązywania układu równań przy pomocy techniki macierzy pasmowej<sup>1)</sup>.

**a. Schemat blokowy (operacyjny) dla programu FORMK**



**b. Schemat blokowy (operacyjny) dla programu SOLVE**



**Opis zmiennych — podprogram FORMK**

Zmienna:	Opis:
NBAND	Maksymalna szerokość pasma dla programu
NROWB, NCOLB, NCOL	Zmienne definiujące położenie elementu macierzy
NR, NX	Zmienne do definiowania warunków brzegowych
ESTIFM*) (12, 12)	Macierz sztywności elementów

<sup>1)</sup> Odmienne zbiór podprogramów, nie dostosowany do systemu FESS, podany będzie w Dodatku 20c.

\*) Zbiory te mają wspólne oznaczenia.

(O) p i a z m i e n n y c h — podprogram H01,VI

Zmienna:

NBAND

N

C

RI (200) \*)

Opis:

Maksymalna szerokość pasma dla programu

Licznik równań dla eliminacji i odwrotnego podstawienia

Zmienna robocza dla procesu eliminacji

Początkowo zawiera wektor prawych stron równań, następnie zastępowany przez wektor rozwiązań

\*) Zbiory te mają wspólne oznaczenia.

### PROGRAM 20-5

```
      SUBROUTINE FORMK
      C
      C          FORMS STIFFNESS MATRIX
      C          IN UPPER TRIANGULAR FORM
      C
      COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
      COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFX(25)
      1,R1(200),SK(200,40)
      2,ESTIFM(12,12)
      C
      C          SET BANDMAX AND NO OF EQUATIONS
      C
      NBAND = 40
      C
      C          ZERO STIFFNESS MATRIX
      C
      DO 300 N = 1,NSZF
      DO 300 M = 1,NBAND
      300 SK(N,M) = 0.
      C
      C          SCAN ELEMENTS
      C
      DO 400 N = 1,NE
      CALL STIFT2(N)
      C
      C          RETURNS ESTIFM AS STIFFNESS MATRIX
      C
      C          STORE ESTIFM IN SK
      C
      C          FIRST ROWS
      C
      DO 350 JJ = 1,NCN
      NROWB = (NOP(N, JJ) - 1) * NDF
      IF(NROWB) 350,305,305
```

### Program 20-5 ciąg dalszy

```
      DO 350 J = 1,NDF
      NROWB = NROWB + 1,305
      I = (JJ - 1) * NDF + J
      C
      C          THEN COLUMNS
      C
      DO 330 KK = 1,NCN
      NCOLB = (NOP(N, KK) - 1) * NDF
      DO 320 K = 1,NDF
      L = (KK - 1) * NDF + K
      NCOL = NCOLB + K + 1 - NROWB
      C
      C          SKIP STORING IF BELOW BAND
      C
      IF(NCOL) 320,320,310
      310 SK(NROWB, NCOL) = SK(NROWB, NCOL) + ESTIFM(I, L)
      320 CONTINUE
      330 CONTINUE
      350 CONTINUE
      400 CONTINUE
      C
      C          INSERT BOUNDARY CONDITIONS
      C
      DO 500 N = 1,NB
      NX = 10 * (NDF - 1)
      I = NBC(N)
      NROWB = (I - 1) * NDF
      C
      C          EXAMINE EACH DEGREE OF FREEDOM
      C
      DO 490 M = 1,NDF
      NROWB = NROWB + 1
      ICON = NFX(N) / NX
      IF(ICON) 450,450,420
      420 SK(NROWB, 1) = 1.
      DO 430 J = 2,NBAND
      SK(NROWB, J) = 0.
      NR = NROWB + 1 - J
      IF(NR) 430,430,425
      425 SK(NR, J) = 0.
      430 CONTINUE
      NFX(N) = NFX(N) - NX * ICON
      450 NX = NX / 10
      490 CONTINUE
      500 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```

SUBROUTINE SOLVE
C
C SPECIFICATION STATEMENTS
C
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFX(25)
1,R1(200),SK(200,40)
NBAND = 40
C
C REDUCE MATRIX
C
DO 300 N = 1, NSZF
I = N
DO 290 L = 2, NBAND
I = I + 1
IF(SK(N,L)) 240,290,240
240 C = SK(N,L)/SK(N,1)
J = 0
DO 270 K = L, NBAND
J = J + 1
IF(SK(N,K)) 260,270,260
260 SK(I,J) = SK(I,J) - C*SK(N,K)
270 CONTINUE
280 SK(N,L) = C
C
C AND LOAD VECTOR
C FOR EACH EQUATION
C
R1(I) = R1(I) - C*R1(N)
290 CONTINUE
300 R1(N) = R1(N)/SK(N,1)
C
C BACK-SUBSTITUTION
C
N = NSZF
350 N = N - 1
IF(N) 500,500,360
360 L = N
DO 400 K = 2, NBAND
L = L + 1
IF(SK(N,K)) 370,400,370
370 R1(N) = R1(N) - SK(N,K)*R1(L)
400 CONTINUE
GO TO 350
C
500 RETURN
END

```

## 20.6. Obliczenie sił wewnętrznych i wydawnictwo wyników

Końcowym etapem rozwiązania przy stosowaniu zwykłych elementów skończonych w zagadnieniach mechaniki jest obliczenie sił wewnętrznych w elementach.

Dla każdego elementu potrzebne są tutaj dwa etapy (kroki):

a) utworzenie wektora rozwiązań w lokalnym układzie współrzędnych elementu,  
b) konstrukcja odwrotnego podstawienia macierzy naprężeń dla transformacji wektora rozwiązań w siły wewnętrzne. Macierz ta jest jedną z omawianych przy dyskusji nad programem tworzenia macierzy w p. 20.3. Tworzy się ją albo poprzez czytanie z pamięci zewnętrznej, albo poprzez wywoływanie programu tworzenia macierzy sztywności.

Gdy zostały obliczone siły wewnętrzne, często wygodnie jest obliczyć niektóre inne wielkości, jak np. w zadaniu płaskim wartości naprężeń głównych i ich kierunki. Wreszcie drukuje się otrzymane wyniki.

W szeregu bardziej złożonych zagadnień nieliniowych program obliczania naprężeń stanowi zwykle punkt wyjścia dla cyklicznego procesu obliczania albo poprawionej macierzy sztywności (zależnej od wartości naprężeń), albo wektora obciążeń. Taki wektor obciążeń zwykle konstruuje się przy użyciu procesu początkowych naprężeń lub początkowych odkształceń, p. rozdz. 15.

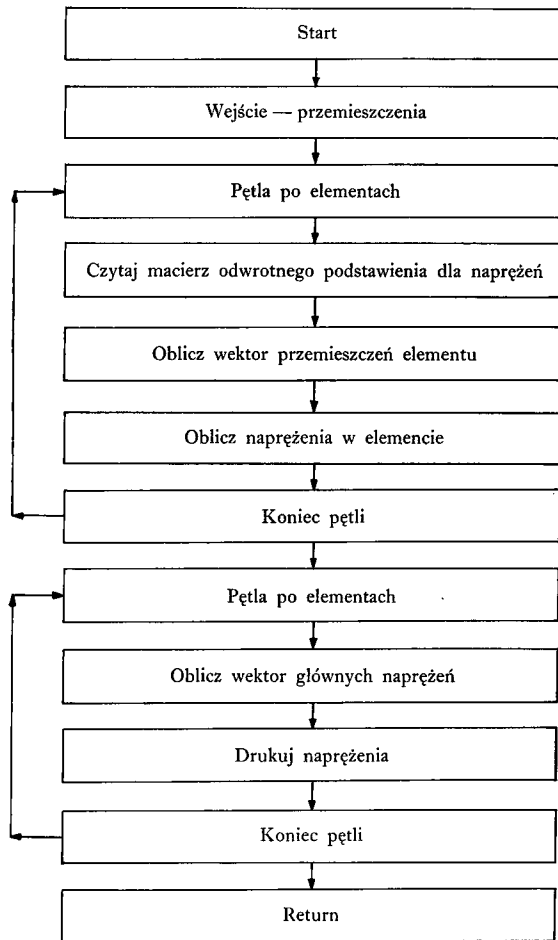
### Opis zmiennych — SUBROUTINE STRESS

Zmienna:	Opis:
DIS (2, 100)*	Wektor przemieszczeń
FORCE (200, 3)*	Wektor sił w elementach
B (3, 6)*	Macierz odwrotnego podstawienia
R (8)*	Wektor przemieszczeń elementu
SMAX	Max. naprężenie w elemencie N
SMIN	Min. naprężenie w elemencie N
ANG	Kąt (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) od pionu do kierunku max naprężenia w elemencie N.

U w a g a: Równoważne sformułowanie wymaga użycia zbioru DIS (2, 100) dla rozwiązania wektora R1 (200)\* i zbioru sił FORCE (200, 3) do zapamiętywania zbioru SK\*).

\*) Zbiory te mają wspólne oznaczenia.

SUBROUTINE STRESS (podprogram naprężenia) na podstawie przemieszczeń oblicza naprężenia w elementach (w rozważanym przypadku — w płaskim stanie naprężenia), a następnie drukuje wyniki



```

SUBROUTINE STRESS
DIMENSION DIS(2,100),FORCE(200,3)
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFIX(25)
1,R1(200),SK(200,40)
2,B(3,6),R(8)
EQUIVALENCE (DIS(1),R1(1)),(SK(1),FORCE(1))
REWIND NT4

C
C
C PRINT DISPLACEMENTS
WRITE(6,100)
WRITE(6,110) (M,(DIS(J,M),J=1,NDF),M=1,NP)
100 FORMAT(///,15X,13HDISPLACEMENTS )
110 FORMAT(110,2F15.4)

C
C CALCULATE ELEMENT FORCES
DO 200 NC=1,NE
READ(NT4) N,((B(I,J),J=1,6),I=1,3)
DO 260 I=1,NCN
M=NOP(N,I)
IF(M.EQ.O) GO TO 260
K=(I-1)*NDF
DO 240 J=1,NDF
IJ=J+K
240 R(IJ)=DIS(J,M)
260 CONTINUE
IA=K+NDF
DO 300 I=1,3
FORCE(N,I)=O.
DO 300 J=1,IA
300 FORCE(N,I)=FORCE(N,I)+B(I,J)*R(J)
200 CONTINUE
WRITE(6,101)

C
C CALCULATE PRINCIPAL STRESSES
AND DIRECTIONS
DO 600 N=1,NE
250 C=(FORCE(N,1)+FORCE(N,2))/2.
A=SQRT(((FORCE(N,2)-FORCE(N,1))/2.)**2+FORCE(N,3)**2)
SMAX=C+A
SMIN=C-A
IF(FORCE(N,2).EQ.SMIN) GO TO 700
ANG=87.29578*ATAN(FORCE(N,3)/(FORCE(N,2)-SMIN))
    
```

## Program 20-7 ciąg dalszy

GO TO 210		44
700 ANG=90.		45
210 CONTINUE		46
C		
C	WRITE ALL STRESS COMPONENTS	
C		
400 WRITE(6,111)		47
1N,(FORCE(N,I),I=1,3),SMAX,SMIN, ANG		
800 CONTINUE		51
101 FORMAT(107H0 ELEMENT X-STRESS Y-STRESS X		
1Y-STRESS MAX-STRESS MIN-STRESS ANGLE)		
111 FORMAT(110,5F17.4,F12.3)		
RETURN		54
END		55

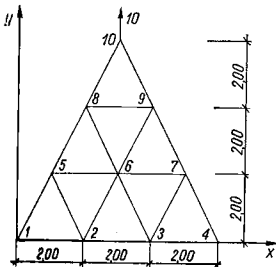
## 20.7. Zadania przykładowe

Na rysunku 20.3 pokazano płaski trójkąt poddany obciążeniu pionowemu, podzielony na elementy skończone siatką 10 punktów i 9 elementów. Przyjęto, że trójkąt jest zamocowany w punktach 1 i 4.

W tym przypadku należy użyć następujących programów:

- MAIN program (Program 20-1),
- GDATA podprogram (Program 20-2),
- LOAD podprogram (Program 20-3),
- STIFT 2 podprogram (Program 20-4),
- FORMK podprogram (Program 20-5),
- SOLVE podprogram (Program 20-6),
- STRESS podprogram (Program 20-7).

Dane wejściowe wymienione są w przytoczonej niżej instrukcji wraz z wydrukowanymi wynikami dla zadania pokazanego na rys. 20.3.



Rys. 20.3. Trójkąt w płaskim stanie odkształcenia

## Instrukcja do wprowadzenia danych

- Karta problemu (18)**  
Kol. 1-5\* nr problemu (NPROB)
- Karta tytułowa (12A6)**  
Kol. 1-72, tytuły, które mają być wydrukowane (TITLE)
- Karta kontrolna (715)**  
Kol. 1-5\* liczba węzłów (NP)  
Kol. 6-10\* liczba elementów (NE)  
11-15\* liczba węzłów zamocowanych (NB)  
16-20\* liczba warunków obciążenia (NLD)  
21-25\* liczba stopni swobody — 2 (NDF)  
26-30\* liczba różnych materiałów (NMAT)  
31-35\*  $\begin{cases} 0 & \text{drukuj dane wejścia} \\ 1 & \text{przeskocz druk danych wejścia} \end{cases}$  (I1)
- Karty materiałowe (110 2F10.2) 1 dla każdego materiału**  
Kol. 1-10\* numer materiału (N)  
11-20 moduł Younga (ORT (N, 1))  
21-30 współczynnik Poissona (ORT (N, 2))
- Karty współrzędnych (110 2F10.0) 1 dla punktu węzłowego**  
Kol. 1-10\* numer węzła (N)  
11-20 współrzędna X (CORD (N, 1))  
21-30 współrzędna Y (CORD (N, 2))
- Karty elementu (615) 1 dla każdego elementu**  
Kol. 1-5\* numer elementu (N)  
6-10\*  $i$  (NOP (N, 1))  
11-15\*  $j$  połączenia elementów (NOP (N, 2))  
16-20\*  $m$  (NOP (N, 3))  
21-25 nie używane (NOP (N, 4))  
26-30\* numer materiału (IMAT (N))
- Karty węzłów zamocowanych (215) 1 dla każdego warunku brzegowego**  
Kol. 1-5\* numer węzła zamocowanego (NBC (I))  
6-10\* 1 zamocowany w kierunku Y  
10 zamocowany w kierunku X  
11 zamocowany w obu kierunkach (NFIX (I))
- Karty obciążeń (110, 2F10.2) 1 dla każdego punktu obciążonego**  
Kol. 1-10\* numer węzła (NQ)  
11-20 obciążenie w kierunku X (R (1))  
21-30 obciążenie w kierunku Y (R (2))

U w a g a: Karty obciążenia kończymy na ostatnim numerowanym węźle, niezależnie czy w nim jest, czy nie ma obciążenia.

\* Wskazując, że liczby powinny być poprawnie zapisane bez znaków dziesiętnych, wszystkie pozostałe liczby muszą mieć znaki dziesiętne.

**PROGRAM A**

SAMPLE DATA

COLUMNS

1 2 3 4 5 6 7 8  
 123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

1  
 TEST TRIANGLE

10 9 2 1 2 1  
 1 0.96 0.2  
 1  
 2 2.  
 3 4.  
 4 6.  
 5 1. 2.  
 6 3. 2.  
 7 5. 2.  
 8 2. 4.  
 9 4. 4.  
 10 3. 6.

1 1 2 5 1  
 2 2 3 6 1  
 3 3 4 7 1  
 4 3 7 6 1  
 5 2 6 5 1  
 6 5 6 8 1  
 7 6 7 9 1  
 8 6 9 8 1  
 9 8 9 10 1  
 1 11  
 4 11  
 10 10.

TEST TRIANGLE

10 9 2 1 2 1 0

MATERIAL PROPERTIES

1 .96 .20

NODAL POINTS

1 .000 .000  
 2 2.000 .000  
 3 4.000 .000  
 4 6.000 .000  
 5 1.000 2.000  
 6 3.000 2.000  
 7 5.000 2.000  
 8 2.000 4.000

**Program A clqg dlnxy**

9 4.000 4.000  
 10 3.000 6.000

ELEMENTS

1 1 2 5 0 1  
 2 2 3 6 0 1  
 3 3 4 7 0 1  
 4 3 7 6 0 1  
 5 2 6 5 0 1  
 6 5 6 8 0 1  
 7 6 7 9 0 1  
 8 6 9 8 0 1  
 9 8 9 10 0 1

BOUNDARY CONDITIONS

1 11  
 4 11

TEST TRIANGLE

LOAD CASE 1

LOADS

10 .00 10.00

DISPLACEMENTS

1 .0000 .0000  
 2 1.0941 17.7565  
 3 -1.0941 -17.7565  
 4 .0000 .0000  
 5 -1.6412 15.6785  
 6 .0000 20.9599  
 7 1.6412 15.6785  
 8 .8206 25.3126  
 9 -.8206 25.3126  
 10 .0000 44.4729

ELEMENT	X-STRESS	Y-STRESS	XY-STRESS	MAX-STRESS	MIN-STRESS	ANGLE
1	1.4902	3.7727	3.1136	5.9477	-.6847	34.935
2	-.7399	1.4167	-.0000	1.4167	-.7399	-.000
3	1.4902	3.7727	-3.1136	5.9477	-.6847	-34.935
4	.9503	.5189	-.6733	1.4417	.0276	-53.881
5	.9503	.5189	.6733	1.4417	.0276	53.881
6	1.8077	3.9487	1.3845	4.6283	1.1281	26.145
7	1.8077	3.9487	-1.3845	4.6283	1.1281	-26.145
8	-.2949	2.1027	.0000	2.1027	-.2949	.000
9	1.6794	10.0000	.0000	10.0000	1.6794	.000

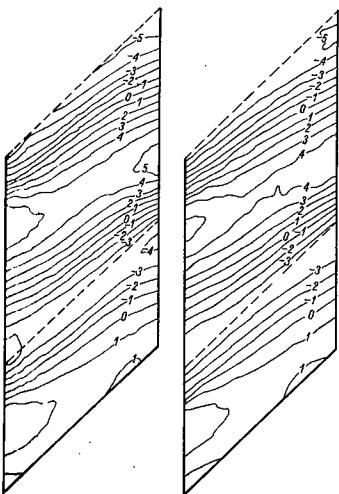
## 20.8. Przedstawienie wyników

Jednym z istotnych zagadnień praktycznych w metodzie elementów skończonych jest jasna i nie wymagająca dużego nakładu interpretacja bardzo dużej ilości danych uzyskanych w wyniku obliczeń. Zastosowanie zautomatyzowanego sposobu graficznego przedstawienia danych prowadzi zawsze do dużej oszczędności czasu i zredukowania wspomnianej trudności.

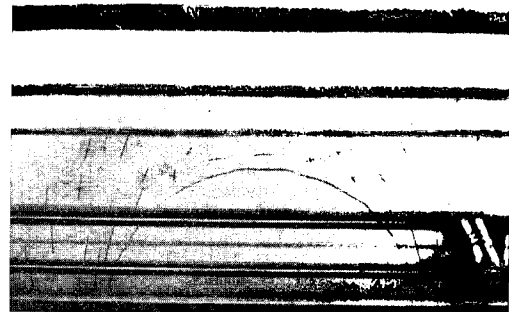
Warstwice naprężeń stanowią jeden z wygodnych sposobów przedstawienia wyników. Mogą one być narysowane na całym badanym obszarze lub też na wybranej jego części. W najprostszym przypadku wartości naprężeń w węzle są uśrednianymi wartościami naprężeń w elementach dochodzących do węzła. Następnie rysowane są warstwice jako serie linii prostych na każdym elemencie związanym z tymi wartościami węzłowymi (rys. 20.4), [6]; brak gładkości na rysunku wskazuje na pewne niedociągnięcia i określa stopień przydatności rozwiązania. Programy wykonujące rysunek otrzymuje się bezpośrednio od wytwórców „kreślarzy automatycznych”; pozwalają one na gładkie wykreślenie linii na podstawie danych określonych dla oddzielnych punktów.

Innym zastosowaniem „kreślarza automatycznego” jest przedstawienie w określonej podziale wektorów naprężeń głównych w odpowiednim dla każdego elementu kierunku. Na rys. 20.5 pokazano przykład takiego przedstawienia.

Większość stosowanych obecnie elementów wykazuje nieciągłości w naprężeniach przy przejściu od jednego elementu do sąsiedniego, chociaż naprężenia w sąsiednich elementach często znajdują się na poprawnej krzywej. Aby ułatwić



Rys. 20.4. Warstwice momentów dla płyty mostu skośnego



Rys. 20.5. Automataczne kreślenie naprężeń głównych za pomocą programu kreślenia wektorów na kreślarzu automatycznym

interpretację naprężeń poprzez wygładzanie ich skoków (a czasem aby otrzymać lepszą dokładność), stosowane są na ogół dwa rodzaje uśredniania. Pierwszy rodzaj polega na uśrednianiu naprężeń w dwu sąsiadujących elementach, budując np. czworobok na dwu trójkątach i obliczając średnie wartości naprężeń z obu elementów, przyłożone w określonym punkcie tego czworoboku. Drugi rodzaj uśredniania polega na tym, że naprężenia we wszystkich elementach łączących się w rozważanym węzle sumuje się, a następnie dzieli przez liczbę elementów, otrzymując średnią wartość w węzle. To ostatnie daje zwykle całkowite wyrównanie i dużą dokładność rozkładu naprężeń, z wyjątkiem może zakłóceń w punktach brzegowych i w obszarach dużych gradientów naprężeń.

### PROGRAM 20-8

```
C VECTOR PLOT ROUTINE FOR CALCOMP
C DIMENSION IBUF(1000)
C
C OUTPUT REEL NO.
C AND SET UP BUFFER AREA
C
C LDEV = 1
C CALL PLOTS(IBUF,1000,LDEV)
C
C READ SCALE INFORMATION
C
C READ (5,10) XSHIFT,XSCALE,YSHIFT,YSCALE
10 FORMAT(4F10.2)
C WRITE(6,11) XSHIFT,XSCALE,YSHIFT,YSCALE
11 FORMAT(13H1 X SHIFT =,F10.2/
1 13H X SCALE =,F10.2/
2 13H Y SHIFT =,F10.2/
3 13H Y SCALE =,F10.2)
```

**Program 20-8 ciąg dalszy**

```

READ(6,16) PSCALE
16 FORMAT(F10.2)
WRITE(6,16) PSCALE
16 FORMAT(13H0PLOT SCALE =,F10.2,9H UNITS/IN)
C
C                               READ A CARD WITH COORDS
C                               AND STRESSES
C
100 READ(5,20) N,X,Y,SMAX,SMIN,ANG
WRITE(6,20) N,X,Y,SMAX,SMIN,ANG
20 FORMAT(110,2F10.2,3F10.3)
C
C                               IF CARD IS BLANK END PLOT
C
IF(N) 210,210,110
C
C                               CHANGE SCALES
110 X=(X-XSHIFT)*XSCALE
Y=(Y-YSHIFT)*YSCALE
SMAX=SMAX/PSCALE
SMIN=SMIN/PSCALE
ANG=ANG/57.3
C
C                               COMPUTE ENDS OF VECTORS
R=X+SMAX/2.*SIN(ANG)
S=Y+SMAX/2.*COS(ANG)
P=2.*X-R
Q=2.*Y-S
C
C                               AND DRAW LINES
CALL PLOT(R,S,3)
CALL PLOT(P,Q,2)
R=X-SMIN.*COS(ANG)
S=Y+SMIN.*SIN(ANG)
P=2.*X-R
Q=2.*Y-S
CALL PLOT(R,S,3)
CALL PLOT(P,Q,2)
C
C                               DRAW ELEMENT NO.
A=X+0.2
B=Y+0.1
FPN=N
CALL NUMBER (A,B,.14,FPN,0.0)

```

**Program 20-N ciąg dalszy**

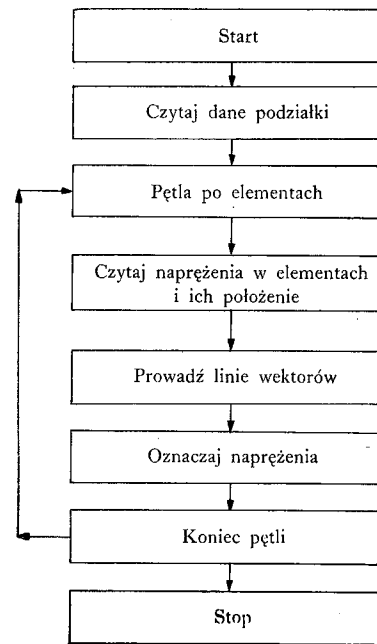
```

C
C                               RETURN FOR NEXT ELEMENT
C
GO TO 100
C
C                               END PLOT
C
210 CONTINUE
CALL PLOT (0.,0.,999)
STOP
END

```

**Schemat blokowy (operacyjny) i przykład programu**

Program dla przedstawienia wektorów naprężeń podany powyżej stanowi oddzielny program, czytający karty zawierające naprężenia i wyprowadzający wektory w odpowiedniej skali dla każdego elementu. Podprogramy są częścią wyposażenia Calcomp Fortran





## 20.9. Iteracyjna metoda wyznaczania wartości własnych

Przy analizie stateczności za pomocą elementów skończonych, problemów drgań itp. wprowadza się układ równań macierzowych w postaci  $HX = \lambda X$ , gdzie  $H$  jest macierzą kwadratową o znanych współczynnikach,  $X$  ma postać  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ , wreszcie  $\lambda$  jest wielkością skalarną, odniesioną do częstotliwości drgań własnych, obciążeń krytycznych itp. Równania  $HX = \lambda X$  zwane są równaniami wartości własnych; istnieje na ogół tyle rozwiązań, tj. wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych, ile jest stopni swobody  $x_i$ . Przykładem mogą być drgania własne, gdzie

$$[H] = [K]^{-1}[M]. \quad (20-12)$$

Największa wartość własna może być wyznaczona poprzez proste postępowanie iteracyjne.

a. Zakładamy (odgadujemy) układ wartości wektora  $X$ , oznaczamy te wartości np. przez  $X_{g1}$ . Ponieważ wektor własny przedstawia odpowiednią postać układu, wystarczy jedynie określić względny stosunek wartości składowych wektora  $X$ . Można więc założyć, że jedna z nieznanych składowych (np.  $x_1$ ) jest równa jedności.

b. Obliczamy  $AX_{g1}$ .

c. Iloczyn  $AX_{g1}$  jest wektorem i można go zapisać w postaci  $\lambda_{g2}X_{g2}$ , gdzie  $\lambda_{g2}$  jest wspólnym czynnikiem, takim że znów  $x_1$  w  $X_{g2}$  jest równe jedności, podczas gdy pozostałe wartości  $x_2, x_3, \dots, x_n$  mają odpowiednie wartości, wynikające z ich stosunków do  $x_1$ .

d. Porównujemy  $X_{g2}$  z  $X_{g1}$  albo ogólnie,  $X_{gr}$  i  $X_{gr+1}$ .

Jeżeli różnica nie przekracza określonej, dopuszczalnej wartości odchyłki, wtedy nowy układ obranych wartości daje wartość własną wektora, wspólny zaś czynnik  $\lambda$  jest podstawową wartością własną. Jeżeli różnica przekracza wartość dopuszczalną, wtedy powtarzamy iterację.

Dalsze wartości własne i odpowiadające im wektory własne znajdować można stosując proces zerowania<sup>1)</sup> w połączeniu z techniką iteracyjną. Proces zerowania modyfikuje  $H$ , aby zmienić największą wartość własną układu na zero, tak że następną największą wartość  $\lambda$  staje się podstawową i proces iteracji może być prowadzony dalej.

Zakładamy teraz, że na pewnym etapie obliczeń dokonaliśmy  $r$ -tego kroku i że  $\lambda_r$  i  $X_r$  są uzyskanymi teraz — wartością własną i odpowiednim wektorem własnym. Macierz użyta do wyznaczenia tych wielkości może być teraz znów zerowana dla usunięcia  $r$ -tego pierwiastka, a raczej do sprowadzenia  $\lambda_r$  do zera, bez zmiany pozostałych wartości własnych ani wektorów własnych. Oczywiście gdy to nastąpi, wówczas  $\lambda_{r+1}$  stanie się największą wartością własną i może być obliczona z macierzy zerowanej.

<sup>1)</sup> ang.: „zeroing” process (przyb. tłum.).

Niech więc

$$Z_r = \frac{X_r X_r^T M}{X_r^T M X_r}. \quad (20-13)$$

Mamy zatem

$$[H - \lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2 - \dots - \lambda_r Z_r] X_r = H X_r - \lambda_1 Z_1 X_r - \lambda_2 Z_2 X_r - \dots - \lambda_r Z_r X_r \\ = \lambda_r X_r - \frac{\lambda_1 X_1 (X_1^T M X_r)}{X_1^T M X_1} - \frac{\lambda_2 X_2 (X_2^T M X_r)}{X_2^T M X_2} - \dots - \frac{\lambda_r X_r (X_r^T M X_r)}{X_r^T M X_r}. \quad (20-14)$$

Z uwagi na własność ortogonalności postaci drgań można pokazać, że dla  $r \neq s$  mamy

$$X_r^T M X_s = 0. \quad (20-15)$$

Możemy więc przepisać równanie (20-12) następująco

$$[H - \lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2 - \dots - \lambda_r Z_r] X_r = \lambda_r X_r - \lambda_r X_r = O X_r, \quad (20-16)$$

ponieważ  $X_r^T M X_r$  jest skłalem i może być skasowane.

Z (20-16)  $X_r$  pozostaje nadal wektorem własnym macierzy zerowanej, ale odpowiadająca mu wartość własna  $\lambda_r$  jest zerem.

Należy jednak pokazać, że inne pierwiastki równania nie uległy zmianie w czasie procesu zerowania. Zakładając, że  $\lambda_s$  i  $X_s$  są wartością własną i wektorem własnym  $s$ -tej postaci ( $s > r$ ), piszemy

$$[H - \lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2 - \dots - \lambda_r Z_r] X_s = H X_s - \lambda_1 Z_1 X_s - \lambda_2 Z_2 X_s - \dots - \lambda_r Z_r X_s \\ = \lambda_s X_s - \frac{\lambda_1 X_1 (X_1^T M X_s)}{X_1^T M X_1} - \frac{\lambda_2 X_2 (X_2^T M X_s)}{X_2^T M X_2} - \dots - \frac{\lambda_r X_r (X_r^T M X_s)}{X_r^T M X_r} \quad \lambda_s X_s. \quad (20-17)$$

A więc  $\lambda_s$  pozostaje pierwiastkiem macierzy zerowanej.

Własność ortogonalności użytą w (20-14) i w (20-17) bada się jak poniżej

$$K^{-1} M X_s = \lambda_s X_s, \quad (20-18)$$

$$K^{-1} M X_r = \lambda_r X_r. \quad (20-19)$$

Mnożąc równanie (20-18) przez  $X_r^T M^T$ , równanie zaś (20-19) przez  $X_s^T M^T$ , a następnie transponując ostatnie równanie (pamiętając, że zarówno  $K^{-1}$  jak i  $M$  są symetryczne) otrzymujemy

$$X_r^T M^T K^{-1} M X_s = \lambda_s X_r^T M X_s, \quad (20-20)$$

$$X_r^T M^T K^{-1} M X_s = \lambda_r X_r^T M X_s. \quad (20-21)$$

Jeżeli teraz odejmiemy (20-21) od (20-20), wynik będzie

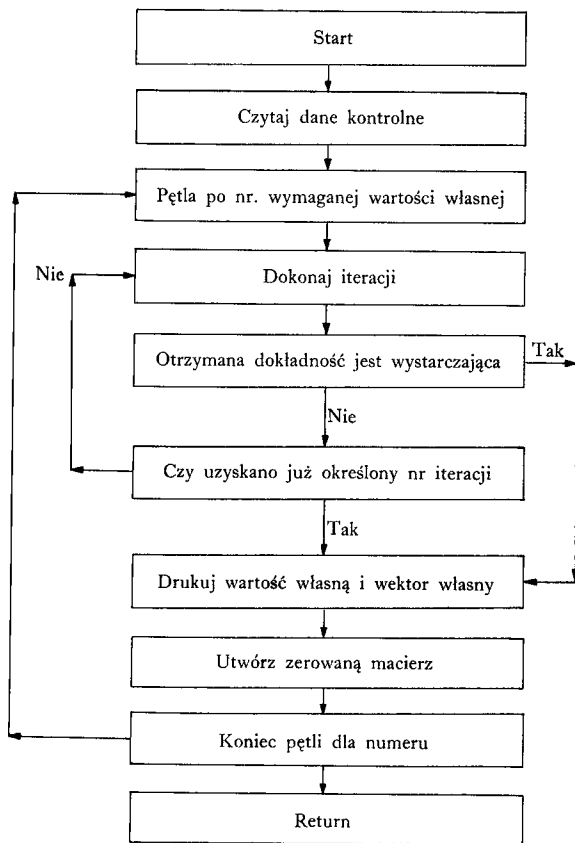
$$0 = (\lambda_s - \lambda_r) X_r^T M X_s, \quad (20-22)$$

a ponieważ na ogół  $\lambda_r \neq \lambda_s$ , musi być

$$X_r^T M X_s = 0. \quad (20-23)$$

## Przykład programu

### Schemat blokowy (operacyjny) dla EIGEN



## Opis zmiennych dla podprogramu EIGEN

Zmienna:	Opis:
EGG	Macierz wartości własnych $K^{-1}M$ lub $M^{-1}K$
W	Macierz masy (lub sztywności)
TEST	Potrzebna dokładność wektora własnego
NIT	Maksymalna liczba potrzebnych iteracji
NEIG	Liczba potrzebnych wartości własnych
OM	Pierwiastek kwadratowy z odwrotności wartości własnej, stosowany wspólnie z $K^{-1}M$ dla obliczania najniższej częstotliwości własnej

### PROGRAM 20-9

```

SUBROUTINE EIGEN(EGG,W,NV)
  DIMENSION EGG(4,4),X(4),XAUX(4),XUX(4),EAUX(4,4),W(4,4)
  C          EGG - EIGENVALUE MATRIX H
  C          W - MASS MATRIX
  C
  READ (5,10) TEST,NIT,NEIG
  10 FORMAT(F10.5,2I10)
  C          TEST - ACCURACY REQUIRED
  C          NIT - MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
  C          NEIG - NUMBER OF EIGENVALUES REQUIRED
  C
  DO 1 I=1,NEIG
  DO 66 I=1,NV
  XUX(I)=1.
  66 X(I)=1.
  14 CALL MPRD(EGG,X,XAUX,NV,NV,1)
  EIG=XAUX(1)
  DO 57 I=1,NV
  X(I)=XAUX(I)/EIG
  DO 67 I=1,NV
  IF(ABS((X(I)-XUX(I))/X(I))-TEST)67,67,82
  67 CONTINUE
  C          GOOD ENOUGH
  C
  GO TO 50
  C          REPEAT
  C
  82 ITS=ITS-1
  IF(ITS) 21,21,25
  21 WRITE(6,22)
  22 FORMAT(26H ITERATION COUNT EXCEEDED)
  GO TO 50
  25 DO 26 I=1,NV
  26 XUX(I)=X(I)
  
```

## Program 20-9 ciąg dalszy

```
42 FORMAT (4E16.8)
GO TO 14
50 OM=SQRT(1./EIG)
WRITE(5,13) II,OM
WRITE(5,42) (X(I),I=1,4)
13 FORMAT (15,E16.8)
```

FORM ZOOED MATRIX

```
C
C
CALL TPRD(X,W,XUX,NV,1,NV)
CALL MPRD(XUX,X,XAUX,1,NV,1)
AA = EIG/XAUX(1)
DO 68 I = 1,NV
68 XAUX(I) = X(I)*AA
CALL MPRD(XAUX,XUX,EAUX,NV,1,NV)
DO 110 I = 1,NV
DO 110 J = 1,NV
110 EGG(I,J) = EGG(I,J) - EAUX(I,J)
1 CONTINUE
RETURN
END
```

## PROGRAM 20-10

```
SUBROUTINE MPRD(D,B,DB,L,M,N)
DIMENSION D(4,4),B(4,4)DB(4,4)
C
DB(L,N) = D(L,M)*B(M,N)
DO 110 J = 1,N
DO 110 I = 1,L
DB(I,J) = 0
DO 110 K = 1,M
110 DB(I,J) = DB(I,J) + D(I,K)*B(K,J)
RETURN
END
```

## PROGRAM 20-11

```
SUBROUTINE TPRD(D,B,DB,M,L,N)
DIMENSION D(4,4),B(4,4),DB(4,4)
C
DB(L,N) = (TRANPOSE D(M,L))*B(M,N)
DO 110 J = 1,N
DO 110 I = 1,L
DB(I,J) = 0
DO 110 K = 1,M
110 DB(I,J) = DB(I,J) + D(K,I)*B(K,J)
RETURN
END
```

## 20.10. Uwagi końcowe

W niniejszym rozdziale omówiono całość postępowania przy rozwiązywaniu zadań metodą elementów skończonych i przedstawiono wzorce programów. Materiał podany tutaj nie dotyczy zbyt skomplikowanych problemów, zaciemniałoby to bowiem obraz i utrudniło początkującemu Czytelnikowi zrozumienie istoty zagadnienia. Zamiast tego autorzy podali rozsądnie prosty, lecz efektywny program, wskazując równocześnie na inne metody i okoliczności, które mogą być włączone do rozważań.

Podany w niniejszym rozdziale program obliczania wartości własnych jest bardzo prosty i nie wykorzystuje symetrii macierzy sztywności (lub masy) albo też geometrycznej sztywności. Czytelnik interesujący się bardziej zaawansowaną techniką obliczeniową i metodami oszczędzania czasu maszyny i jej pamięci zechce zapoznać się z pracą *Andersona* [8] o zagadnieniach drgań i stateczności.

## Dodatek 20a.

### Wykaz podprogramów do tworzenia równań i rozwiązania za pomocą iteracji *Gausa-Seidela*

#### PROGRAM 20-12

```
SUBROUTINE FORMK
C
C
C SUBROUTINE TO FORM K
C COMPACT WITH POINTER MATRIX
C
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFX(25)
1,R1(200),SI(200,20),ISP(200,20)
2,ESTIFM(12,12)
C
C SET MAX NO. OF TERMS
C
NMAX = 20
NOFF = 20
C
C ZERO ARRAYS
C
DO 300 N = 1,NSZF
DO 280 M = 1,NMAX
280 SI(N,M) = 0.
DO 290 M = 2,NOFF
290 ISP(N,M) = 0
300 ISP(N,1) = N
C
C SCAN ELEMENTS
C
```



**Program 20-13 ciąg dalszy**

```

ITEM(N,1) = M - 1
GO TO 260
250 CONTINUE
260 CONTINUE
300 CONTINUE
310 NEQ = IABS(NEQ)
C
C
C           SET MAX NO OF CYCLES
C
C           NCYC = NEQ/2
C           IF(NCYC.LT.25) NCYC = 25
C
C
C           UNKNOWNNS ARE SET TO ZERO
C
C           DO 320 N = 1,NEQ
C           IF(A(N,1).NE.O.) A(N,1) = 1./A(N,1)
320 DIS(N) = 0
C
C           LOOP ON CYCLES
C
C           DO 500 NC = 1,NCYC
C           SUM = 0.
C           SUMD = 0.
C
C           THEN ON EQUATIONS
C
C           DO 450 N = 1,NEQ
C           FX = R(N)
C           NUM = ITEM(N,1)
C           DO 330 M = 2,NUM
C           L = ITEM(N,M)
330 FX = FX - A(N,M)*DIS(L)
C
C           FX IS TOTAL UNBALANCE OF RHS
C           DX IS THE CHANGE
C
C           DX = A(N,1)*FX - DIS(N)
C           DIS(N) = DIS(N) + RLAX*DX
C
C           SUM AND SUMD ARE CONVERGENCE
C           PARAMETERS
C
C           SUM = SUM + ABS(DX)
C           SUMD = SUMD + ABS(DIS(N))
450 CONTINUE
C
C           SKIP OUT OF LOOP IF CONVERGED
C

```

**Program 20-13 ciąg dalszy**

```

ND - NC
IF(SUM LT SUMD*TOLER) GO TO 650
500 CONTINUE
C
C
C           MOVE FINAL RESULTS TO R
C
C           550 DO 600 N = 1,NEQ
C           600 R(N) = DIS(N)
C
C
C           PRINT LAST VALUE OF SUM ETC
C
C           WRITE(6,10) ND,SUM,SUMD
10  FORMAT(20H0 LAST CYCLE NO. =,I10
1, / 20H (SN - SN - 1)/SN =,E10.3
2, / 20H SN =,E10.3)
RETURN
END

```

**Dodatek 20b.**

**Wykaz podprogramów do tworzenia równań i rozwiązania za pomocą macierzy rozsianej (metoda frontalna)**

**PROGRAM 20-14**

```

SUBROUTINE FORMK
C
C           SUBROUTINE TO FORM K
C           UPPER TRIANGULAR SECTION ONLY
C           COMPACT WITH POINTER MATRIX
C
C           COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,PDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
C           COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFX(25)
C           1,R1(200),SI(200,20),ISP(200,20)
C           2,ESTIFM(12,12)
C
C           SET MAX NO. OF TERMS
C
C           NMAX = 20
C           NOFF = 20
C
C           ZERO ARRAYS
C
C           DO 300 N = 1,NSZF
C           DO 280 M = 1,NMAX
280 SI(N,M) = 0.
C           DO 290 M = 2,NOFF
290 ISP(N,M) = 0
300 ISP(N,1) = N

```

Program 20-14 ciąg dalszy

```

C
C
C
      DO 400 N=1,NE
      CALL STIFT2(N)
C
C
C
C
C
C
C
C
      I=0
      DO 350 JJ=1,NCN
      NROWB=(NOP(N,JJ)-1)*NDF
      DO 350 J=1,NDF
      NROWB=NROWB+1
      I=I+1
C
C
C
      THEN COLUMNS OF ESTIFM
      II=0
      DO 330 KK=1,NCN
      NCOLB=(NOP(N,KK)-1)*NDF
      DO 330 K=1,NDF
      NCOLB=NCOLB+1
      II=II+1
C
C
C
      SKIP IF TERM BELOW DIAGONAL
      IF(NCOLB-NROWB) 330,302,302
302 CONTINUE
C
C
C
      SEARCH ISP FOR COLUMN NO.
      DO 310 M=1,NOFF
      IF(ISP(NROWB,M)-NCOLB) 305,320,305
305 IF(ISP(NROWB,M)) 315,315,310
310 CONTINUE
C
C
C
      FOUND A BLANK NOW STORE NCOLB
315 ISP(NROWB,M)=NCOLB
C
C
      NOW STORE ESTIFM

```

Program 20-14 ciąg dalszy

```

C
      320 SI(NROWB,M)=ESTIFM(I,II)+SI(NROWB,M)
C
C
      330 CONTINUE
      END LOOP ON COLUMNS
C
      350 CONTINUE
      END LOOP ON ROWS
C
      400 CONTINUE
      END LOOP ON ELEMENTS
C
C
      INSERT BOUNDARY CONDITIONS
C
      DO 500 N=1,NB
      NX=10*(NDF-1)
      I=NBC(N)
      NROWB=(I-1)*NDF
C
C
      EXAMINE EACH DEGREE OF FREEDOM
      DO 490 M=1,NDF
      NROWB=NROWB+1
      ICON=NFIX(N)/NX
      IF(ICON) 450,450,420
C
C
      STORE LARGE NO ON DIAGONAL
      420 SI(NROWB,1)=SI(NROWB,1)+10.**20
      NFIX(N)=NFIX(N)-NX*ICON
      450 NX=NX/10
      490 CONTINUE
      500 CONTINUE
      RETURN
      END

```

PROGRAM 20-15

```

      SUBROUTINE SOLVE
C
C
      SOLVES SPARSE MATRIX
C
      COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NEQ,LI,NT4
      COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),NFIX(25)
      1,R(200),A(200,20),ITEM(200,20),IMET(200)
      NT=20
C
C
      IF NEQ NEGATIVE SKIP
      FORMATION OF FULL ITEM MATRIX
C
      IF(NEQ.LT.0) GO TO 360

```

Program 20-15 ciąg dalszy

```

C
C      OTHERWISE WORK THROUGH
C      EQUATIONS AND FILL ITEM AS NEEDED
C
DO 220 M=1,NT          SYM 6
220 IMET(M)=ITEM(1,M)  SYM 7
DO 340 N=2,NEQ         SYM 8
DO 280 M=1,NT          SYM 9
IF(IMET(M)-N+1) 225,280,225 SYM 10
225 DO 240 L=1,NT      SYM 11
IF(ITEM(N,L)) 230,260,230 SYM 12
230 IF(ITEM(N,L)-IMET(M)) 240,280,240 SYM 13
240 CONTINUE          SYM 14
WRITE(6,100) N        SYM 15
100 FORMAT(43H ALLOWABLE SPACE EXCEEDED IN EQUATION TABLE,14) SYM 16
STOP                 SYM 17
260 ITEM(N,L)=IMET(M) SYM 18
280 CONTINUE          SYM 19
300 DO 320 M=1,NT     SYM 20
320 IMET(M)=ITEM(N,M) SYM 21
340 CONTINUE          SYM 22
360 NEQ=IABS(NEQ)     SYM 23
NEQM=NEQ-1           SYM 24

C
C      LOOP ON EQUATIONS
C
DO 520 I=1,NEQM       SYM 25

C
C      MODIFY RHS VECTOR
C
R(I)=R(I)/A(I,1)     SYM 26

C
C      LOOP ON ROW TO BE ELIMINATED
C
DO 460 M=2,NT         SYM 27
IN=ITEM(I,M)         SYM 28
IF(IN) 365,480,365   SYM 29

C
C      SEEK APPROPRIATE ROWS
C
365 DO 380 N=1,NT     SYM 30
IA=ITEM(IN,N)        SYM 31
IF(IA) 370,400,370   SYM 32
370 IMET(IA)=N       SYM 33
380 CONTINUE         SYM 34

```

Program 20-15 ciąg dalszy

```

400 CONTINUE          SYM 36
TEMP=A(I,M)/A(I,1)   SYM 38
C
C      LOOP ON COLUMN TO BE ELIMINATED
C
DO 420 N=1,NT        SYM 37
IA=ITEM(I,N)         SYM 38
IF(IA) 405,440,405   SYM 39
405 IF(IA-IN) 420,410,410 SYM 40
410 IM=IMET(IA)      SYM 41
C
C      MODIFY TERM OF MATRIX
C
A(IN,IM)=A(IN,IM)-TEMP*A(I,N) SYM 42
420 CONTINUE          SYM 43
C
C      MODIFY LOAD VECTOR
C
440 R(IN)=R(IN)-R(I)*A(I,M) SYM 44
460 CONTINUE          SYM 45
480 CONTINUE          SYM 46
C
C      RESET ROW FOR BACK-SUBSTITUTION
C
DO 500 M=2,NT        SYM 47
A(I,M)=A(I,M)/A(I,1) SYM 48
500 CONTINUE          SYM 49
520 CONTINUE          SYM 50
R(NEQ)=R(NEQ)/A(NEQ,1) SYM 51
C
C      BACK-SUBSTITUTE
C
DO 560 IB=1,NEQM     SYM 52
I=NEQ-IB             SYM 53
DO 540 M=2,NT        SYM 54
J=ITEM(I,M)          SYM 55
IF(J) 540,560,540    SYM 56
540 R(I)=R(I)-A(I,M)*R(J) SYM 57
560 CONTINUE          SYM 58
RETURN               SYM 59
END                  SYM 60

```

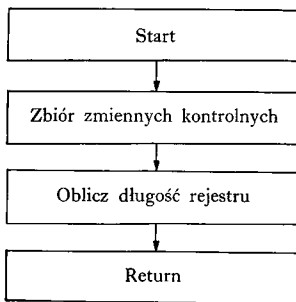
Przytoczymy tu zestawienie podprogramów, które mogą być zastosowane do rozwiązania bardzo dużej liczby równań z ograniczeniem szerokości pamięci macierzy. Podprogramy te nie pokrywają się jednak z programami omówionymi poprzednio.

Jak omówiono na końcu p. 20.5.1, procesy zbierania i eliminowania idą równolegle; równania równowagi dla węzła są eliminowane natychmiast po ich utworzeniu. Podprogram SOLVE służy do eliminacji wiersz po wierszu (liczba wierszy odpowiada liczbie stopni swobody w węźle), a podprogram BSUB służy dla procesu odwrotnego podstawienia, w którym równolegle są wyznaczane reakcje w punktach brzegowych. STORE i RDBK są to, odpowiednio, dwa małe podprogramy dla zapamiętywania i powrotnego odczytywania zmodyfikowanych równań. Te zmodyfikowane równania nie są zapisywane na taśmie równanie po równaniu, lecz są tymczasowo zapamiętywane w pamięci wewnętrznej maszyny, a następnie zapisywane jako blok, gdy pamięć wewnętrzna zostaje wyczerpana. Podprogram INIT wstawia wskaźniki wymagane dla wymienionych wyżej podprogramów i musi być wywołany jeden raz przed rozpoczęciem rozwiązywania zagadnienia.

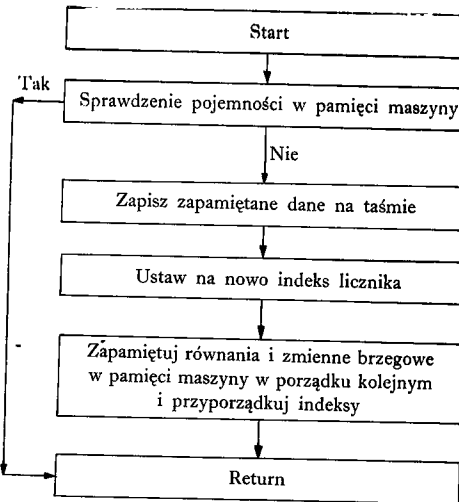
Opis zmiennych dla podprogramów a÷e

Zmienna:	Opis:
NBAND	Maksymalna szerokość półpasma macierzy
NDF	Liczba stopni swobody w węźle
NR	Zmienne dla badania punktów brzegowych
BN	Zmienne dla badania składowych przemieszczeń mających zadane wartości
BV	Wartości zadane
NCOLN	Liczba kolumn wektora obciążeń
ST	Zbiór sztywności
P	Zbiór obciążeń (przemieszczeń)
X	Obszar pamięci wewnętrznej maszyny

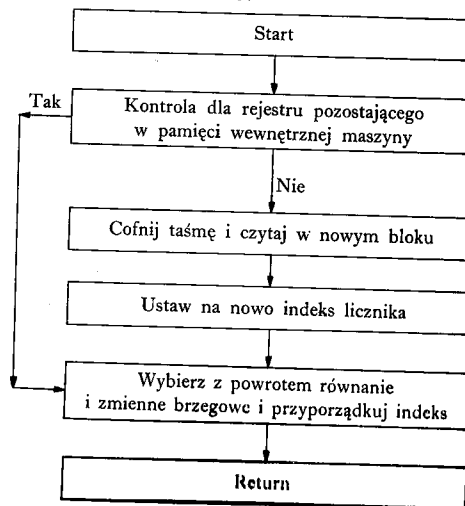
#### a. Schemat blokowy (operacyjny) dla INIT



#### b. Schemat blokowy (operacyjny) dla STORE

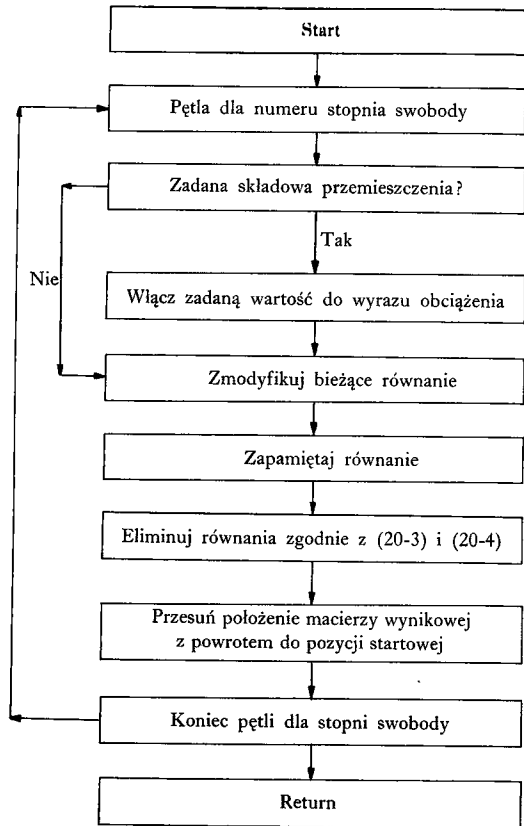


#### c. Schemat blokowy (operacyjny) dla RDBK

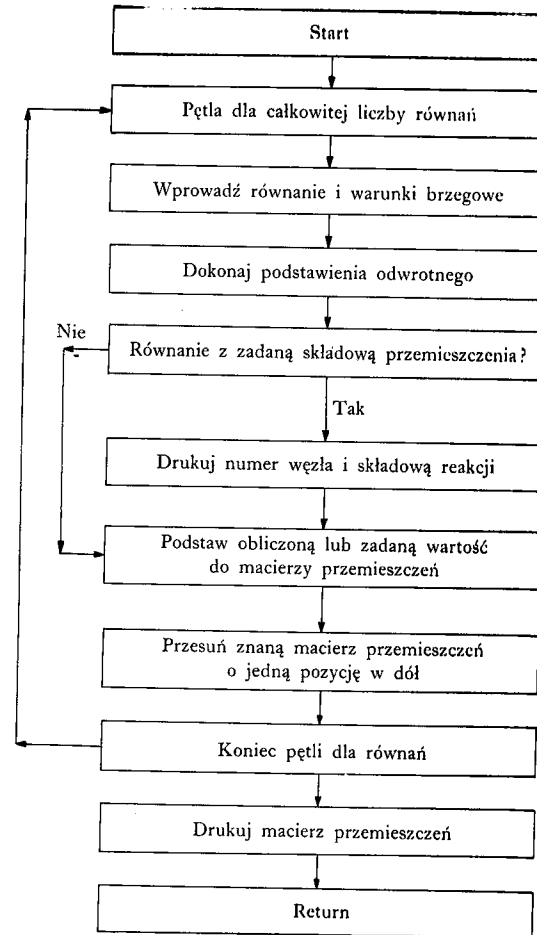




d. Schemat blokowy (operacyjny) dla SOLVE



e. Schemat blokowy (operacyjny) dla BSUB



## PROGRAM 20-16

```

SUBROUTINE INIT (NBAND, NCOLN)
C          CONTROL COUNTERS
COMMON/BUFDA/NBD,NCOL,IS,NA,LRECL,NREC,L,X(8000)
C          DIMENSION OF X CAN BE CHANGED
C          NA HAS SAME DIMENSION AS X
C
NA = 8000
IS = 1
NBD = NBAND
NCOL = NCOLN
LRECL = NBD + NCOL + 3
NREC = 0
IF (LRECL - NA) 1,1,2
1  RETURN
2  WRITE (6,4) LRECL, NA
4  OFORMAT ('LOGICAL RECORD LENGTH OF: 16, 'EXCEEDS BUFFER SET AT',
1  16)
STOP
END

```

## PROGRAM 20-17

```

SUBROUTINE STORE (ST,P,NR,BN,BV)
DIMENSION ST(60,60),P(60,2)
COMMON/BUFDA/NBD,NCOL,IS,NA,LRECL,NREC,L,X(8000)
C          TEST IF ROOM IN CURRENT BUFFER
C          AUTOMATIC MESH GENERATOR
IF (IS + LRECL - NA) 5,5,50
C          ROOM IN BUFFER
C
5  DO 10 I = 1, NBD
X(IS) = ST(1,I)
10  IS = IS + 1
DO 15 I = 1, NCOL
X (IS) = P(1,I)
15  IS = IS + 1
X(IS) = NR
X(IS + 1) = BN
X(IS + 2) = BV
IS = IS + 3
RETURN
C          NO ROOM LEFT IN BUFFER
C
50  L = IS - 1
WRITE (2) (X(J), J = 1,L)
C          CHANNEL 2 PERIPHERAL STORAGE

```

## Program 20-17 clog delay

```

C
IS = 1
NREC = NREC + 1
GO TO 5
END

```

## PROGRAM 20-18

```

SUBROUTINE RDBK (ST,P,NR,BN,BV)
DIMENSION ST(60,60),P(60,2)
COMMON/BUFDA/NBD,NCOL,IS,NA,LRECL,NREC,L,X(8000)
C          TEST IF NEXT RECORD IN BUFFER
C
10  IS = IS - LRECL
IF (IS - 1) 40,12,12
C          RECORD IS IN BUFFER
C
12  DO 11 I = 1, NBD
ST (1,I) = X(IS)
11  IS = IS + 1
DO 15 I = 1, NCOL
P (1,I) = X(IS)
15  IS = IS + 1
NR = X(IS)
BN = X(IS + 1)
BV = X(IS + 2)
IS = IS + 3 - LRECL
RETURN
C          LAST BLOCK WRITTEN MUST BE READ
C
40  IF (NREC) 100,100,41
41  NREC = NREC - 1
BACKSPACE 2
READ (2) (X(J), J = 1,L)
BACKSPACE 2
IS = L + 1
GO TO 10
C          ILLOGICAL ERROR
C
100  WRITE (6,101)
101  FORMAT ('O ATTEMPT TO READ BACK TOO MANY RECORDS:')
STOP
END

```

```

SUBROUTINE SOLV
COMMON DIS(720,2),ST(60,60),Q(60,2),P(60,2),PST(2),BN(2),BV(2)
COMMON NDF,NBAND,NSIZ,NDF1,NP,NELEM,NCOLN,NDATA
C          NCOLN = NUMBER OF LOADING COLUMNS
C          NR = 1 — NODES WITH BOUNDARY CONDITIONS
C          BN — 1 = FIXED, 0 = FREE
C          BV — SPECIFIED DISPLACEMENTS
C          NBAND = SEMI-BAND WIDTH
C          NDF = NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM
C          NDF1 = NDF + 1, NSIZ = NBAND - NDF

```

```

DO 111 JJ = 1, NDF
C          TEST FOR BOUNDARY CONDITIONS
IF(NR.NE. 1) GO TO 58
IF (ABS(BN(JJ)) .LT. .00001) GO TO 58
ST11 = 0
DO 5 J = 1, NCOLN
5 PST(J) = BV(JJ)
DO 8 J = 1, NCOLN
8 P(1,J) = -BV(JJ) + P(1,J)/ST(1,1)
DO 4 I = 2, NBAND:
4 ST(1,I) = ST(1,I)/ST(1,1)
ST(1,1) = -ST(1,1)
GO TO 60
C          EQUATION WITH NO BOUNDARY CONDITION
C
58 ST11 = 1./ST(1,1)
DO 6 J = 1, NCOLN
6 PST(J) = P(1,J)*ST11
ST(1,1) = ST11
60 CALL STORE (ST,P,NR,BN(JJ),BV(JJ))
DO 11 I = 2, NBAND
DO 16 J = 1, NCOLN
16 P(I,J) = P(I,J) - ST(1,I)*PST(J)
C          MODIFIED LOAD MATRIX FORMED
C
DO 11 J = 2, NBAND
11 ST(1,J) = ST(1,J) - ST(1,I)*ST(1,J)*ST11
C          MODIFIED STIFFNESS MATRIX FORMED
C
DO 14 I = 2, NBAND
DO 15 J = 1, NCOLN
P(I - 1, J) = P(I, J)
15 P(I, J) = 0
DO 14 J = 2, NBAND
ST(I - 1, J - 1) = ST(I, J)

```

Program 20-19 *qlq dlnzy*

```

ST(I - 1, J) = 0
ST(I, J - 1) = 0
14 ST(I, J) = 0
C          SHIFT TO STARTING POSITION
C
111 CONTINUE
RETURN
END

```

## PROGRAM 20-20

```

SUBROUTINE BSUB
COMMON DIS(720,2),ST(60,60),Q(60,2),P(60,2),PST(2),BN(2),BV(2)
COMMON NDF,NBAND,NSIZ,NDF1,NP,NELEM,NCOLN,NDATA
C          NP = NUMBER OF NODES
C
NP2 = NDF + NP
DO 30 II = 1, NP2
M = NP2 - II
CALL RDBK (ST,P,NR,BNJJ,BVJJ)
C          PERFORM BACK-SUBSTITUTION
C
DO 11 J = 1, NCOLN
DO 11 I = 2, NBAND
11 P(1,J) = P(1,J) - ST(1,I)*P(I,J)
DO 2 J = 1, NCOLN
P(1,J) = P(1,J)*ST(1,1)
IF (NR.NE. 1) GO TO 88
IF (BNJJ) 90,88,90
90 LK = M/NDF + 1
C          WRITE NODAL NUMBER AND COMPUTED REACTION
C
WRITE (6,10) LK ,P(1,J)
10 FORMAT(14,E16.8)
DIS(M + 1, J) = BVJJ
P(1, J) = BVJJ
GO TO 2
88 DIS(M + 1, J) = P(1, J)
2 CONTINUE
C          SHIFT KNOWN DISPLACEMENT MATRIX
C
DO 4 I = 2, NBAND
L = NBAND - I + 1
DO 4 J = 1, NCOLN
4 P(I + 1, J) = P(L, J)

```

```

30 CONTINUE
   WRITE (6,15)
15  FORMAT(16H X-DISPLACEMENT ,16H Y-DISPLACEMENT)
34  WRITE (6,7) ((DIS(I,J),I=1,NP2),J=1,NCOLN)
   7  FORMAT(2E16.8)
   RETURN
   END
  
```

### Cytowane publikacje

- [1] *R. W. Clough*: The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd ASCE. Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., wrzesień 1960.
- [2] *B. M. Irons*: Economical Computer Techniques for Numerically Integrated Finite Elements, vol. 2, s. 201—203, 1969.
- [3] *H. C. Martin*: Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis, McGraw-Hill, 1966.
- [4] *R. W. Clough, C. P. Johnson*: A Finite Element Approximation for the Analysis of Thin Shells, Int. J. Solids Struct., 4, s. 43—60, 1968.
- [5] *I. P. King*: An Automatic Recording Scheme for Simultaneous Equations Derived from Network Systems, to be published Int. J. Num. Meth. Eng., 1970.
- [6] *B. M. Irons*: A Frontal Solution Program for Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Eng. 2, 5-32, 1970.
- [7] *O. C. Zienkiewicz, I. P. King*: Discussion on The Analysis of a Four-Span Bridge/using an Electrical Analogue Computer, Proc. Inst. Civ. Eng., 37, s. 819—820, 1967.
- [8] *R. G. Anderson*: A Finite Element Eigenvalue Solution System, Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea, 1968

## Dodatek 1

### Algebra macierzy

Wokół algebry macierzy wytworzyła się specyficzna atmosfera, spowodowana prawdopodobnie układem istniejących podręczników z tego przedmiotu, które wymagają od uczącego się, aby za jednym zamachem „przełknął zbyt dużo”. Pokażemy, że dla śledzenia wywodów w niniejszej książce i wykonywania odpowiednich rachunków wystarczy, doprawdy, znajomość niewielkiej liczby operacji i kilku podstawowych definicji.

### Definicja macierzy

Linijowy związek pomiędzy zbiorem zmiennych  $x$  i  $b$

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3
 \end{aligned}
 \tag{A.1-1}$$

można w skrócony sposób zapisać jako

$$[A]\{x\} = \{b\} \tag{A.1-1a}$$

gdzie

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \tag{A.1-2}$$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \{b\} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Powyższe oznaczenia zawierają w sobie zarówno definicję macierzy, jak też definicję procesu ich mnożenia. Macierz definiuje się jako zbiory liczb typu pokazanego w (A.1-2). Szczególny rodzaj tego zbioru w postaci jednej kolumny często nazywa się wektorem albo macierzą kolumnową. Mnożenie macierzy przez

wektor kolumnowy jest zdefiniowane przez równoważność równań wyrażonych poprzez lewą stronę wyrażań (A.1-1) i (A.1-1a).

Jeśli istnieje inna zależność, wyrażona przez te same stałe, lecz wiążąca inne zbiory  $x$  i  $b$ , i jeśli można ją zapisać jako

$$\begin{aligned} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + a_{14}x'_4 &= b'_1 \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + a_{24}x'_4 &= b'_2 \\ a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34}x'_4 &= b'_3, \end{aligned} \quad (\text{A.1-3})$$

wówczas można zapisać to ogólnie

$$[A][X] = [B], \quad (\text{A.1-4})$$

gdzie

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 & x'_1 \\ x_2 & x'_2 \\ x_3 & x'_3 \\ x_4 & x'_4 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} b_1 & b'_1 \\ b_2 & b'_2 \\ b_3 & b'_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1-5})$$

co oznacza, że obie zależności (A.1-1) i (A.1-3) zachodzą równocześnie jako

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots & a_{11}x'_1 + \dots, \\ a_{21}x_1 + \dots & a_{21}x'_1 + \dots, \\ a_{31}x_1 + \dots & a_{31}x'_1 + \dots, \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b'_1 \\ b_2 & b'_2 \\ b_3 & b'_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1-4a})$$

Przy okazji dostrzegamy, że macierze mogą być równe tylko wówczas, gdy ich odpowiednie wyrazy są sobie równe.

Mnożenie macierzy zdefiniowano powyżej i jest oczywiste, że ma ono sens jedynie wówczas, gdy liczba kolumn w  $[A]$  jest równa liczbie wierszy w  $[X]$  przy związkach typu (A.1-4). Własnością, która wyróżnia mnożenie macierzy, jest to, że ogólnie

$$[A][X] \neq [X][A],$$

czyli że mnożenie macierzy nie jest przemienne, jak to było w zwykłej algebrze liczb.

### Dodawanie lub odejmowanie macierzy

Jeśli dodamy do siebie stronami związki (A.1-1) i (A.1-3), to otrzymamy

$$\begin{aligned} a_{11}(x_1 + x'_1) + a_{12}(x_2 + x'_2) + a_{13}(x_3 + x'_3) + a_{14}(x_4 + x'_4) &= b_1 + b'_1 \\ a_{21}(x_1 + x'_1) + a_{22}(x_2 + x'_2) + a_{23}(x_3 + x'_3) + a_{24}(x_4 + x'_4) &= b_2 + b'_2 \\ a_{31}(x_1 + x'_1) + a_{32}(x_2 + x'_2) + a_{33}(x_3 + x'_3) + a_{34}(x_4 + x'_4) &= b_3 + b'_3, \end{aligned} \quad (\text{A.1-6})$$

co wynika także z

$$[A]\{x\} + [A]\{x'\} = [A]\{x+x'\} = \{b\} + \{b'\} = \{b+b'\},$$

jeśli zdefiniujemy dodawanie macierzy jako proste dodawanie ich odpowiednich wyrazów do siebie. Oczywiście można to uczynić jeżeli wymiary macierzy są takie same, a więc np.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

albo

$$[A] + [B] = [C] \quad (\text{A.1-7})$$

oznacza, że każdy wyraz  $[C]$  jest równy sumie odpowiadających wyrazów  $[A]$  i  $[B]$ .

Oczywiście odejmowanie podlega takiej samej regule.

### Transpozycja macierzy

Jest to po prostu określenie przestawienia liczb zbioru w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1-8})$$

i jest oznaczone literą  $T$  u góry z prawej, jak pokazano powyżej.

Jej użycie nie jest bezpośrednio oczywiste; będzie ono pokazane poniżej. Na razie można traktować transpozycję jako operację zdefiniowaną w podany wyżej sposób.

### Odwroćenie macierzy

Jeżeli w związku (A.1-1a) macierz  $[A]$  jest „kwadratowa”, tj. przedstawia współczynniki układu równań typu (A.1-1), w którym liczba niewiadomych  $\{x\}$  jest równa liczbie równań, wówczas na ogół jest możliwe uzyskanie rozwiązań dla niewiadomych  $\{x\}$  wyrażonych poprzez wolne wyrazy  $\{b\}$ . Rozwiązanie to zapiszemy jako

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\}, \quad (\text{A.1-9})$$

gdzie macierz  $[A]^{-1}$  nazywa się „odwrotnością” kwadratowej macierzy  $[A]$ . Oczywiście macierz  $[A]^{-1}$  jest też kwadratowa i ma ten sam wymiar, co macierz  $[A]$ .

Możemy otrzymać (A.1-9) poprzez mnożenie obu stron (A.1-1a) przez  $[A]^{-1}$ , a zatem

$$[A]^{-1}[A] = [I] = [A][A]^{-1}. \quad (\text{A.1-10})$$

$[I]$  jest tutaj macierzą jednostkową, mającą zera na wszystkich pozycjach poza przekątną główną i jedynki na przekątnej głównej.

Jeśli układ jest osobliwy i nie ma rozwiązań, wówczas oczywiście odwrotność macierzy nie może istnieć.

## Suma iloczynów

W zagadnieniach mechaniki musimy często określić pewną liczbę wielkości takich jak siły, które można zestawić w postaci macierzy kolumnowej — „wektora”

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1-11})$$

Te zaś ze swej strony powiązane są z taką samą liczbą przemieszczeń, danych przez inny wektor, np.

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1-12})$$

Jak wiadomo, pracę oblicza się jako sumę iloczynów sił przez odpowiadające im przemieszczenia

$$W = \sum F_n \delta_n.$$

Oczywiście bardzo przydatna jest tutaj transpozycja, gdyż korzystając z pierwszej reguły mnożenia macierzy możemy zapisać

$$W = [F_1, F_2, \dots, F_n] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \{F\}^T \{\delta\} \equiv \{\delta\}^T \{F\}. \quad (\text{A.1-13})$$

Z powyższego będziemy często korzystać w niniejszej książce.

## Transpozycja iloczynu

Operacja, która czasami jest potrzebna, to wykonanie transpozycji iloczynu macierzy. Czytelnik łatwo udowodni, wychodząc z podanych już definicji, że

$$([A][B])^T = [B]^T [A]^T. \quad (\text{A.1-14})$$

## Macierze symetryczne

W zagadnieniach mechaniki budowli często występują macierze symetryczne. Jeżeli wyrazy macierzy  $[A]$  są określone jako  $a_{ij}$ , to dla macierzy symetrycznej jest

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Łatwo pokazać, że odwrotność macierzy symetrycznej jest też symetryczna.

## Podział macierzy na podmacierze — bloki

Łatwo pokazać, że iloczyn macierzy  $[A][B]$ , gdzie dla przykładu

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix}$$

można otrzymać poprzez podział każdej macierzy na podmacierze, jak pokazano liniami kropkowanymi, i stosując reguły mnożenia macierzy najpierw do każdej z podmacierzy, jak gdyby to były liczby skalarne, a następnie wykonując dalsze mnożenie w zwykły sposób. Tak więc, gdy napiszemy

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$[A] \cdot [B] = \begin{bmatrix} A_{11} B_1 + A_{12} B_2 \\ A_{21} B_1 + A_{22} B_2 \end{bmatrix}$$

łatwo sprawdzić, że otrzymany wynik przedstawia poprawnie kompletny iloczyn

Szczególną właściwością podziału jest to, że wymiar podmacierzy musi być taki, aby uczynić sensownym mnożenie  $A_1 B_1$ , tzn. liczba kolumn w  $A_1$  musi być równa liczbie wierszy w  $B_1$  itd. Jeżeli powyższy warunek jest spełniony, wówczas wszystkie dalsze operacje można wykonywać na podzielonych macierzach, traktując każdy blok jak gdyby był on skalarem.

Zauważmy jeszcze, że każdą macierz można pomnożyć przez skalar (liczbę). Oczywiście tutaj nie obowiązuje już konieczność równości wierszy i odpowiadających im kolumn.

$$\begin{matrix} a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} & a_{13} & b_{13} & a_{14} & b_{14} \\ a_{21} & b_{21} & a_{22} & b_{22} & a_{23} & b_{23} & a_{24} & b_{24} \end{matrix}$$

$F_2 \quad G_2$

$F_3 \quad G_3$

## Dodatek 2

### PODSTAWOWE RÓWNANIA Z ROZDZ. 2

$$2.1 \quad \{f\} = [N]\{\delta\}^e = [N_i, N_j, N_m \dots] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$2.2 \quad \{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e$$

$$2.3 \quad \{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\delta_0\}$$

$$2.9 \quad \{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = [k]^e \{\delta\}^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e + \{F\}_{\sigma_0}^e + \{F\}_p^e$$

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = - \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} d(\text{vol})$$

$$2.10 \quad [k] = \int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \quad \{F\}_{\sigma_0}^e = + \int [B]^T \{\sigma_0\} d(\text{vol})$$

$$\{F\}_p^e = - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol})$$

$$2.15 \quad \{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e - [D]\{\varepsilon_0\}$$

$$2.16 \quad [S]^e = [D][B]$$

## Dodatek 3

### NIEKTÓRE WZORY CAŁKOWANIA DLA TRÓJKĄTA (rys. 4.1)

Niech dany będzie trójkąt zdefiniowany w płaszczyźnie  $x-y$  za pomocą trzech punktów  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_m, y_m)$ . Początek układu niech leży w środku ciężkości trójkąta

$$\frac{x_i + x_j + x_m}{3} = \frac{y_i + y_j + y_m}{3} = 0.$$

Wówczas całkowanie po polu trójkąta  $\Delta$  daje

$$\int x dx dy = \int y dx dy = 0$$

$$\int dx dy = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\int x^2 dx dy = \frac{\Delta}{12} (x_i^2 + x_j^2 + x_m^2)$$

$$\int y^2 dx dy = \frac{\Delta}{12} (y_i^2 + y_j^2 + y_m^2)$$

$$\int xy dx dy = \frac{\Delta}{12} (x_i y_i + x_j y_j + x_m y_m)$$

## Dodatek 4

NIĘKTÓRE WZORY CAŁKOWANIA DLA CZWOROŚCIANU (rys. 6.1)

Niech będzie dany czworościan zdefiniowany w układzie  $(x, y, z)$  przez cztery punkty  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $(x_j, y_j, z_j)$ ,  $(x_m, y_m, z_m)$ ,  $(x_p, y_p, z_p)$  o środku układu w środku ciężkości czworościanu, tj

$$\frac{x_i + x_j + x_m + x_p}{4} = \frac{y_i + y_j + y_m + y_p}{4} = \frac{z_i + z_j + z_m + z_p}{4} = 0.$$

Całkowanie po objętości czworościanu

$$\int dx dy dz = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} = V = \text{objętość czworościanu.}$$

Zakładając porządek oznaczania węzłów jak na rys. 6.1 mamy

$$\int x dx dy dz = \int y dx dy dz = \int z dx dy dz = 0$$

$$\int x^2 dx dy dz = \frac{V}{20} (x_i^2 + x_j^2 + x_m^2 + x_p^2)$$

$$\int y^2 dx dy dz = \frac{V}{20} (y_i^2 + y_j^2 + y_m^2 + y_p^2)$$

$$\int z^2 dx dy dz = \frac{V}{20} (z_i^2 + z_j^2 + z_m^2 + z_p^2)$$

$$\int xy dx dy dz = \frac{V}{20} (x_i y_i + x_j y_j + x_m y_m + x_p y_p)$$

$$\int xz dx dy dz = \frac{V}{20} (x_i z_i + x_j z_j + x_m z_m + x_p z_p)$$

$$\int yz dx dy dz = \frac{V}{20} (y_i z_i + y_j z_j + y_m z_m + y_p z_p)$$

## Dodatek 5

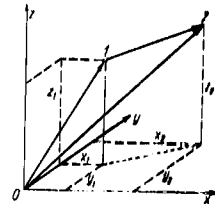
### ALGEBRA WEKTORÓW

Pewne wiadomości i rozumienie zasad algebry wektorów jest konieczne w przypadku, gdy mamy do czynienia ze skomplikowanymi elementami, różnie zorientowanymi w przestrzeni, jak to np. występuje w przypadku powłok. Poniżej podano pewne operacje z tej dziedziny.

W sensie geometrycznym wektor w przestrzeni trójwymiarowej może być opisany przez jego trzy składowe w kierunkach osi  $x, y, z$ . Pokazany więc na rys. A.5.1 wektor  $\vec{V}_{01}$  może być zapisany jako

$$\vec{V}_{01} = \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1, \quad (\text{A.5-1})$$

gdzie  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  są wektorami jednostkowymi w kierunkach, odpowiednio, osi  $x, y, z$ .



Rys. A.5.1. Dodawanie wektorów

Inaczej ten sam wektor można zapisać jako

$$\{V_0\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5-2})$$

Teraz jest to wektor w sensie macierzowym. Jego składowe rozróżniane są w zależności od pozycji w kolumnie.

**Dodawanie i odejmowanie wektorów.** Jest ono definiowane jako dodawanie i odejmowanie składowych. Tak więc np.

$$\vec{V}_{02} - \vec{V}_{01} = \vec{V}_{21} = l(x_2 - x_1) + j(y_2 - y_1) + k(z_2 - z_1). \quad (\text{A.5-3})$$



Ten sam wynik otrzymamy z definicji wektora jako macierzy, czyli

$$\{V_{02}\} - \{V_{01}\} = \{V_{21}\} = \begin{Bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5-4})$$

**Długość wektora.** Długością wektora  $V_{21}$  w sensie geometrycznym jest

$$l_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (\text{A.5-5})$$

zaś w postaci macierzy

$$l_{21} = \sqrt{\{V_{21}\}^T \{V_{21}\}}. \quad (\text{A.5-6})$$

**Kosinusy kierunkowe.** Kosinusy kierunkowe wektora, z definicji rzutu wektora na kierunek odpowiedniej składowej, są równe

$$\cos \alpha_x = \lambda_{xx} = \frac{x_2 - x_1}{l_{21}} \quad \text{itd.}, \quad (\text{A.5-7})$$

gdzie  $\alpha_x$  jest kątem między wektorem a osią  $x$ .

**Iloczyn skalarny.** Iloczyn skalarny dwóch wektorów definiuje się jako iloczyn długości jednego wektora przez rzut drugiego na kierunek pierwszego wektora. Jeżeli  $\gamma$  jest kątem między dwoma wektorami  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ , ich długości zaś wynoszą  $l_a$  i  $l_b$ , wtedy

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = l_a l_b \cos \gamma = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (\text{A.5-8})$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z \\ \vec{B} &= \vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z, \end{aligned} \quad (\text{A.5-9})$$

przeto

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{A.5-10})$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{aligned}$$

z definicji mnożenia skalarnego. W zapisie macierzowym mamy

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}, \quad \{B\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5-11})$$

zatem

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \{A\}^T \{B\} = \{B\}^T \{A\}. \quad (\text{A.5-12})$$

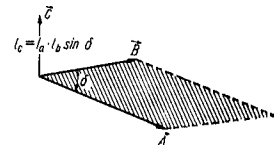
**Iloczyn wektorowy.** Inym iloczynem dwóch wektorów jest z definicji wektor zorientowany normalnie do płaszczyzny, w której leżą wektory- mnożniki i którego długość równa jest iloczynowi ich długości przez sinus kąta zawartego między nimi. Kierunek wektora-iloczynu wynika z reguły prawej ręki, jak pokazano na rys. A.5.2. Jest więc

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}. \quad (\text{A.5-13})$$

Stąd wynika, że

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \quad (\text{A.5-14})$$

Zauważmy, że moduł (lub długość) iloczynu  $\vec{C}$  jest równa polu równoległoboku pokazanego na rys. A.5.2.



Rys. A.5.2. Mnożenie wektorów (iloczyn wektorowy)

Z definicji (A.5-9) wynika, że

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \end{aligned} \quad (\text{A.5-15})$$

Stąd mamy

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \quad (\text{A.5-16})$$

W algebrze macierzy nie ma prostego odpowiednika tego iloczynu, można jednak użyć powyższego do zdefiniowania wektora  $\vec{C}$

$$\{C\} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{Bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5-17})$$

Iloczyn wektorowy okazuje się szczególnie użyteczny przy znajdowaniu prostopadłej do powierzchni (por. rozdz. 11).

**Elementy pola i objętości.** Gdy  $\xi$  i  $\eta$  są pewnymi krzywoliniowymi współrzędnymi, wówczas wektory

$$\vec{d\xi} = \begin{Bmatrix} dx \\ d\xi \\ dy \\ d\xi \end{Bmatrix} d\xi, \quad \vec{d\eta} = \begin{Bmatrix} dx \\ d\eta \\ dy \\ d\eta \end{Bmatrix} d\eta, \quad (\text{A.5-18})$$

określone ze związków między kartezjańskimi a krzywoliniowymi współrzędnymi, są wektorami skierowanymi, odpowiednio, stycznie do  $\xi = \text{const}$  i  $\eta = \text{const}$ .

Ponieważ długość wypadkowego wektora powatałego z iloczynu wektorowego  $d\vec{\xi} \times d\vec{\eta}$  jest równa polu elementarnego równoległoboku, możemy napisać

$$d(A) = \det \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dx}{d\eta} \\ \frac{dy}{d\xi} & \frac{dy}{d\eta} \end{vmatrix} \quad (\text{A.5-19})$$

zgodnie z (A.5-17).

Podobnie, gdy mamy trzy współrzędne krzywoliniowe  $\xi, \eta, \zeta$  w przestrzeni kartezjańskiej, elementarną objętość określa się jako

$$d(V) = d\vec{\xi} \cdot (d\vec{\eta} \times d\vec{\zeta}) = \det \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dx}{d\eta} & \frac{dx}{d\zeta} \\ \frac{dy}{d\xi} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dy}{d\zeta} \\ \frac{dz}{d\xi} & \frac{dz}{d\eta} & \frac{dz}{d\zeta} \end{vmatrix} \cdot d\xi d\eta d\zeta. \quad (\text{A.5-20})$$

Wynika to wprost z rozważań geometrycznych. Iloczyn w nawiasach z definicji jest wektorem, którego długość jest równa polu równoległoboku, wytworzonego przez elementarne długostki styczne do kierunków dwu współrzędnych. Następujące po nim mnożenie skalarne przez długość i kosinus kąta między wektorem obrazującym pole równoległoboku a normalną do tego równoległoboku daje w wyniku elementarną objętość.

## Dodatek 6

### TWIERDZENIE EULERA W RACHUNKU WARIACYJNYM

Przejście od twierdzenia wariacyjnego do równoważnego równania różniczkowego opisującego rozważane zagadnienie jest względnie proste; będzie ono pokazane poniżej. Odwrotny proces jednak jest bardziej skomplikowany i ograniczający możliwości uogólnienia z tej prostej przyczyny, że częstokroć nie można ustalić odpowiedniej zasady wariacyjnej.

Rozpatrzmy zagadnienie, w którym należy zminimalizować

$$\chi = \int_V f(x, y, z, \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z) dV + \int_C \left( q\phi + \alpha \frac{\phi^2}{2} \right) dS. \quad (\text{A.6-1})$$

Tutaj  $f$  jest dowolną funkcją,  $\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$  itd., wreszcie  $C$  jest częścią brzegu, na której nie są zadane wartości  $\phi$ . Na pozostałym brzegu  $\phi = \phi_n$ .

Rozpatrzmy dowolną małą wariację nieznannej funkcji i jej pochodnych. Mamy

$$\delta \chi = \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \delta \phi_x + \frac{\partial f}{\partial \phi_y} \delta \phi_y + \frac{\partial f}{\partial \phi_z} \delta \phi_z \right) dV + \int_C (q \delta \phi + \alpha \phi \delta \phi) dS. \quad (\text{A.6-2})$$

Ponieważ

$$\delta \phi_x = \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) \quad \text{itd.},$$

możemy napisać (A.6-2)

$$\delta \chi = \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) + \dots \right) dV + \int_C (q \delta \phi + \alpha \phi \delta \phi) dS = 0. \quad (\text{A.6-3})$$

Powyżej przyrównaliśmy  $\delta\chi$  do zera, ponieważż minimum (albo punkt stacjonarny) wariacji jest zerem.

Wprowadzając teraz  $dV = dx dy dz$  i całkując drugi wyraz powyższego równania przez części, jak w równaniu (3-25), z uwagi na  $x$  mamy

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) dV = \int_S \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \delta\phi l_x dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \right) \delta\phi dV,$$

gdzie  $l_x$  jest kosinusem kierunkowym normalnej do powierzchni zewnętrznej a osią  $x$ . Dokonując podobnej operacji na pozostałych podobnych wyrazach równania (A.6-3), po podstawieniach otrzymamy ostatecznie

$$\delta\chi = \int_V \delta\phi \left\{ \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_z} \right) \right\} dV + \int_C \delta\phi \left\{ q + \alpha\phi + l_x \frac{\partial f}{\partial \phi_x} + l_y \frac{\partial f}{\partial \phi_y} + l_z \frac{\partial f}{\partial \phi_z} \right\} dS. \quad (\text{A.6-4})$$

Druga całka jest wzięta jedynie po części brzegu  $C$ , gdyż na pozostałej części brzegu  $S$  mamy zadaną wartość  $\phi$ , zatem jest tam  $\delta\phi = 0$ .

Z (A.6-4), które powinno być słuszne dla każdej dowolnej wariacji  $\delta\phi$ , powinniśmy mieć

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_z} \right) = 0 \quad (\text{A.6-5a})$$

wszędzie w obszarze  $V$  i na brzegu  $C$ , oraz

$$l_x \frac{\partial f}{\partial \phi_x} + l_y \frac{\partial f}{\partial \phi_y} + l_z \frac{\partial f}{\partial \phi_z} + q + \alpha\phi = 0. \quad (\text{A.6-5b})$$

Jeżeli te dwa równania spełnione są dla  $\phi$ , wówczas minimalizują  $\chi$ . Ponieważ rozwiązanie jest jednoznaczne, zatem sformułowania (A.6-1) i (A.6-5) są równoważne. Powyższe równanie różniczkowe znane jest jako *eulerowskie* równanie zagadnienia.

Jeżeli funkcjonal zależy także od wyższych pochodnych  $\phi$ , podobne postępowanie może doprowadzić do odpowiedniego równania *Eulera*. Również gdy  $\chi$  jest funkcja kilku niezależnych funkcji, np.  $\phi$ ,  $\psi$ , itd. i ich pochodnych, podobne postępowanie wariacyjne doprowadzi do szeregu równań *Eulera*, określających kilka równań różniczkowych zagadnienia.

## Skorowidz

Algebra wektorów 206, 449

Analiza sieci 19, 27

— sztywności 19

Analogia prętowa 282

Anizotropia w podłożu porowatym 271

— zagadnieniach pola 268

— — — sprężystości 66, 88, 164

Belki pryzmatyczne 263

*Boussinesqa* zadanie 97, 105

Całkowanie *Newtona-Cotesa* 140

— numeryczne, ogólnie 90, 139

— czworosięciu 145

— trójkąta 143

—, wymagana dokładność 148

—, zalety zredukowania rzędu 255

— sposobem *Radau* 143

Ciecze nie newtonowskie 356

Ciśnienie wody w porach podłoża anizotropowego 271

— — —, potencjał sił masowych 77

— — — sprężone z rozkładem naprężeń 294

*Coulomba-Mohra* materiał 339

Częstotliwość drgań własnych 308

Drgania płyt 313

— powłok 314

— swobodne 310

— w falowodach 316

— zapory hukowej 315

Duże odkształcenia 360

— przemieszczenia, macierz sztywności 362

—, ogólnie 359

— płyt 364

— — powłok 371

Dynamiczne zagadnienia 285

Dysypacji energii koncepcja 264

Elektryczne drgania 316

— potencjały 277

— sieci 27

Elementy skończone — patrz funkcje kształtu

— —, całkowanie numeryczne 90

— — czasu 296

— —, definicja w kontinuum sprężystym 33

— —, definicja w zagadnieniach pola 263

— — izoparametryczne 134

— —, kryteria zbieżności 44, 51, 149

— — łączące 342

— — podpodziłu 117

— — subparametryczne 134, 228

— — superparametryczne 134

— —, uogólnienie koncepcji 49

— — złożone 104

Energia potencjalna całkowita 42

— — dopięnięcia 194

— — odkształcenia 42, 45

— — więzi 42

Fale 287, 316

Falowanie w porcie 317

Falowod 316

Fikcyjna sztywność 203

Filtracja przy swobodnej powierzchni cięciu 279, 303

— w osrodkach porowatych 263, 271, 273, 279

— w warunkach nieliniowości 354

Fortran 379

*Fouriera* szeregi 232

Funkcja przemieszczeń — patrz funkcje kształtu

— prądu 60

Funkcje kształtu czworosięciu 100, 124

— —, definicja 35, 124

— — *Lagrange'a* 114, 124

— — nieciągłe 45, 167

— —, ogólne rodziny 109

— — płyt dostosowane 161, 185

— — — niedostosowane 161, 167

— — powłoki grubej 249

— — — osiowo-symetrycznej 219, 233

— — — prostokąta 110

**Punkcje kątowe** prostopadłościu 213  
— równoległociąmu trójkątnemu 126  
— serendypowickie 113, 123, 236  
— trójkąta 35, 64, 86, 118, 192, 205  
— ortogonalne 231  
Funkcjonal 49, 265  
— na formie kwadratowej 50

**Galerkina metoda** 55, 264, 296, 297

**Gausa** całkowanie 141

— eliminacja 395  
— iteracja 395, 423

— **Legendre'a** kwadratury 142

Geometryczna macierz 362

**Greena tensor** odkształceń 372

Grubościenne powłoki i płyty 247, 257

Hermitowskie wielomiany 191, 220, 300

Hydrodynamiczne ciśnienie, macierz wpływów 274

— —, działanie na konstrukcję 292

**Isoparametryczne** elementy 134, 147, 303, 352

Jakobian, macierz 137, 253

—, wyznacznik 137

**Kelvina** model lepkości 347

Koncepcja sił węzłowych 37, 40

Konsolidacja gruntów 287, 294

Kosinusy kierunkowe 202, 204, 450

**Lagrange'a** funkcje 297

— mnożniki 53

— wielomiany 114

Lepkie płynięcie 58, 280

Lepkość sprężystości liniowa 345

— nieliniowa 346

—, zmienne stanu 346

Lopatki turbiny, drgania 315

— —, rozkład temperatury 301

Macierz masy, definicja 289

— — prostokąta przy zginaniu płyt 291

— — trójkąta płaskiego 290

— naprężenia 21, 72, 93

— osobliwa 26, 203

— pochyła (spadków) 268, 366

— sprężystości anizotropowa 68, 89, 164

— — ciała osiowo-symetrycznego 89

— —, definicja 36

Macierze masy powłoki grubościennych 252

— — osiowo-symetrycznej 218

— — stanu płaskiego 67

— — trójwymiarowego 103

— — zginania płyt 164

— — sztywności ciała osiowo-symetrycznego 90

— — teoria trójwymiarowego 103

— — elementów dyskretnych 21

— — płaskiego stanu naprężenia 69

— — — — odkształcenia 69

— — powłok 199

— — równoważna, w zagadnieniach pola 266

— — styczna 329, 362

— — ugięcie płyt 164, 169

Macierze taśmowe (wstęgowe) 30, 396

Macierzy algebra 441

Masy dodatkowej macierz 294

Maszyny cyfrowe, programy 379

— —, układy 379

— —, wykresy 415

Materiał uwarstwiony jako model skał 342

— — nie przenoszący rozciągania 340

**Maxwella-Bettięgo** twierdzenie odwrotne 23

Metoda skończonych odcinków 238

Metody wariacyjne 49, 453

Minimalizacja energii potencjalnej 42, 49

— funkcjonalu 56

**Mohra-Coulomba** materiał 339

Mosty płytowe 182

— skrzynkowe 236

Naczynia ciśnieniowe, naprężenia termiczne 351

— —, obliczenie w stanie trójwymiarowym 107, 154

— — osiowo-symetryczne 95

— —, rozkład temperatur 273

Naprężenia początkowe, koncepcja 36

— —, macierz przy nieliniowości geometrycznej 362

— —, metoda — dla zagadnień nieliniowych 325, 326, 333

— — pod fundamentami 96, 156

— — residualne 36

— — tektoniczne 75

— — termiczne 81

— — w naczyniach ciśnieniowych 93, 95, 107, 154

— — wokół podziemnej siłowni 81

— — w płycie mostu 183

— — powłokach walcowych 222, 260

— — tamie betonowej 75

Naprężenia w własy obrotu 210, 262

— — zaporach łukowych 153, 208, 262

— — zaporze grawitacyjnej 81

— — zbiornikach wodnych 151

**Newtona-Raphlana** metoda, ogólnie 324, 328, 361

— — — zmodyfikowana 328

Nieliniowa geometria 359

Nieliniowe problemy pola 354

— — materiały 323

Niestateczność budowli 359

— — sprężysta początkowa 363

Nieściślność materiału 81

Obciążenie niesymetryczne ciało osiowo-symetrycznych 239

Odkształcenia początkowe, koncepcja 36, 66, 88

— —, metoda — dla zagadnień nieliniowych 325, 327, 333

Ortogonalność postaci drgań 318

Ortotropowe płyty 164

Osiowo-symetryczne powłoki, elementy zakrzywione 223

— — — grubościennie 255

— — —, obciążenie harmoniczne 240

— — —, — antysymetryczne 239, 243

— — —, — symetryczne 198, 217

Osobliwa macierz 26, 203

Osobliwości eliminacja 244

Pelzanie lepkości 344

—, stan ustalony 351

—, wzmocnienie w czasie 349

Plastyczność nie stowarzyszona 339

—, powierzchnia plastyczności 330

—, prawa 330

—, prawo normalności 330, 339

—, przy cyklicznych obciążeniach 337

—, relacja **Prandlę-Reussa** 332

Płaski stan naprężenia 63

— — odkształcenia 63

Płynięcie cieczy laminarne 263

— — lepkie 58, 280, 282

— — nieneutonowskiej 356

— — o swobodnej powierzchni 279

Płyty fułdowe 212

Podpodziały 117

Pole magnetyczne 263, 278, 354

Posadowienie na polach 96

Postępowanie półanalizy 231, 307

Potencjał sił objętościowych 71

Powłoki, deformacje działania 247

Powłoki dowolnego kształtu 214

—, drgania 314

—, duża przenikłość 371

— jako zbiór elementów płaskich 197, 214

— osiowo-symetryczne 198, 217, 223, 242, 255

—, teoria płaskich powłok 198

Praca wirtualna 37, 40, 329, 360

Pręt pryzmatyczny 234

Problemy pola liniowe 263

— — nieliniowe 354

— — sprężone (ciśnienie cieczy w porach) 294

Programy dla maszyn cyfrowych 379

Przemieszczenie cięła sztywnego 44, 227

Przewodnictwo ciepła nieustalone 285

— —, ogólnie 263

— — w łopacie turbiny 301

— — — zbiorniku ciśnieniowym 273, 274

Przyspieszenie iteracji 328

Reaktory — patrz znaczenia ciśnieniowe

**Ritzę** sposób 34, 43

Rozkład sił residualnych 327

Rozmieszczenie podobieństw 54

— punktowe 54

Rozwiązywanie równań eliminacji **Gausa** 395

— — frontalne 400, 427

— — iteracją **Gausa-Seidela** 395, 398, 423

Równania całkowe 245

Równanie biharmoniczne 61

— — **Eulera** rachunku wariacyjnego 265

— — **Poissona** 56, 271

— — quasi-harmoniczne 264, 285

Siłownia podziemna 81, 341

Sily masowe 37, 70, 71, 92

— — residualne 327

Sklepienie 210, 261

Skrećanie 242, 263, 271, 272

Smarowanie 263, 280

Spękania betonu i skał 341

— — w zaporze betonowej 79

Sposób postaci znormalizowanych (w procesach przejściowych) 316

Stateczność początkowa 363

Tuny betonowe 76

—, ciśnienie wody w porach 76

—, drgania 314, 315

Tłmy grawitacyjne 81  
— lukowe 153, 204, 208, 262  
—, naprężeniu termiczne 81  
—, przepływ wody w podłożu 273  
Tłumienia macierz 287, 289  
Transformacja współrzędnych 26, 131, 135, 138, 201, 252  
Trójwymiarowa analiza naprężeń 99, 105, 147  
Tunel, naprężenia w stanie plastycznym 340  
  
Utrata stateczności postaci 369  
  
Wartości początkowych zagadnienia 297  
— własne, rozwiązanie iteracyjne 418, 420  
— —, uproszczone metody 304, 311  
— — w zagadnieniach drgań 309  
— — — stateczności 369  
Ważona metoda residualna 54, 57  
Węzły wewnętrzne 115, 116  
Wieża chłodni 210, 262  
Więże energetyczne 42  
Wpływ trzęsienia ziemi 319  
Współrzędne krzywoliniowe 131, 223, 248  
— objętościowe 125  
  
Współrzędne powierzchniowe 119  
Wyboczenie płyt 370  
Wykresy 414  
Zagadnienia nieustalone 285  
Zasada *d'Alemberta* 287  
Zapory — patrz tamy  
Zbieranie macierzy elementów 25, 28  
Zbieżność, kryteria uogólnione 51  
—, kryteria w metodzie przemieszczeń 44  
— monotoniczna 52  
— w elementach całkowanych numerycznie 149  
— — powłokach grubościennych 258  
— — — z płaskich elementów 215  
Zbiorniki ciśnieniowe — patrz naczynia ciśnieniowe  
Zginanie płyt, duże odkształcenia 364  
— —, elementy prostokątne 167, 191  
— —, — równoległoboczne i czworoboczne 173, 189  
— —, — trójkątne 174, 180, 186  
— —, — ogólnie 161  
— —, zachowanie się po wyboczeniu 370  
Zmienne bezwzględne 115, 116, 225  
Związki rekurencyjne 297

Okladkę, obwolutę i stronę tytułową opracował  
ZYGMUNT ZIEMKA  
  
Redaktor techniczny  
KRYSTYNA ŁYSIAK  
  
Korektor techniczny  
ROMUALDA ALBERA

Arkady. Warszawa 1972. Wydanie 1.  
Nakład 4180 egz.  
Ark. wyd. 34,7. Ark. druk. 28,75 (38,24/A).  
Papier druk. sat. kl. III, 80 g., 70×100.  
Fabryka Papieru w Kostrzynie.  
Oddano do składu w lipcu 1971 r.  
Podpisano do druku w lutym 1972 r. Druk ukończono w marcu 1972 r.  
Symbol 21082/Bk. Cena zł 65.—  
Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa.  
Zam. 983/71 A-79