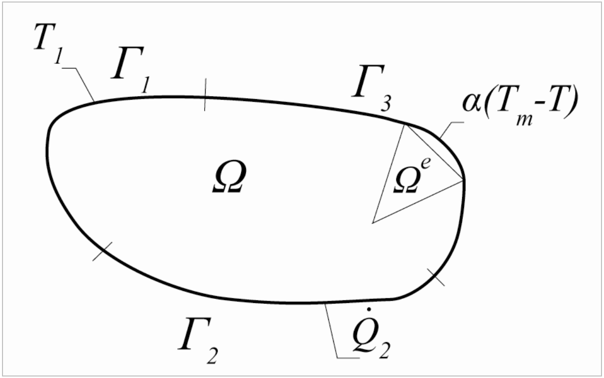
Rozwiązanie dwuwymiarowego ustalonego zagadnienia przewodzenia ciepła metodą elementów skończonych

Zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła przedstawionego na rysunku opisane jest następującym równaniem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \dot{Q} = 0 \quad \text{w obszarze} \quad \Omega.$$



Rysunek 4.2 Schemat geometrii i warunków brzegowych

Warunki brzegowe I, II i III rodzaju dla powyższego zagadnienia sformułowane są następująco:

$$T(x,y) = T_1 \quad \text{na brzegu} \quad \Gamma_1,$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x\right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y\right) = \dot{Q}_2 \quad \text{ba brzegu} \quad \Gamma_2,$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x\right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y\right) = \alpha(T_m - T) \ \text{na brzegu} \quad \Gamma_3,$$

gdzie T_m oznacza temperaturę otoczenia, $\dot{Q}_2$ to gęstość strumienia ciepła, α – współczynnik wnikania, λ - współczynnik przewodzenia ciepła,

n_x i n_y – składowe wektora kierunkowego normalnej do brzegu.

Rozpatrując pojedynczy element należący do obszaru Ω możemy aproksymować rozkład temperatury za pomocą następującej funkcji:

$$T^e(x,y) = \sum_{j=1}^{M} T_j^e \cdot N_j^e(x,y),$$

gdzie M odpowiada liczbie węzłów przyjętego elementu *e*, T_j^e oznacza temperaturę w węźle *j* elementu *e*, N_j^e to funkcja kształtu elementu *e*. Stosując przedstawioną wcześniej metodę Galerkina, możemy zapisać:

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) + \dot{Q} \right) N_i^e(x, y) dx dy = 0.$$

Korzystając z twierdzenia Greena, otrzymujemy następującą zależność:

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} N_i^e\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} N_i^e\right)\right) dxdy =$$

$$= \int_{\Gamma^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} dy - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} dx\right) N_i^e .$$

Przekształcając lewą stronę równania otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y}\right)\right) N_i^e \, dxdy =$$

$$= -\int_{\Omega^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy$$

$$+ \int_{\Gamma^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} dy - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} dx \right) N_i^e ,$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\dot{Q} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right),$$

i podstawiając do równania Galerkina otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right) dxdy =$$

$$= \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e \, dxdy + \int_{\Gamma^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} dy - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} dx \right) N_i^e .$$

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right) dxdy =$$

$$= \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e \, dx dy + \int_{\Gamma_2^e} \dot{Q}_2 N_i^e \, ds + \int_{\Gamma_3^e} \alpha (T_m - T_1) \, N_i^e \, ds,$$

gdzie

$$\dot{Q} ds = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x ds \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y ds \right).$$

Wprowadzając do powyższego równania (4.17) zależność (4.11) otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \sum_{j=1}^{M} \left(T_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) \right) + \left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \sum_{j=1}^{M} \left(T_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \right) \right) dxdy =$$

$$= \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e \, dxdy + \int_{\Gamma_2^e} \dot{Q}_2 N_i^e \, ds$$

$$- \int_{\Gamma_3^e} \alpha \sum_{j=1}^{M} \left(T_j^e N_j^e \right) N_i^e \, ds + \int_{\Gamma_3^e} \alpha T_m \, N_i^e \, ds .$$

Powyższe równanie można sprowadzić do algebraicznego układu równań postaci:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}.$$

W klasycznej metodzie elementów skończonych macierz $\boldsymbol{K}$ zwykle nazywa się macierzą sztywności, zaś w przypadku zagadnień przewodnictwa ciepła spotyka się również określenie: macierz przewodności. Wektor $\boldsymbol{a}$ reprezentuje rozwiązanie, zaś $\boldsymbol{f}$ - *wektor* obciążeń.

Poszczególne elementy równania macierzowego (4.19) przedstawiają się następująco:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_c^e + \boldsymbol{K}_{\Gamma_g}^e,$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_q^e + \boldsymbol{f}_{\Gamma_2}^e + \boldsymbol{f}_{\Gamma_g}^e,$$

gdzie:

$$K_{c,ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \right) dxdy,$$

$$K^{e}_{\Gamma_3,ij} = \int_{\Gamma^e_3} \alpha N^e_i N^e_j \, ds,$$

$$f^{e}_{q,i} = \int_{\Omega^e} \dot{Q} N^e_i \, dx dy,$$

$$f^{e}_{\Gamma_2,i} = \int_{\Gamma^e_2} \dot{Q}_2 N^e_i \, ds,$$

$$f^e_{\Gamma_s,i} = \int_{\Gamma^e_s} \alpha T_m \, N^e_i \, ds.$$