



POLITECHNIKA  
POZNAŃSKA



# PROJEKT METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Prowadzący:

dr hab. Tomasz Stręk

Wykonali:



Wydział Budowy Maszyn i Zarządzania

Mechanika i Budowa Maszyn

Grupa M3

## Spis treści:

1. Wstęp teoretyczny

2. Analiza rozszerzalności termicznej

3. Analiza stanu naprężenia

4. Analiza przewodności temperaturowej

5. Analiza odkształcenia pod wpływem przyłożonej siły

# 1. Wstęp teoretyczny

Metoda Elementów Skończonych – zaawansowana metoda rozwiązywania układów równań różniczkowych, opierająca się na podziale dziedziny (tzw. dyskretyzacja) na skończone elementy, dla których rozwiązanie jest przybliżane przez konkretne funkcje, i przeprowadzaniu faktycznych obliczeń tylko dla węzłów tego podziału.

Tabela przedstawiająca podstawowe typy równań różniczkowych wykorzystywanych w Metodzie Elementów Skończonych:

EQUATION	COMPACT NOTATION	STANDARD NOTATION (2D)
Laplace's equation	$-\nabla \cdot (\nabla u) = 0$	$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
Poisson's equation	$-\nabla \cdot (c \nabla u) = f$	$-\frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f$
Helmholtz equation	$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$	$-\frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + au = f$
Heat equation	$d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) = f$	$d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f$
Wave equation	$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c \nabla u) = f$	$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f$
Schrödinger equation	$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = \lambda u$	$-\frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + au = \lambda u$
Convection-diffusion equation	$d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + \beta \cdot \nabla u = f$	$d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y \frac{\partial u}{\partial y} = f$

## Wymiana ciepła (heat transfer):

Wymiana ciepła odbywać się może przez:

- przewodzenie
- konwekcję
- promieniowanie

Wzór opisujący wymianę ciepła przez przewodzenie (wykorzystany w projekcie):

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q$$

T – temperatura

P – gęstość

C<sub>p</sub> – pojemność cieplna przy stałym ciśnieniu

k – przewodność cieplna

Q – źródło ciepła

∇T – gradient temperatury

k∇T – strumień ciepła

Warunki brzegowe stosowane przy analizie wymiany ciepła:

BOUNDARY CONDITION	DESCRIPTION
$\mathbf{n} \cdot (k \nabla T) = q_0 + h(T_{\text{inf}} - T) + C_{\text{const}}(T_{\text{amb}}^4 - T^4)$	Heat flux
$\mathbf{n} \cdot (k \nabla T) = 0$	Insulation or symmetry
$T = T_0$	Prescribed temperature
$T = 0$	Zero temperature
$\mathbf{n}_1 \cdot (k_1 \nabla T_1) = \frac{k}{d}(T_2 - T_1)$	Thin thermally resistive layer (pair boundaries only)
$\mathbf{n}_2 \cdot (k_2 \nabla T_2) = \frac{k}{d}(T_1 - T_2)$	

## Mechanika ciała stałego

Opisu stanu odkształceń w ciele stałym dokonuje się wykorzystując:

- tensory odkształceń:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{yz} &= \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{xz} &= \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}$$
$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

- tensory naprężeń:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

- stosunek naprężeń do odkształceń przy warunkach liniowych opisywany jest uogólnionym prawem Hooke'a:

$$\sigma = D\varepsilon$$
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

- macierz elastyczności:

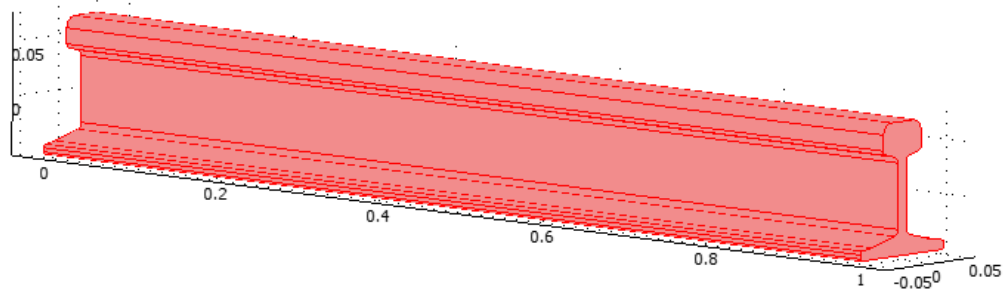
$$D^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

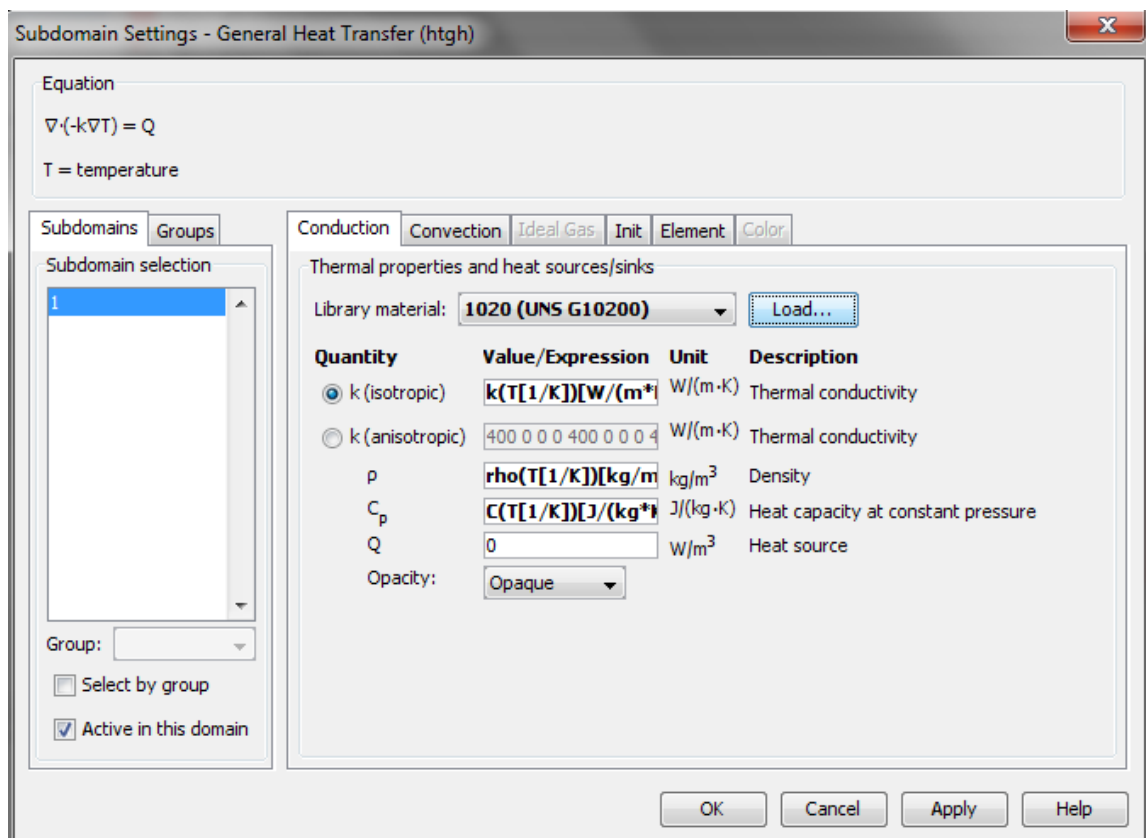
## 2. Analiza rozszerzalności termicznej

Celem naszych badań jest określenie niezbędnego luzu montażowego przy łączeniu kolejnych szyn kolejowych w związku z ich rozszerzalnością temperatury.

Przedmiotem badań jest uproszczony model szyny kolejowej S-30 o długości 1 metra:

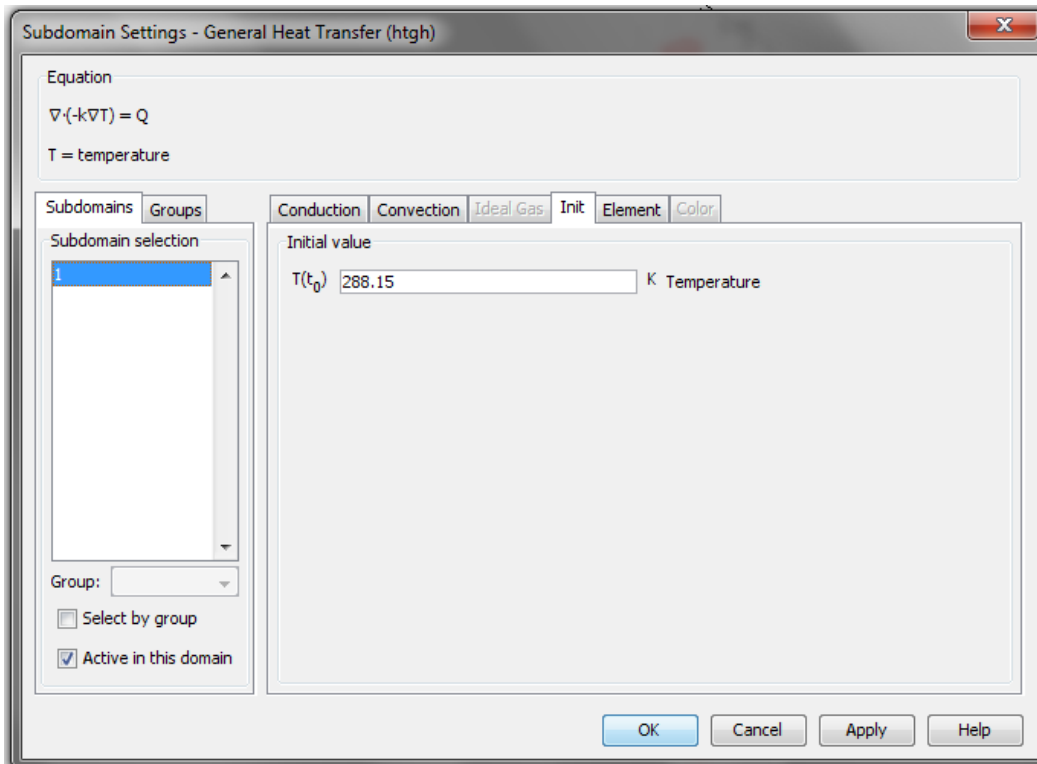


wykonany z materiału ze stali niskostopowej o następujących parametrach

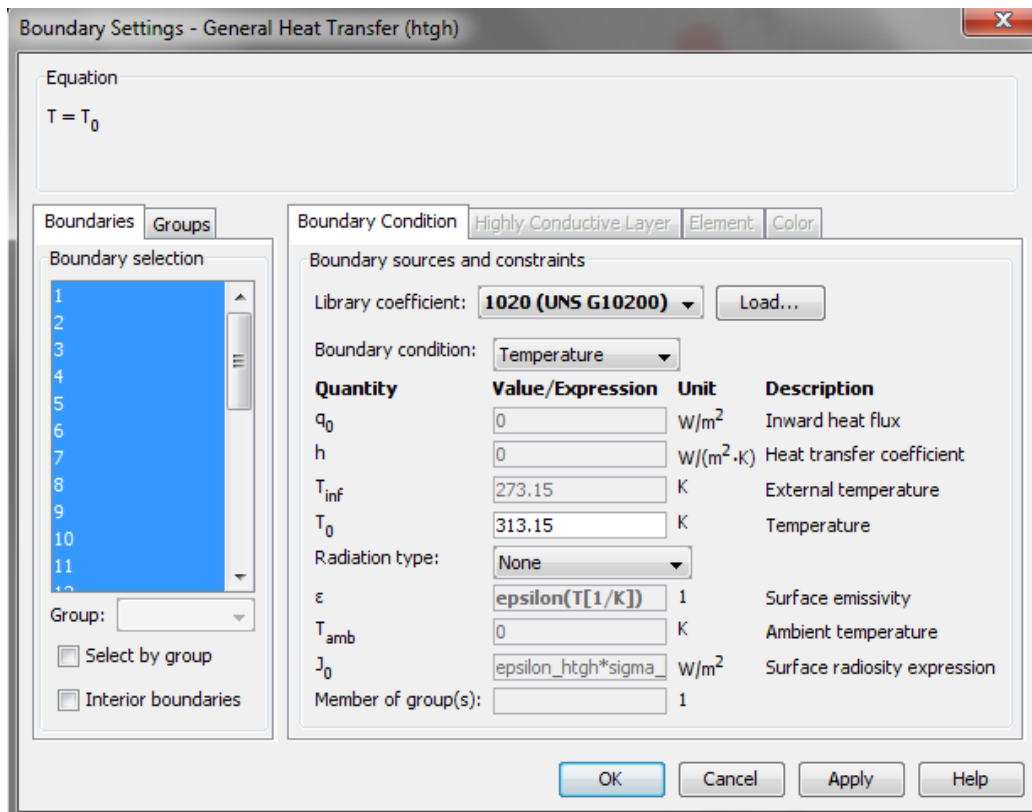


## Zdefiniowanie warunków brzegowych:

W projekcie założyliśmy iż temperatura początkowa wynosi 15 °C

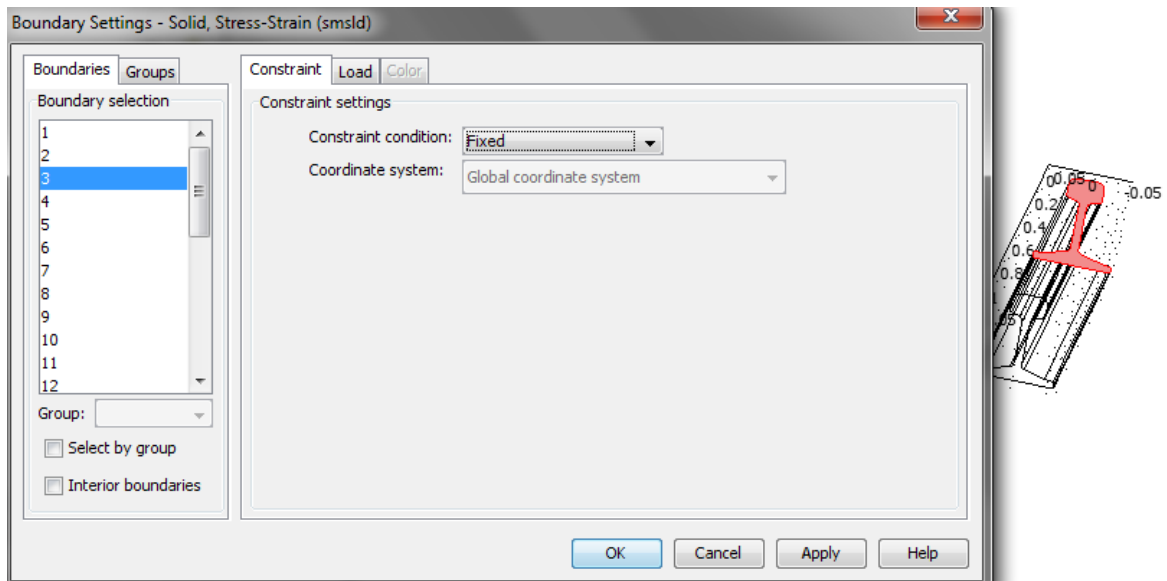


Natomiast docelowa temperatura dla której określamy zwiększenie wymiarów wynosi 40°C

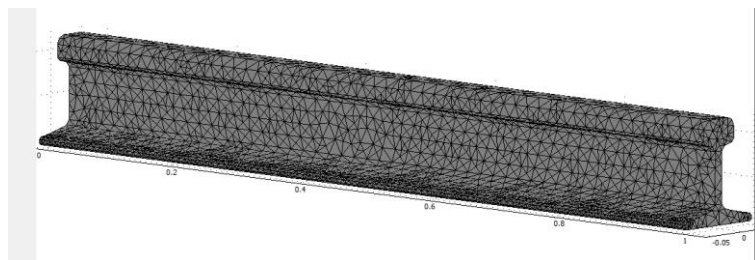




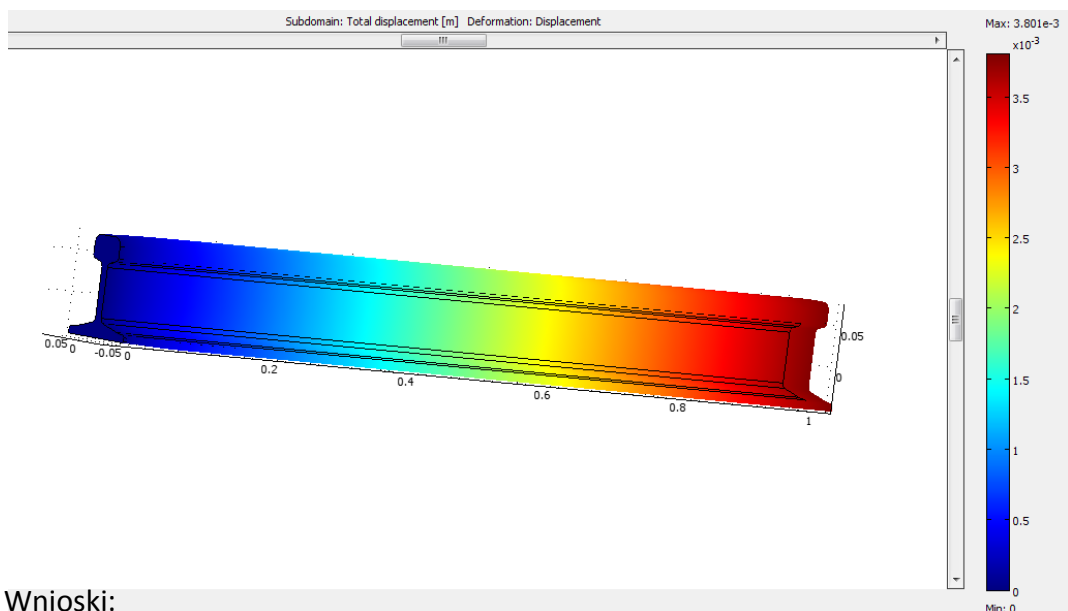
## Utwierdzenie jednego końca szyny



## Podział modelu na elementy skończone



## Wynik badania

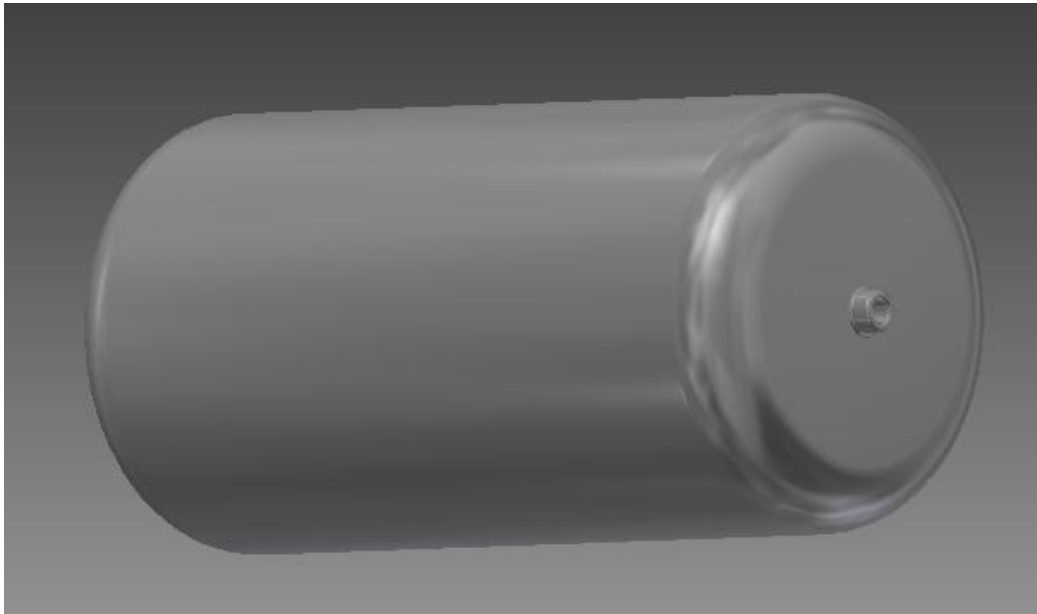


## Wnioski:

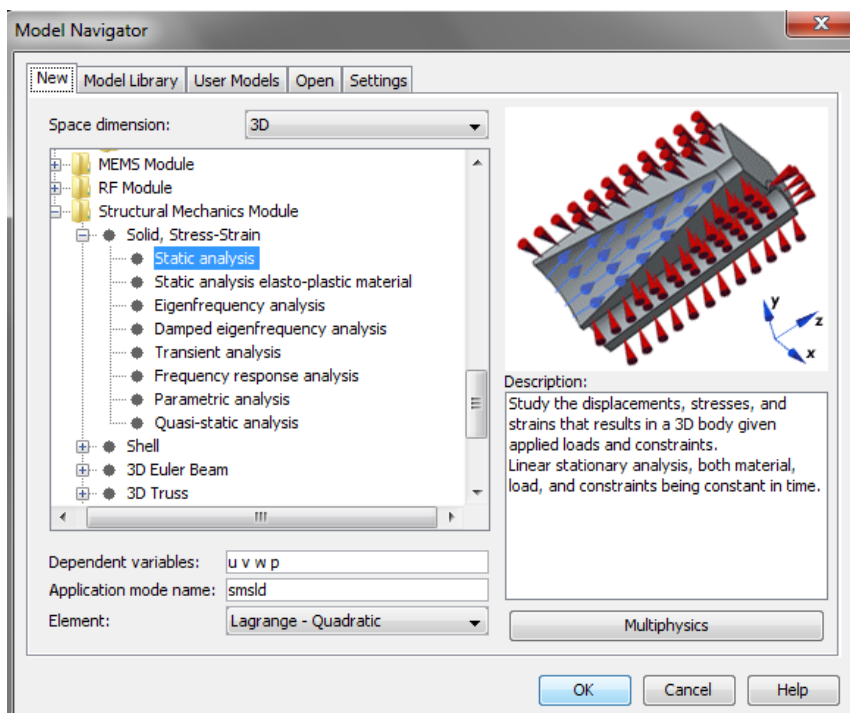
Przy zadanych parametrach szyna wydłużyła się o 3,8 mm. Dla szyny o długości 20 m wydłużenie wyniesie 76 mm w związku z tym w celu uniknięcia wyginania się szyn przy zmianach temperatury należy zostawić taki luz montażowy. W rzeczywistości szyny ustawiane są także na kamieniach w celu lepszej wentylacji a w upały schładzane są wodą.

### 3. Analiza stanu naprężenia

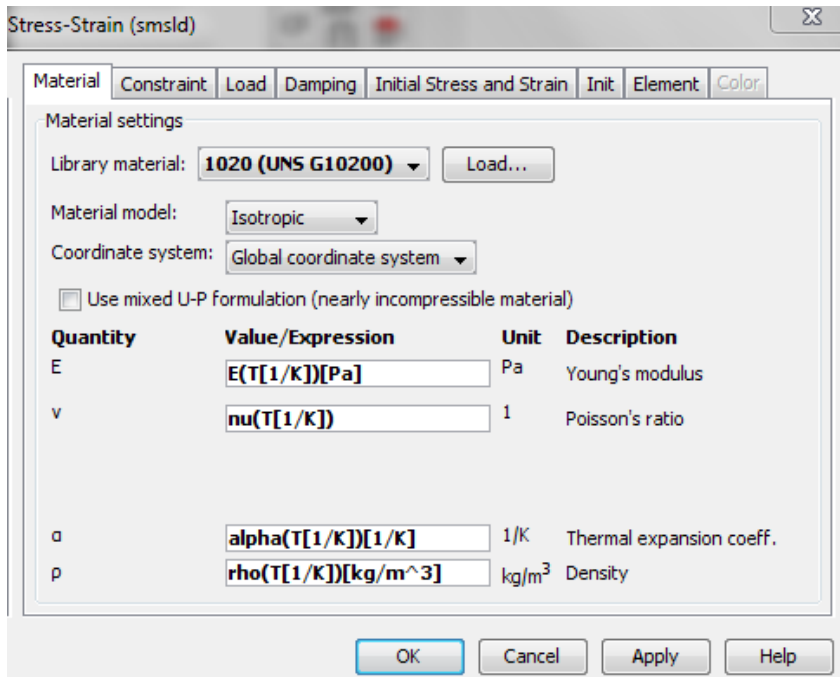
Analizie naprężeń został poddany zbiornik cienkościenny o grubości ścianki 5 mm, który został poddany działaniu ciśnienia wewnętrznego równego 10 MPa.



W tej części projektu korzystaliśmy z modułu Structural mechanics

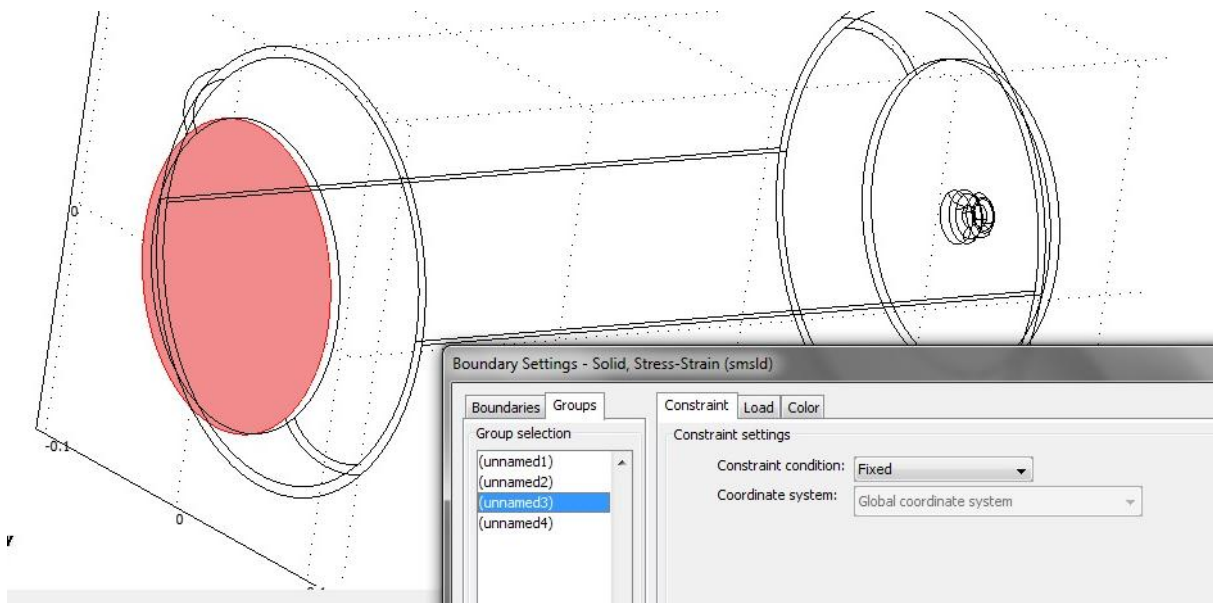


Zbiornik wykonany został ze stali niskostopowej o następujących parametrach:

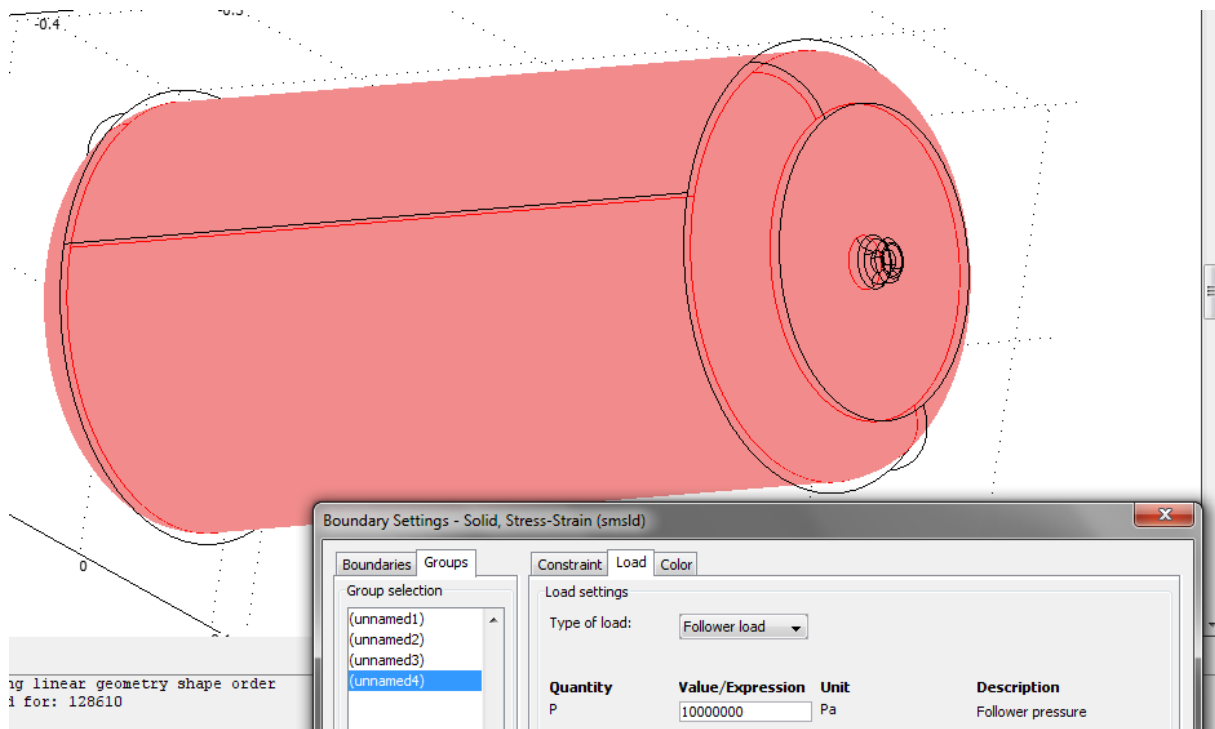


**Warunki brzegowe:**

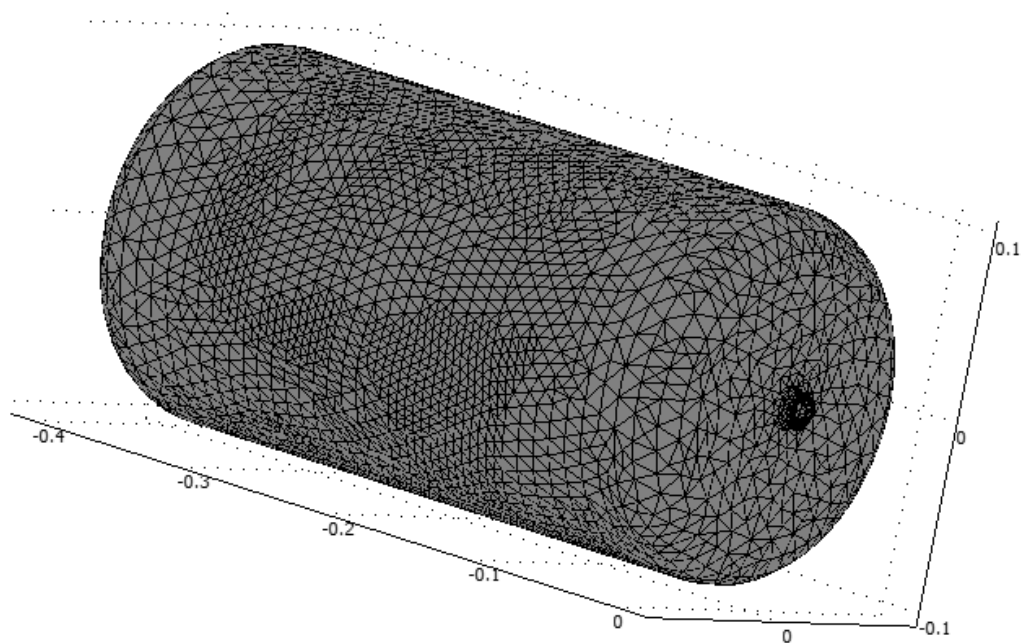
Zamocowanie jednego końca butli:



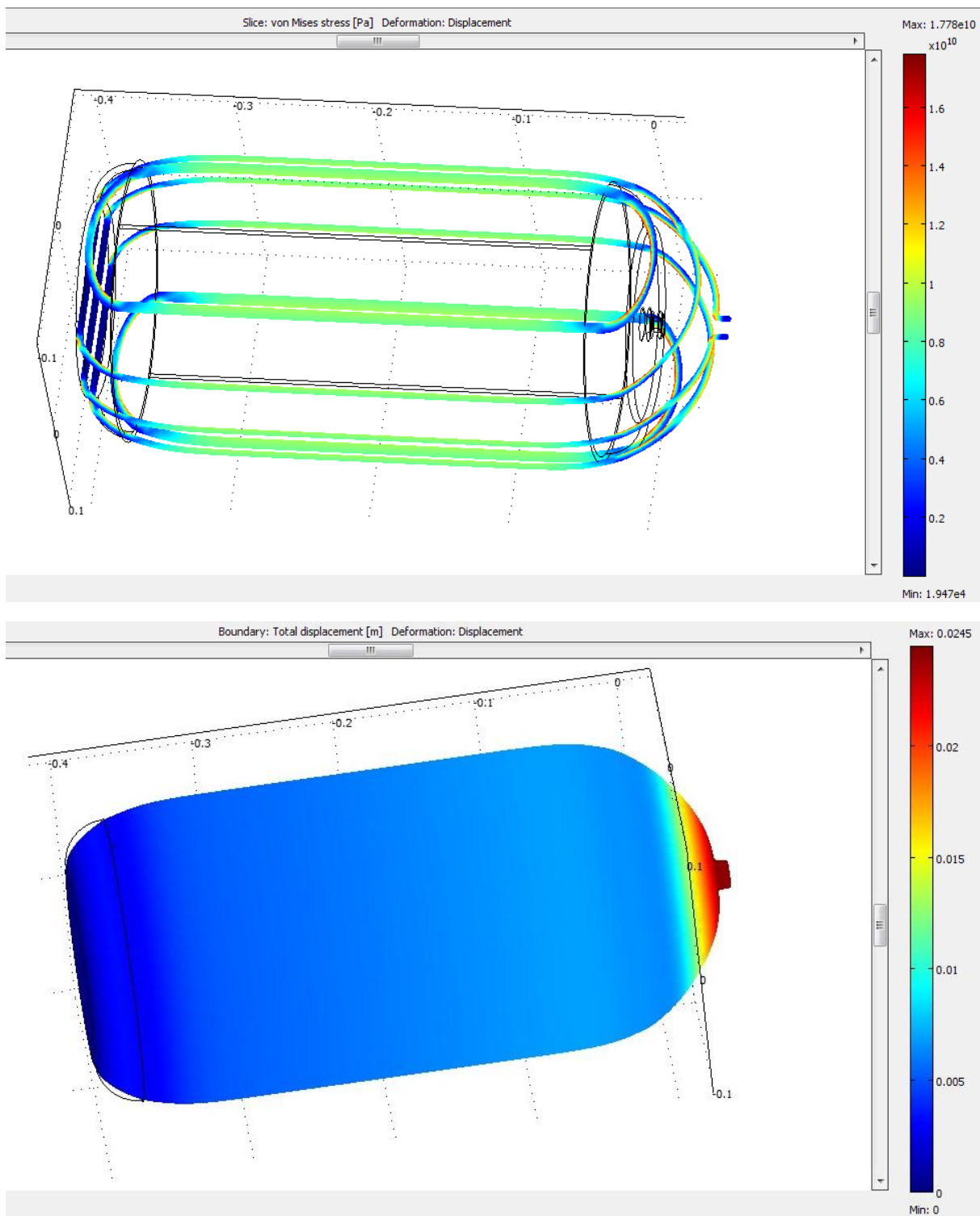
Przyłożenie ciśnienia na wewnętrzne ścianki butli:



Wygenerowanie siatki:



## Wynik badania:



## Wnioski:

W wyniku przeprowadzonej symulacji butla rozszerzyła i wydłużyła się pod wpływem bardzo wysokiego ciśnienia. Część butli z otworem wlotowym przemieściła się o około 2.5 cm co przy ogólnych wymiarach butli jest wartością znaczną. W rzeczywistości niedopuszczalne jest napełnienie butli tak wysokim ciśnieniem.

## 4. Analiza przewodności temperaturowej

Przedmiotem badań jest butelka o grubości ścianki 3mm postawiona na elektrycznej płycie grzewczej o temperaturze 300 °C. Celem badania jest sprawdzenie po jakim czasie chwycenie butelki spowoduje poparzenie (temperatura powyżej 50°C).

Butelka została wykonana z materiału o następujących właściwościach:

Subdomain Settings - Heat Transfer by Conduction (ht)

Equation

$$\delta_{ts} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q, T = \text{temperature}$$

Subdomains Groups

Subdomain selection

Group:

Select by group

Active in this domain

Physics Init Element Color

Thermal properties and heat sources/sinks

Library material: 1006 (UNS G10060) Load...

Quantity	Value/Expression	Unit	Description
$\delta_{ts}$	1	1	Time-scaling coefficient
<input checked="" type="radio"/> k (isotropic)	$k(T[1/K])[W/(m \cdot K)]$	W/(m·K)	Thermal conductivity
<input type="radio"/> k (anisotropic)	400 0 0 0 400 0 0 0	W/(m·K)	Thermal conductivity
$\rho$	$\rho(T[1/K])[kg/m^3]$	kg/m <sup>3</sup>	Density
$C_p$	$C(T[1/K])[J/(kg \cdot K)]$	J/(kg·K)	Heat capacity at constant pressure
Q	0	W/m <sup>3</sup>	Heat source

OK Cancel Apply Help

0.1

0.2

0.3

Warunki początkowe:

Subdomain Settings - Heat Transfer by Conduction (ht)

Equation

$$\delta_{ts} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q, T = \text{temperature}$$

Subdomains Groups

Subdomain selection

Group:

Select by group

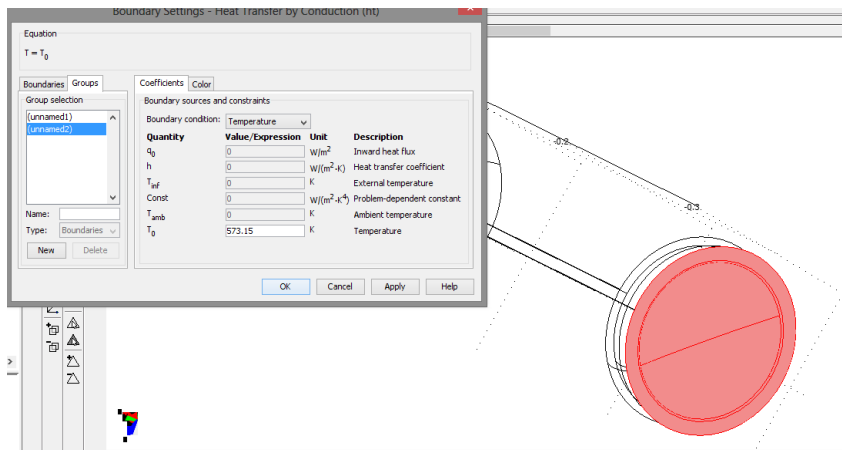
Active in this domain

Physics Init Element Color

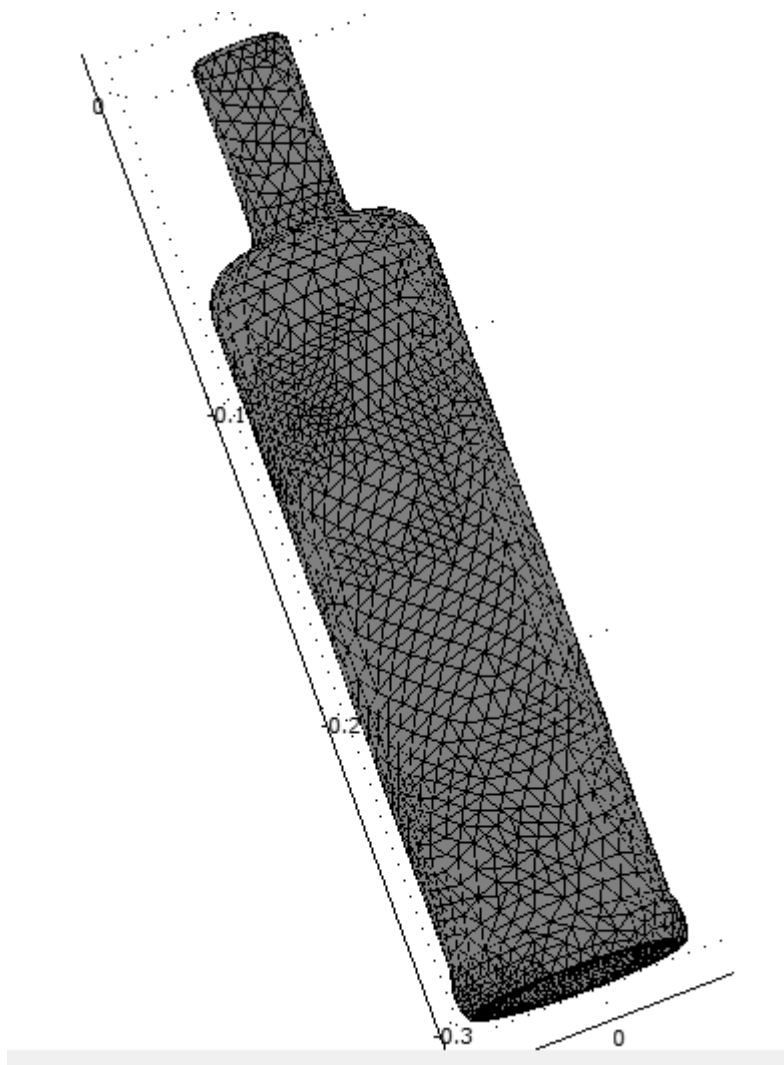
Initial value

$T(t_0)$  293.15 K Temperature

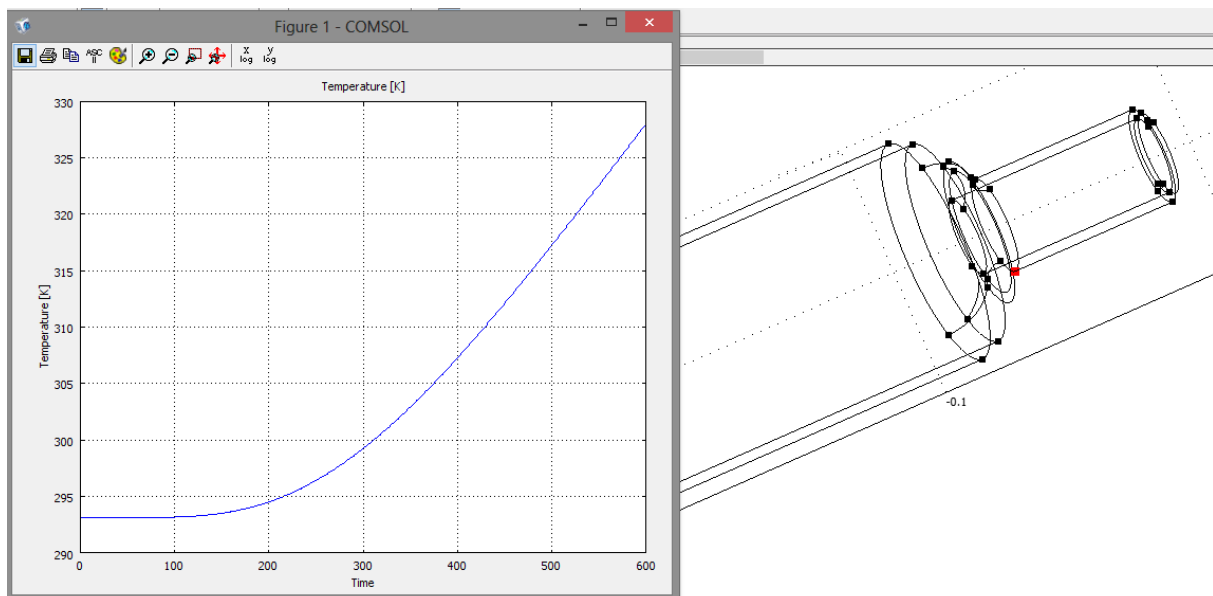
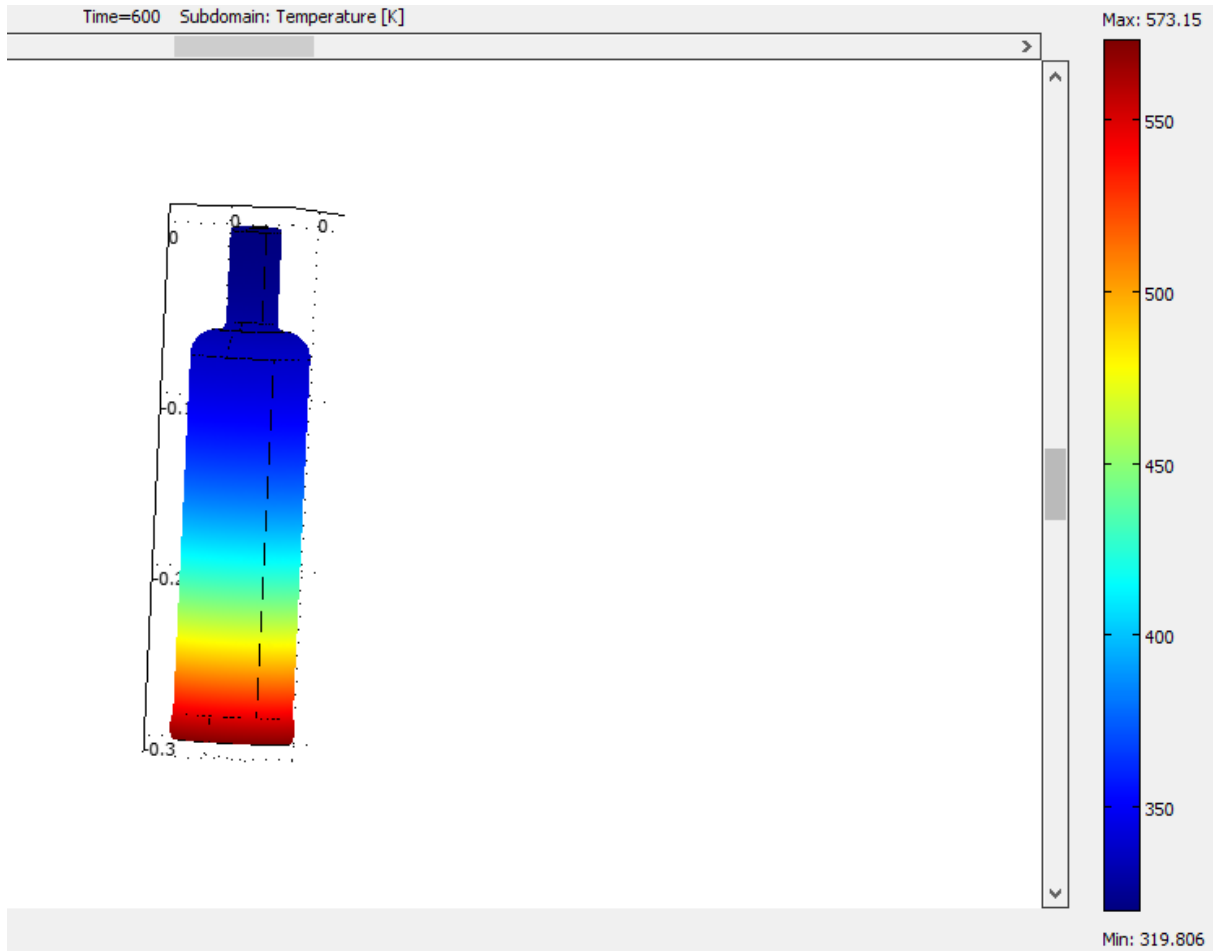
OK Cancel Apply Help



Podział modelu na elementy skończone:



## Wyniki przeprowadzonej symulacji:



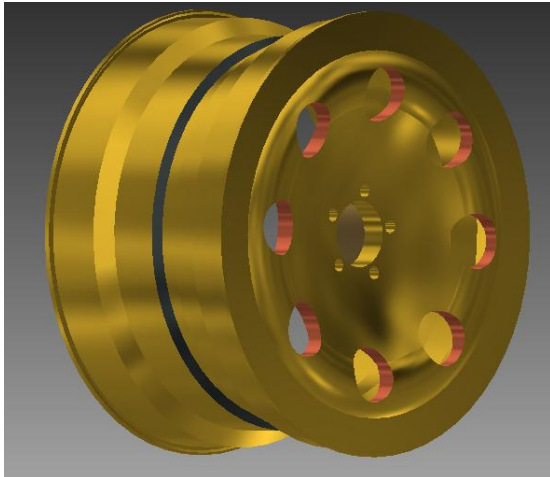
## Wnioski:

Najniższy punkt na szyjce butelki osiągnął temperaturę 50 °C po czasie 570 sekund. Powyżej 300 sekund przyrost temperatury w tym punkcie jest liniowy. W rzeczywistości napełniona butelka nagrzewała by się dłużej.

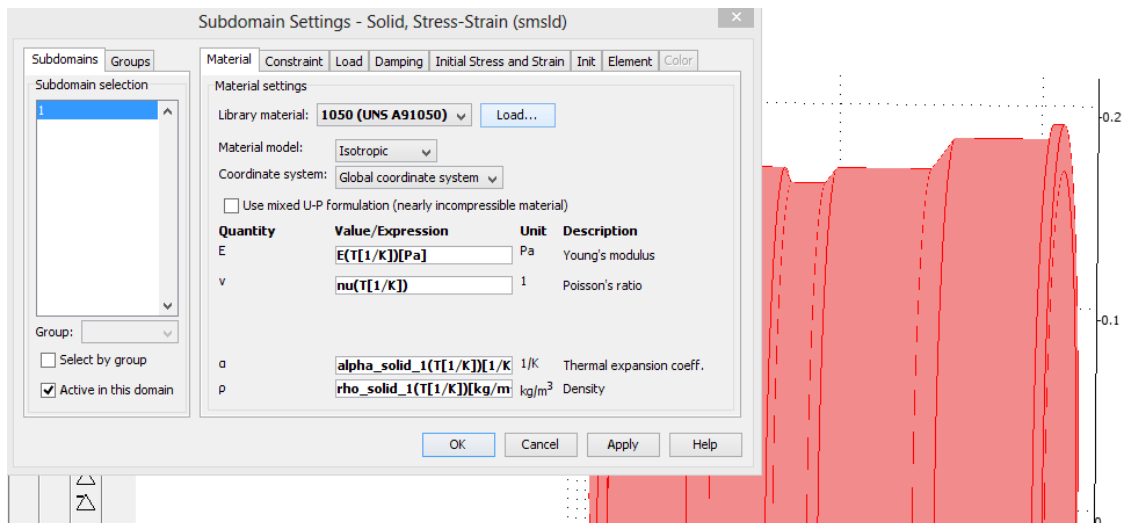


## 5. Analiza odkształcenia pod wpływem przyłożonej siły

Przedmiotem badania jest felga wykonana ze stopu aluminium. Celem symulacji jest pokazanie odkształcenia felgi podczas uderzenia w krawężnik.



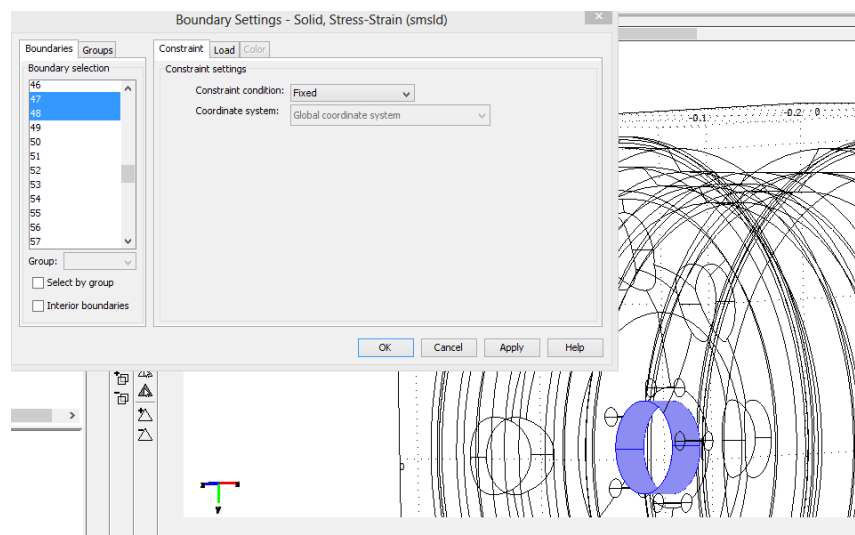
Model felgi o następujących parametrach materiałowych:



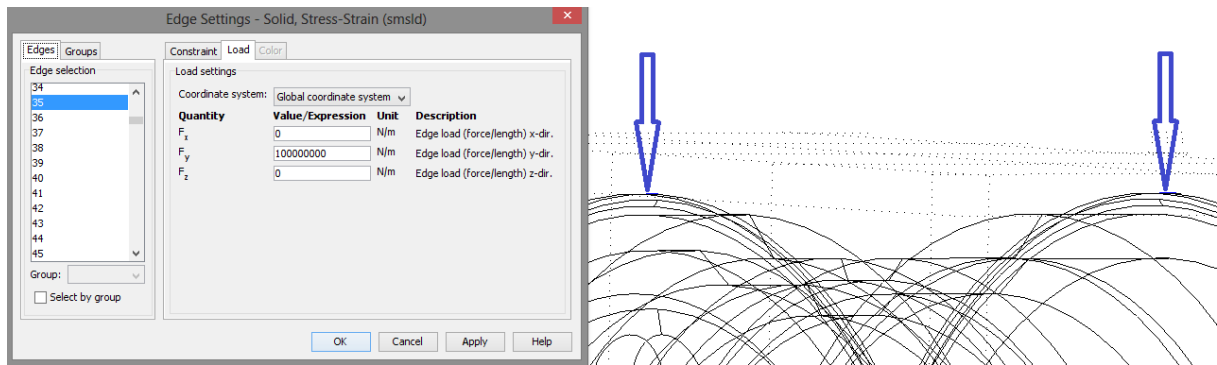
Quantity	Value/Expression	Unit	Description
E	$E(T[1/K])[Pa]$	Pa	Young's modulus
$\nu$	$\nu(T[1/K])$	1	Poisson's ratio
$\alpha$	$\alpha_{solid\_1}(T[1/K])[1/K]$	1/K	Thermal expansion coeff.
$\rho$	$\rho_{solid\_1}(T[1/K])[kg/m^3]$	kg/m <sup>3</sup>	Density

**Warunki początkowe:**

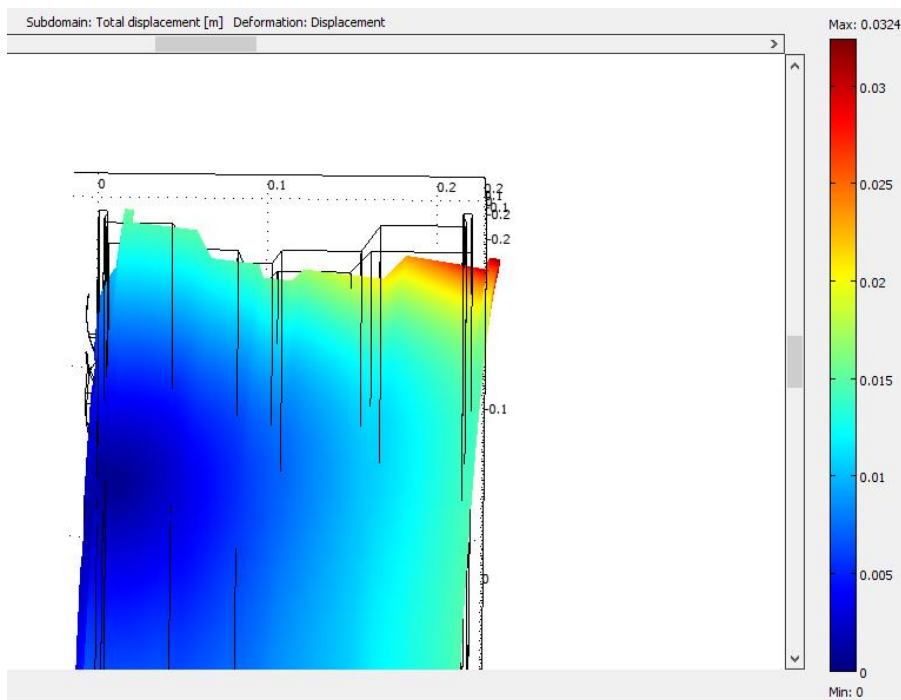
Zamocowanie felgi



Przyłożona siła do rantów felgi:



Wynik symulacji:



Wnioski:

W wyniku działania przyłożonej siły mającej symulować uderzenie w krawężnik felga uległa odkształceniu, które uniemożliwiłoby kontynuowanie jazdy w związku ze zbyt dużym odkształceniem elementu jezdnego. Pomimo przyłożenia takiej samej siły do obu rantów wewnętrzna część felgi zgięła się mocniej, spowodowane jest to ukształtowaniem obręczy (brak podparcia wewnętrznej części).