

# Metoda Elementów Skończonych

## Projekt na laboratorium



**Wykonali:**



MiBM (WBMiZ)  
Grupa M1  
Rok III, semestr V  
Rok akad. 2015/16

# Spis treści:

<b>Wstęp</b> .....	3
<b>1. Analiza ugięcia stalowego profilu i wpływ otworów odciążających na rozkład naprężeń</b> ....	4
1.1. Przedmiot analizy.....	4
1.2. Objętościowy wykaz profili.....	5
1.3. Analiza .....	6
1.4. Wnioski .....	12
<b>2. Analiza przepływu ciepła poprzez miedziane elementy</b> .....	13
2.1. Przedmiot analizy.....	13
2.2. Analiza .....	14
2.3. Wnioski .....	20
<b>3. Wyznaczanie wartości częstotliwości drgań własnych konstrukcji</b> .....	21
3.1. Wstęp (teoria) .....	21
3.2. Konfiguracja elementu, przeprowadzenie analizy .....	24
3.3. Wnioski .....	29

## Wstęp.

Celem przeprowadzonego projektu była analiza z użyciem Metody Elementów Skończonych trzech zagadnień z zakresu mechaniki.

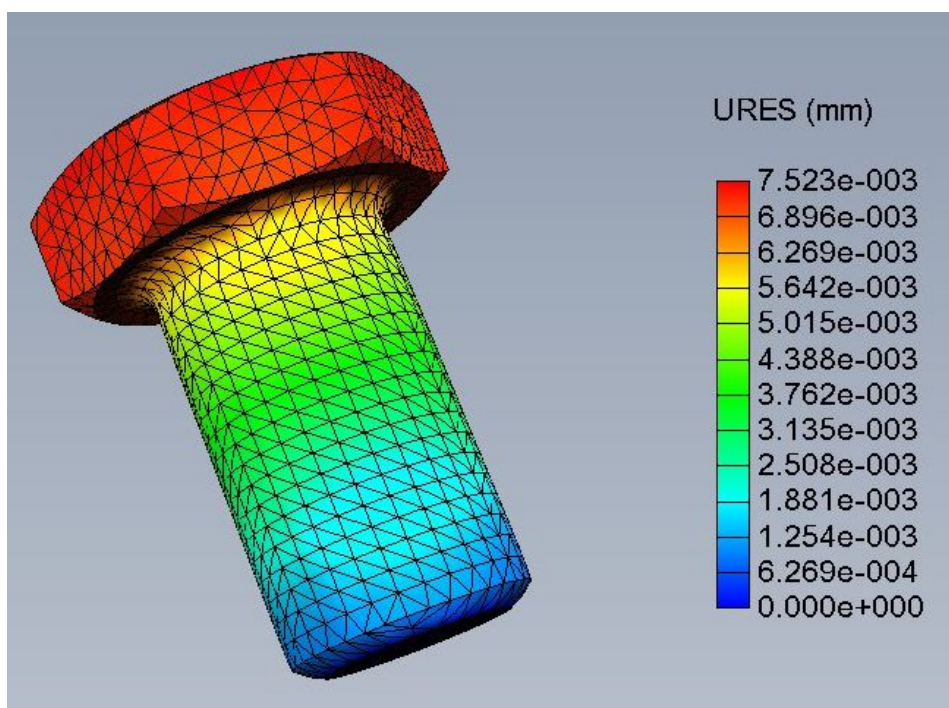
Pierwszy z nich to statyczna próba zginania stalowej belki wykonanej z profilu prostokątnego pod obciążeniem ciągłym, gdzie obciążenie zadawane jest na jedną z płaszczyzn belki.

Kolejnym zagadnieniem jest analiza przepływu ciepła poprzez miedziane elementy o jednakowej objętości i tej samej temperaturze, która na nie oddziałuje. Celem było ukazanie różnic w przepływie ciepła w zależności od geometrii części.

Ostatnia analiza dotyczyła wyznaczania częstotliwości drgań własnych kamertonu, który jest projektowany właśnie z myślą o generowaniu wibracji o określonej częstotliwości, a więc próba MES w tym przypadku można uznać za próbę weryfikacji założeń konstrukcyjnych.

Programy komputerowe użyte do przeprowadzenia symulacji to COMSOL Multiphysics oraz SolidWorks 2014 (moduł Simulation).

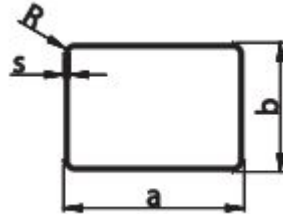
„Metoda Elementów Skończonych (w skrócie MES, ang. finite element method, w skrócie FEM) jest to zaawansowana metoda rozwiązywania układów równań różniczkowych, opierająca się na podziale badanego zagadnienia na skończone elementy, dla których rozwiązanie jest przybliżane przez konkretne funkcje, i przeprowadzaniu faktycznych obliczeń tylko dla węzłów tego podziału.”



## 1. Analiza ugięcia stalowego profilu i wpływ otworów odciążających na rozkład naprężeń.

### 1.1. Przedmiot analizy.

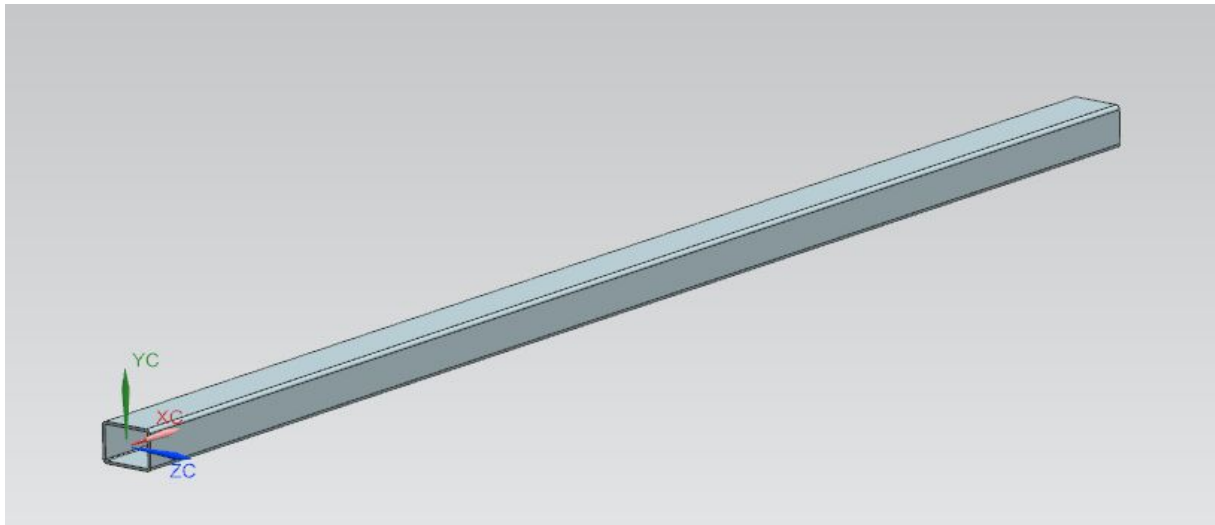
Przedmiotem analizy będzie profil stalowy o długości 1m i przekroju 40x30x2 [mm]



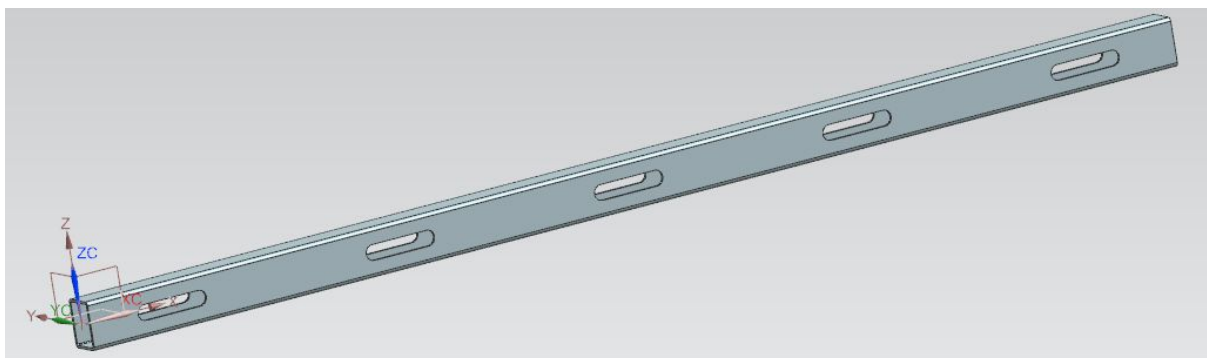
Rys. 1 - przekrój profilu stalowego, gdzie:  $a=4\text{mm}$ ,  $b=30\text{mm}$ ,  $s=2\text{mm}$ ,  $R=5\text{mm}$

Analizie zostaną poddane trzy profile:

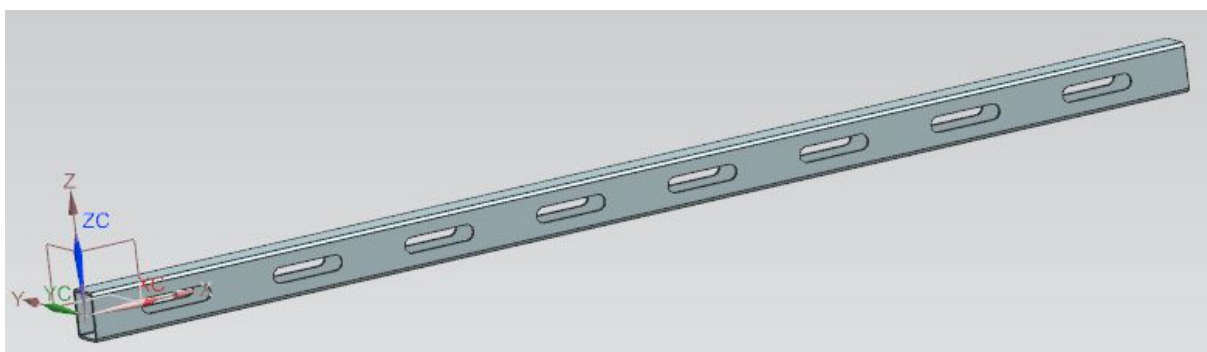
- 1) profil pełny
- 2) profil z pięcioma otworami odciążającymi (rozstaw otworów 211mm)
- 3) profil z ośmioma otworami odciążającymi (rozstaw otworów 120mm)



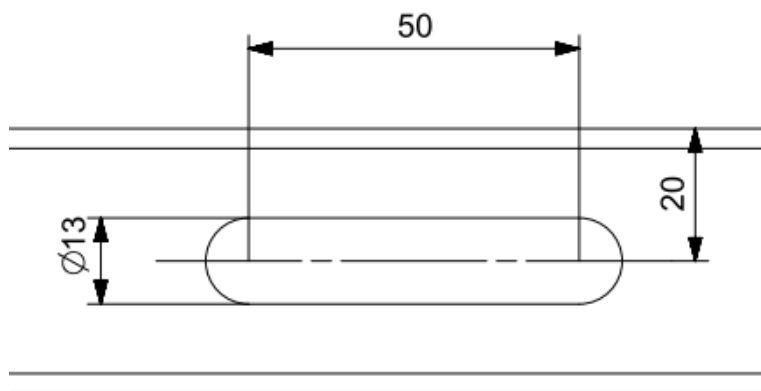
Rys. 2 - model profilu 1



Rys. 3 - model profilu 2



Rys. 4 - model profilu 3



Rys. 5 -wymiary otworów odciążających

## 1.2. Objętościowy wykaz profili.

Tabela 1. Wykaz parametrów masowych profili.

Numer profilu	Liczba otworów	Rozstaw [mm]	Objętość [mm <sup>3</sup> ]	Masa [kg]
Profil 1	0	0	257132	1,85
Profil 2	5	211	241478	1,80
Profil 3	8	120	232085	1,67

### 1.3. Analiza.

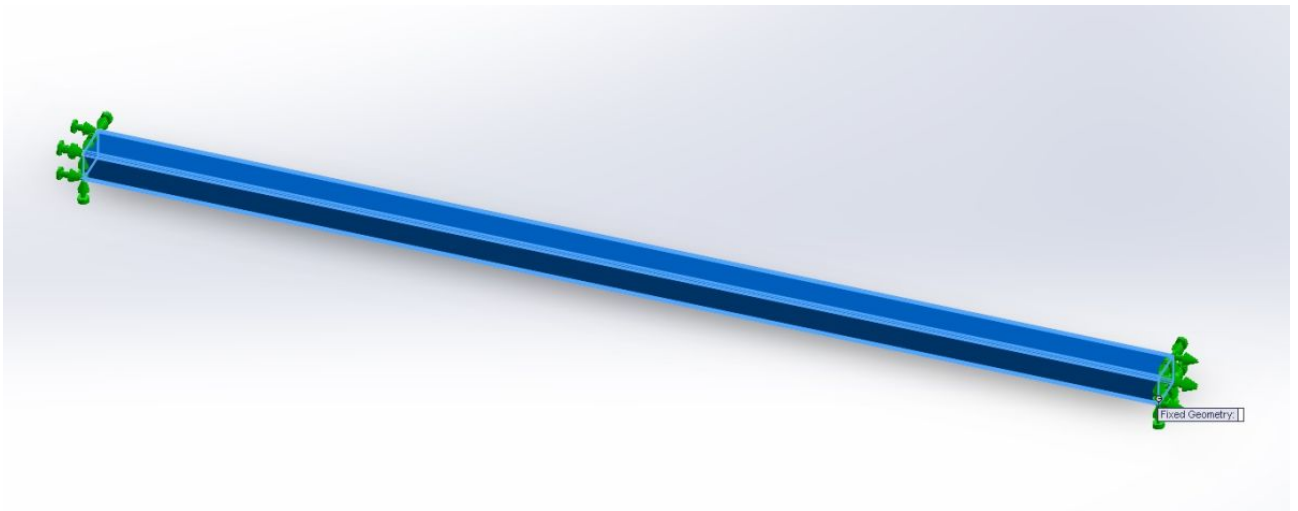
#### Obliczenia MES:

Profile poddane analizie są konstrukcjami cienkościennymi ponieważ grubość ścianek jest znacząco mniejsza od wymiarów gabarytowych. Do tego typu analizy stosujemy poniższe różniczkowe równanie cząstkowe

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla * c \nabla u = F$$

#### Sposób zamocowania:

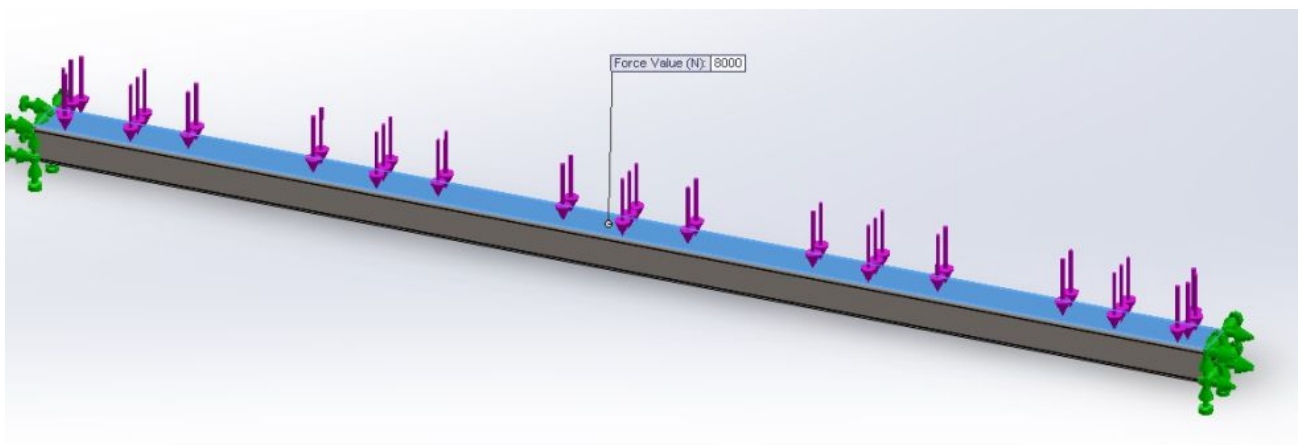
Profil został utwierdzony obustronnie:



Rys. 6 -utwierdzenie profilu (utwierdzenie odbierające 3 stopnie swobody)

#### Rozkład sił:

Siły zostały rozłożone po całej wierzchniej powierzchni profilu. Element został obciążony siłą 8000N



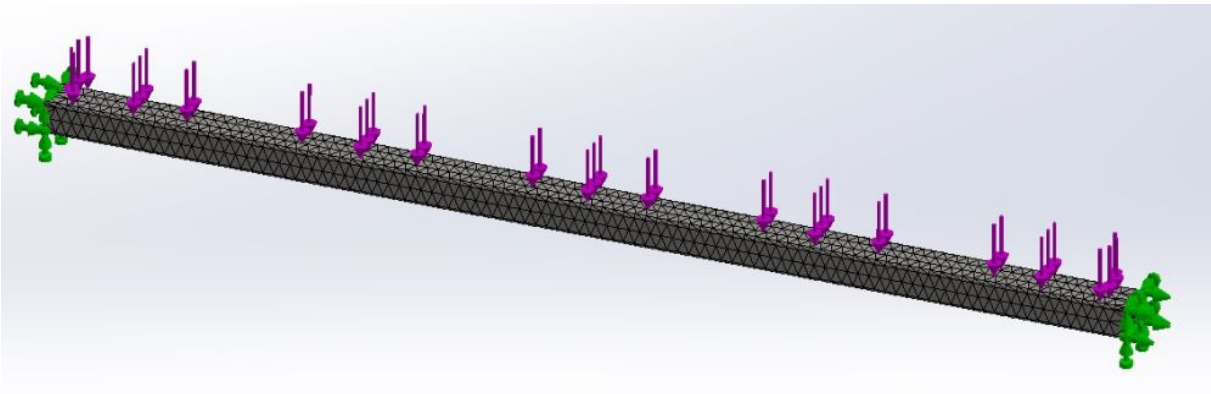
Rys. 7 - sposób obciążenia (siły rozłożone na całej powierzchni  $F = 8000N$ )

**Material:**

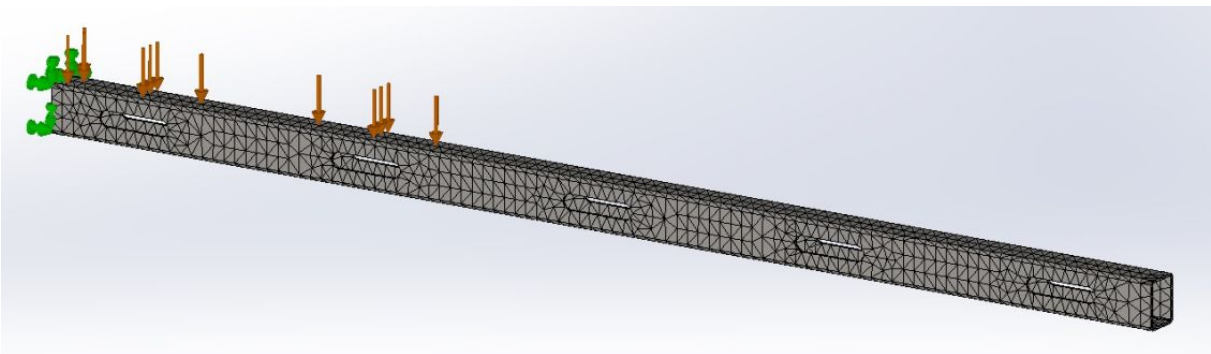
Na element zostały nadane poniższe dane materiałowe:

Tabela 2. Dane materiałowe dla stali użytej do konstrukcji belki.

Property	Value	Units
Elastic Modulus	2.1e+011	N/m <sup>2</sup>
Poissons Ratio	0.28	N/A
Shear Modulus	7.9e+010	N/m <sup>2</sup>
Density	7700	kg/m <sup>3</sup>
Tensile Strength	723825600	N/m <sup>2</sup>
Compressive Strength in X		N/m <sup>2</sup>
Yield Strength	620422000	N/m <sup>2</sup>
Thermal Expansion Coefficient	1.3e-005	/K
Thermal Conductivity	50	W/(m·K)

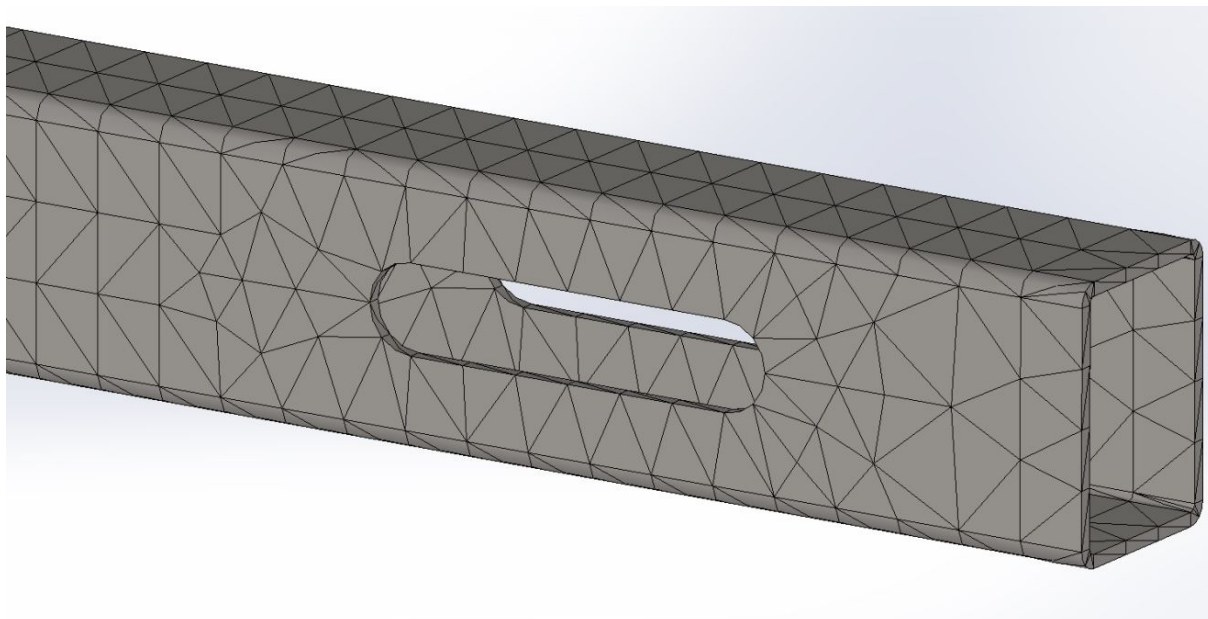
**Podział na elementy skończone:**

Rys. 8 - podział na elementy skończone

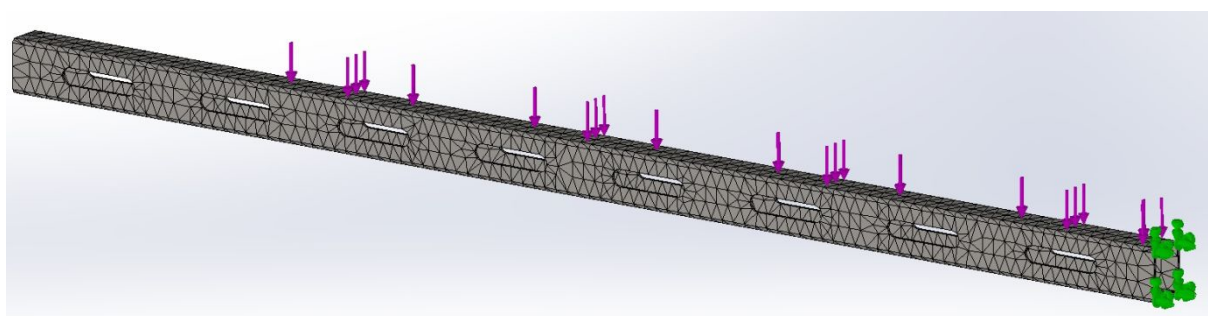


Rys. 9 - Podział na elementy skończone





Rys. 10 - podział na elementy skończone (rozkład w pobliżu otworów)



Rys. 11 - podział na elementy skończone

**Wyniki:**

Analiza wykazała pozytywny wpływ otworów odciążających na konstrukcje profilu. Przemieszczenia maksymalne w profilach odchudzonych są mniejsze niż w przypadku pełnego profilu. Na krańcach otworów pojawiają się drobne spiętrzenia naprężeń.

Tabela 3. Wyniki analizy MES

Numer profilu	Liczba otworów	Maksymalne ugięcie [mm]	Maksymalne naprężenia Von Mises'a [N/m <sup>2</sup> ]	Masa [kg]
Profil 1	0	2,88	316,89	1,85
Profil 2	5	2,06	369,43	1,80
Profil 3	8	2,17	366,58	1,67

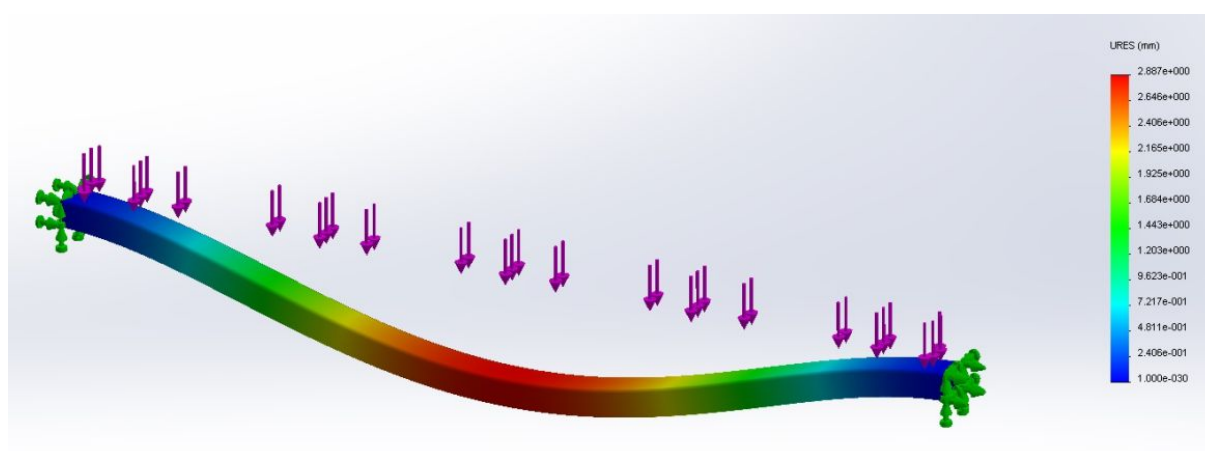


Tabela 4. Korelacja zysku masy wraz z ugięciem

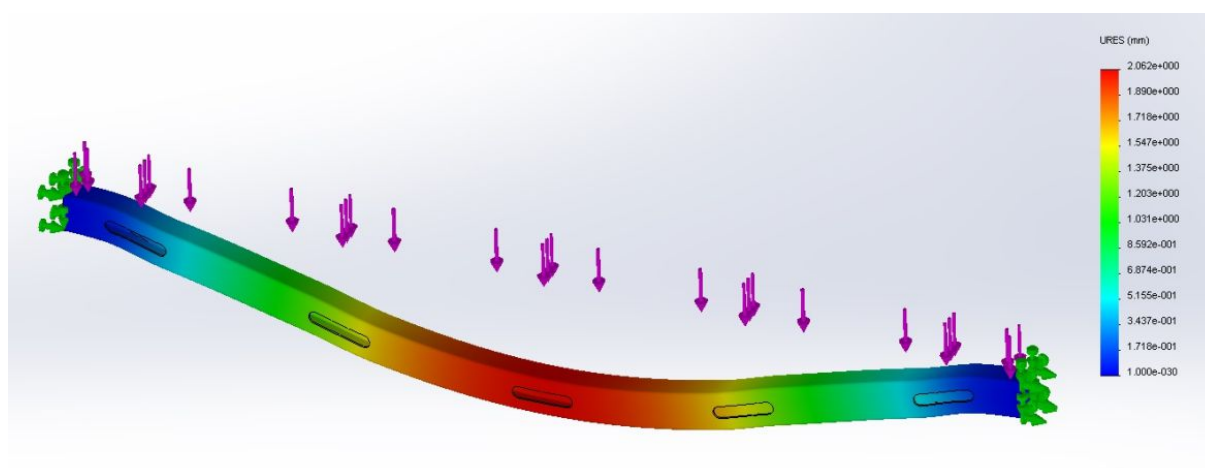
Numer profilu	Liczba otworów	Maksymalne ugięcie [mm]	Masa [kg]	Utrata masy [%]	Ugięcie mniejsze o [%]
Profil 1	0	2,88	1,85	Pkt. odniesienia	Pkt. odniesienia
Profil 2	5	2,06	1,80	2,7	28,47
Profil 3	8	2,17	1,67	9,73	24,65

Powyższa tabela pokazuje zyski z wykonywania otworów odciążających. Najlepszym rozwiązaniem okazał się profil nr. 3, ponieważ pokazuje najlepszy stosunek utraconej masy do ugięcia.

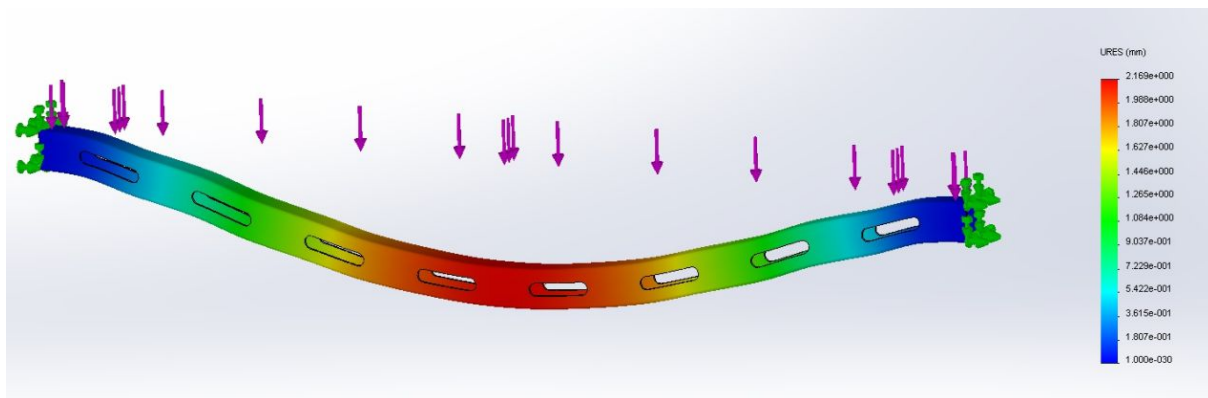
#### Analiza przemieszczeń:



Rys. 12 -analiza przemieszczeń profilu 1, maksymalne ugięcie: 2,88 [mm]

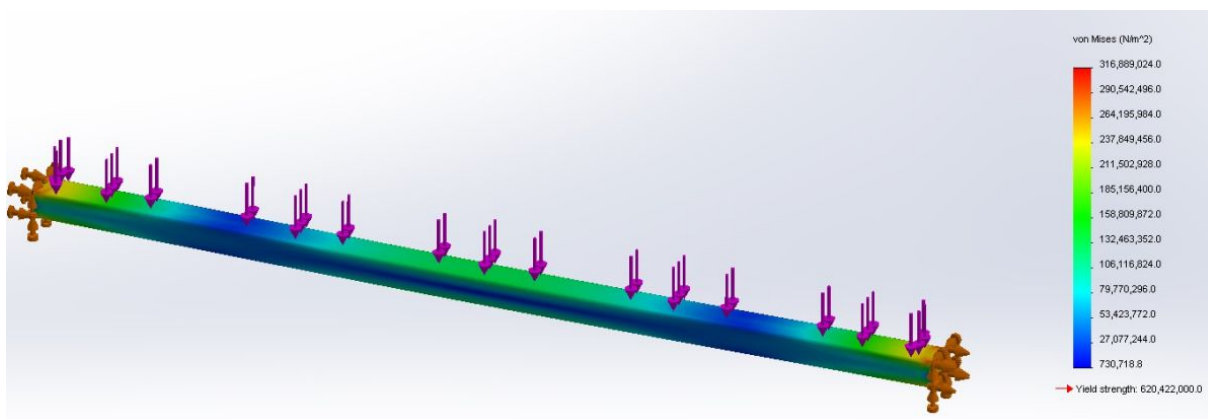


Rys. 13 -analiza przemieszczeń profilu 2, maksymalne ugięcie: 2,06 [mm]

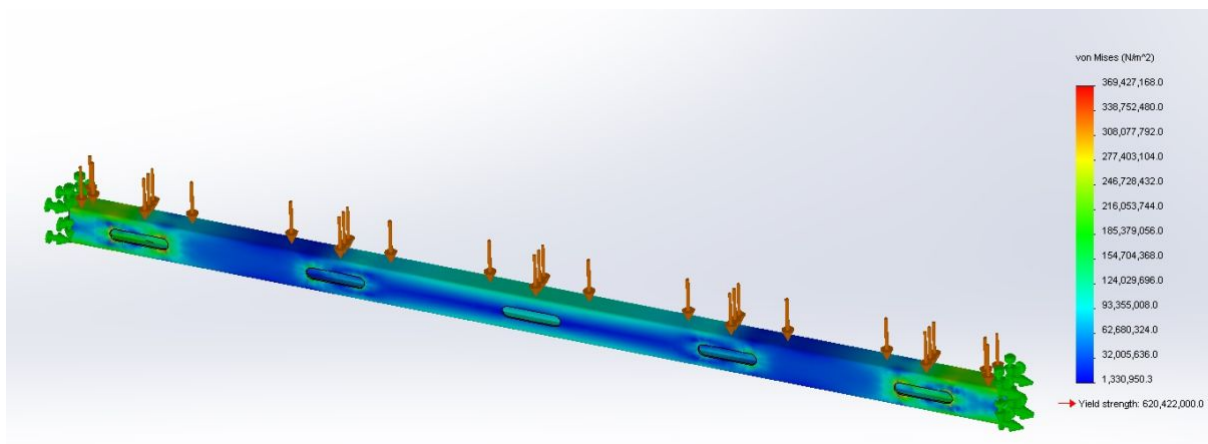


Rys. 14- analiza przemieszczeń profilu 3, maksymalne ugięcie: 2,17 [mm]

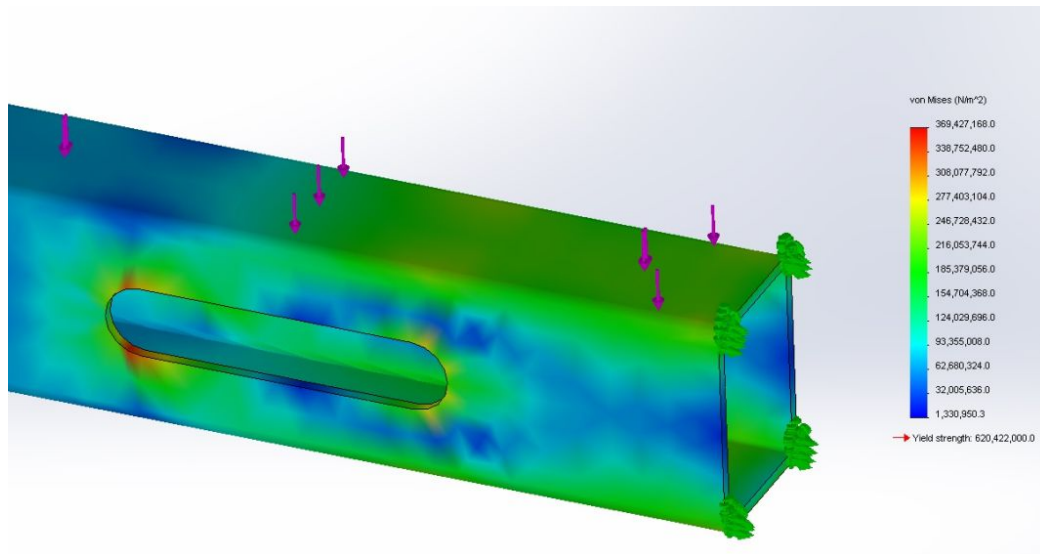
**Analiza odkształceń:**



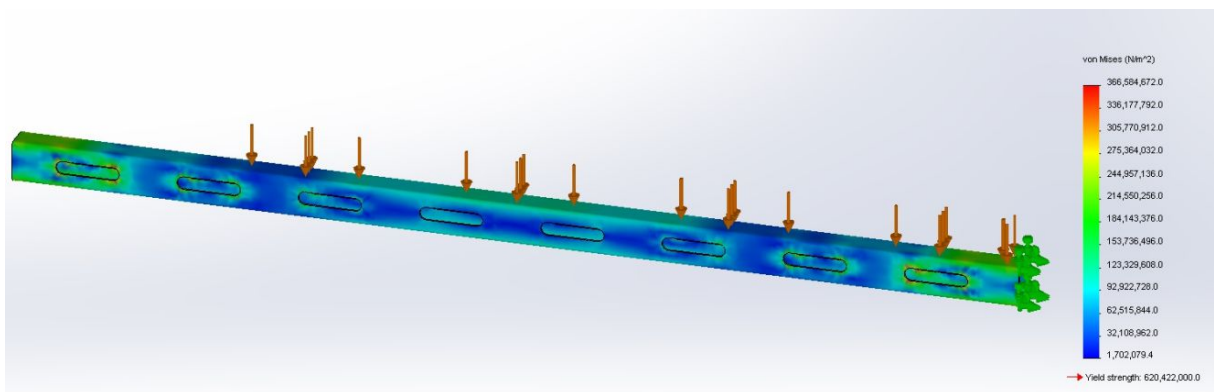
Rys. 15 -analiza naprężeń profilu 1, maksymalne naprężenie von Mises'a: 316,89 [N/m<sup>2</sup>]



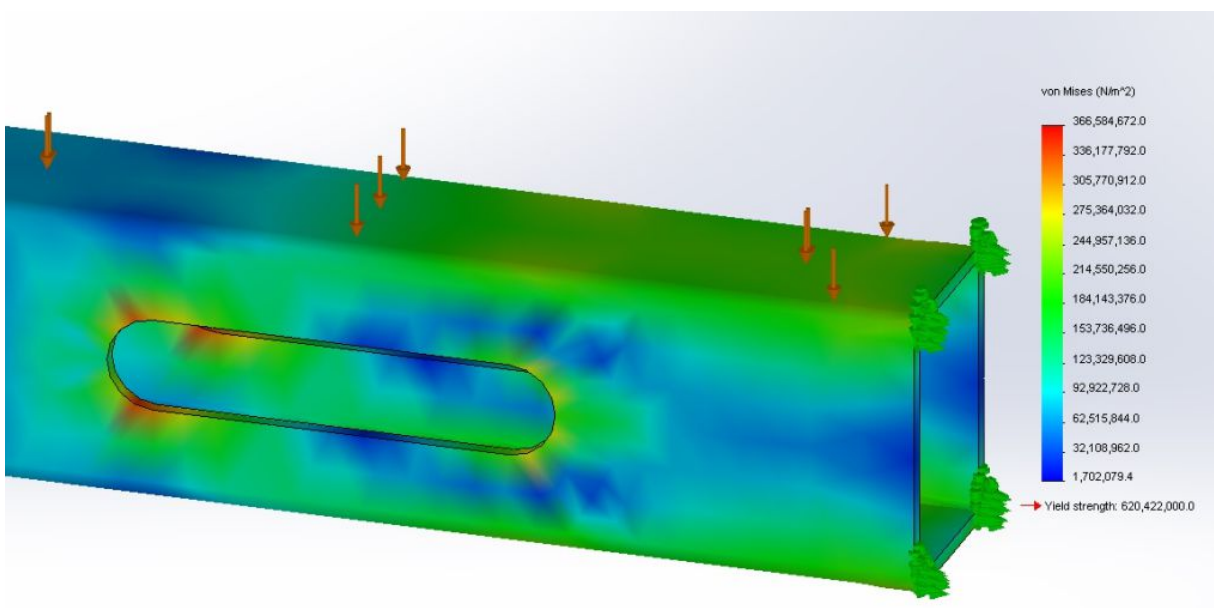
Rys. 16 - analiza naprężeń profilu 2, maksymalne naprężenie von Mises'a: 369,43[N/m<sup>2</sup>]



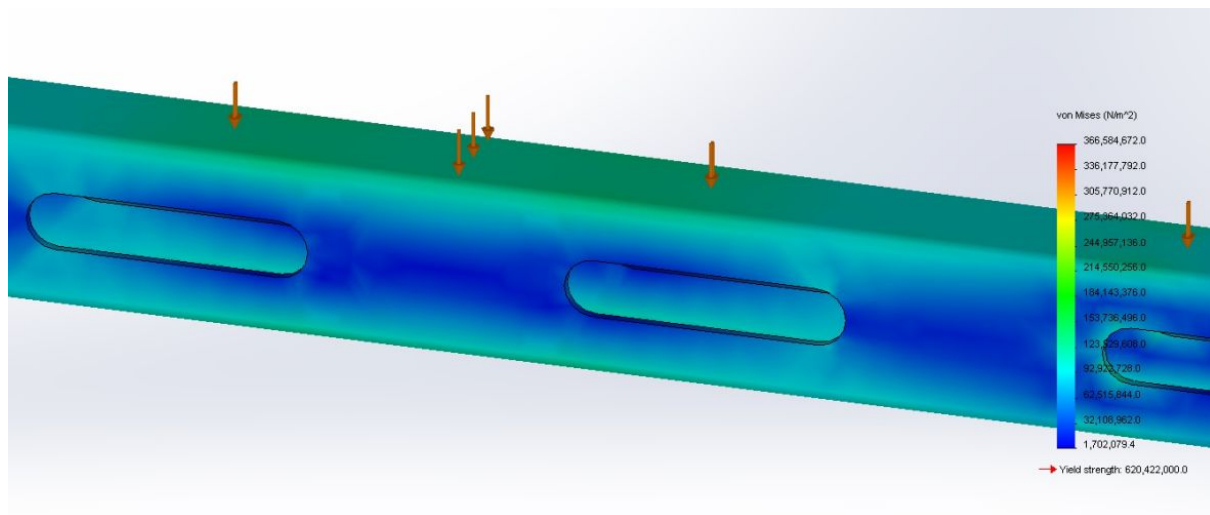
Rys. 17 -rozkład naprężeń w okolo skrajnego otworu profilu 2



Rys. 18 -analiza naprężeń profilu 3, maksymalne naprężenie von Mises'a: 366,58 [N/m<sup>2</sup>]



Rys. 19- rozkład naprężeń w okolo skrajnego otworu profilu 3



*Rys. 20 - rozkład naprężeń w środkowej części profilu*

#### **1.4. Wnioski.**

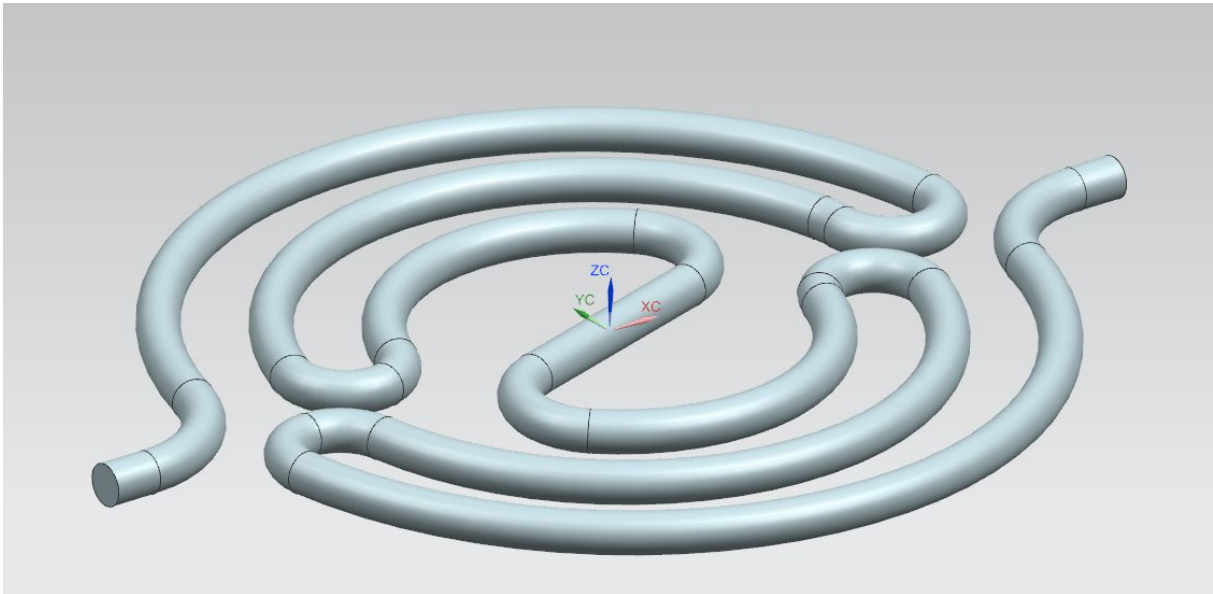
Podczas projektowania konstrukcji złożonych z profili cienkościennych warto wziąć pod uwagę zastosowanie otworów odciążających, ponieważ pozwalają one na zmniejszenie masy konstrukcji ale również zmieniają rozkład naprężeń. W przedmiotach poddanych analizie wykazano lokalne spiętrzenia naprężeń w okolicy otworów, jednak ich wartości były akceptowalne. Niestety stosowanie tego typu rozwiązań zwiększa koszty przygotowania elementów np. do spawania. Kolejną korzyścią z stosowania otworów jest możliwość pod montażu elementów na ramach nośnych konstrukcji.

## 2. Analiza przepływu ciepła przez miedziane elementy.

### 2.1. Przedmiot analizy.

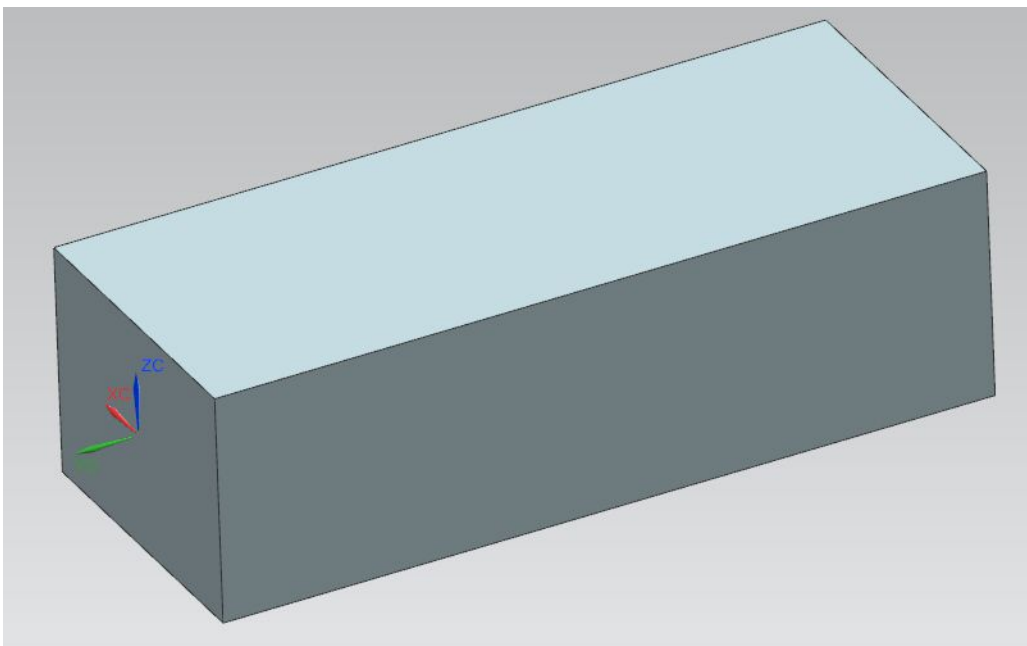
Analizie MES zostały poddane dwa elementy o jednakowych objętościach jednak różnym przekroju poprzecznym.

Pierwszy przedmiot to pręt o przekroju kołowym i średnicy 10mm. Pręt ma analogiczny kształt jak grzałki elektryczne.



*Rys. 1 - model pręta (średnica  $D=10\text{mm}$ )*

Drugi przedmiot to profil pełny o przekroju 40mm x 30mm.



*Rys. 2 -model profilu prostokątnego (40mm x30mm)*

## 2.2. Analiza.

### Obliczenia MES:

Przewodzenie ciepła to proces wymiany energii między ciałami o różnych temperaturach. Proces ten prowadzi do wyrównania temperatury między ciałami i występuje tylko wtedy gdy jest obecny gradient temperatur (różnica). **Równaniem różniczkowym cząstkowym które opisuje przewodzenie ciepła jest równanie Fouriera:**

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -k \int_s \nabla T dS$$

W przypadku jednorodnych materiałów możemy przekształcić wzór na:

$$Q = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

gdzie: Q - natężenie przepływu ciepła  
 $\lambda$  - współczynnik przewodzenia ciepła  
A - powierzchnia wymiany ciepła  
T - temperatura

Dokonując analizy ważną rzeczą jest wyznaczenie przewodności cieplnej której definicja mówi że:

"Dla ciała o kształcie prostopadłościanu przewodzącego ciepło w warunkach stanu stabilnego (ustalonego), które stanowi przegrodę dla przepływu ciepła, ilość przekazanej energii jest zależna od substancji, proporcjonalna do powierzchni przekroju poprzecznego przegrody, różnicy temperatur oraz czasu przepływu ciepła i odwrotnie proporcjonalna do grubości przegrody"

Z czego wynika uproszczony wzór:

$$\lambda = \frac{Q}{t} \frac{d}{S \Delta T}$$

Do obliczenia przewodnictwa cieplnego użyto równania:

$$\delta_{t,a} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla * (k \nabla T) = Q$$

gdzie:  $\rho$  - gęstość  
 $C_p$  - pojemność cieplna  
k - tensor przewodności cieplnej  
Q - źródło analizy

Podczas analizy czynnikiem odbierającym ciepło było powietrze, współczynnik przewodzenia ciepła tego ośrodka został przyjęty na  $20 \frac{W}{m^2K}$ .



**Material:**

Do analizy przyjęto ten sam materiał dla obu przypadków. Stop miedzi UNS C 10100

Equation

$$\delta_{ts} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q, T = \text{temperature}$$

Subdomains Groups

Subdomain selection

1

Group:

Select by group

Active in this domain

Physics Init Element Color

Thermal properties and heat sources/sinks

Library material: **UNS C10100** Load...

Quantity	Value/Expression	Unit	Description
$\delta_{ts}$	1	1	Time-scaling coefficient
<input checked="" type="radio"/> k (isotropic)	<b>k_solid_residual_1</b>	W/(m·K)	Thermal conductivity
<input type="radio"/> k (anisotropic)	400 0 0 0 400 0 0 0 4	W/(m·K)	Thermal conductivity
$\rho$	<b>rho(T[1/K])[kg/m<sup>3</sup>]</b>	kg/m <sup>3</sup>	Density
$C_p$	<b>C_solid_1(T[1/K])</b>	J/(kg·K)	Heat capacity at constant pressure
Q	0	W/m <sup>3</sup>	Heat source

Rys.3 -dane materiałowe

Dla elementów nadano temperaturę początkową 293K

Equation

$$\delta_{ts} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q, T = \text{temperature}$$

Subdomains Groups

Subdomain selection

1

Group:

Select by group

Active in this domain

Physics Init Element Color

Initial value

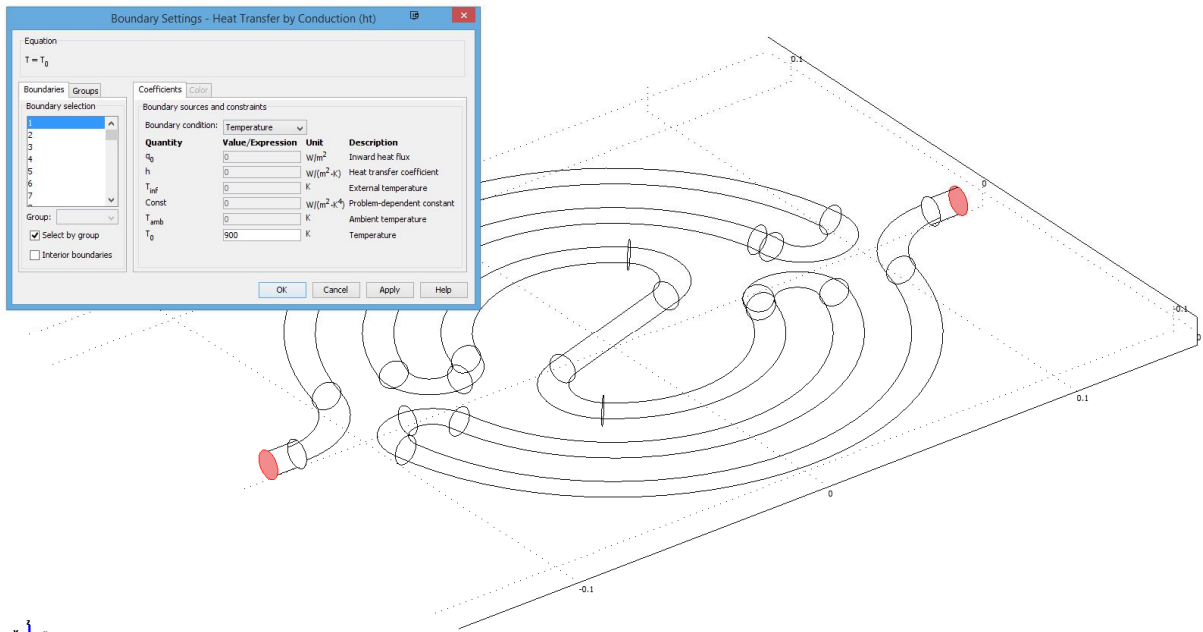
$T(t_0)$  293 K Temperature

Rys.4 -temperatura początkowa (293K)

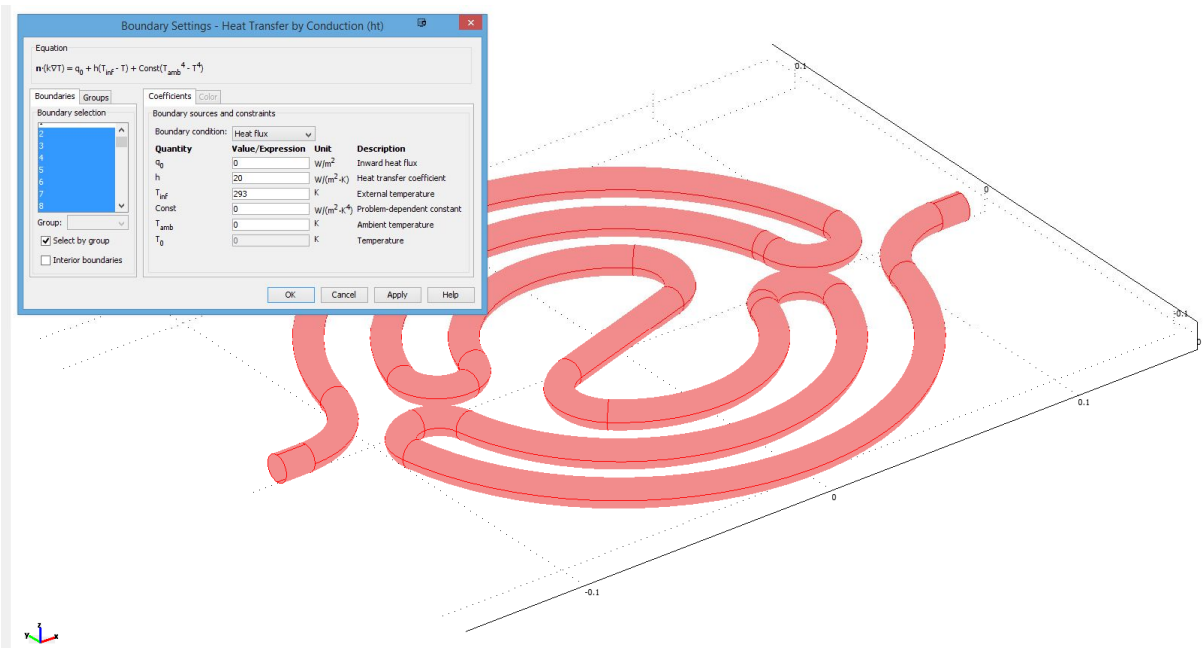
**Warunki początkowe:**

Dwie krańcowe ścianki elementu zostały zasilone temperaturą 900K, pozostałe ścianki zostały umieszczone w powietrzu przy temperaturze 293K.



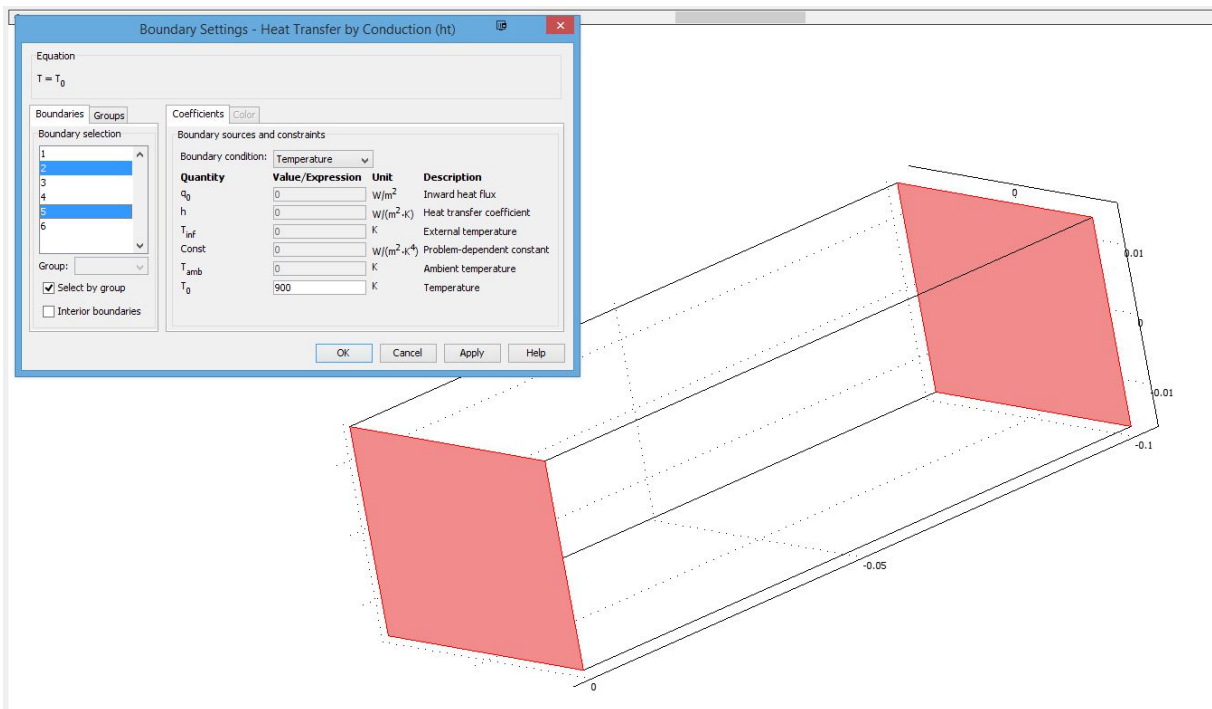


Rys. 5 - temperatura końcowych ścianek 900K

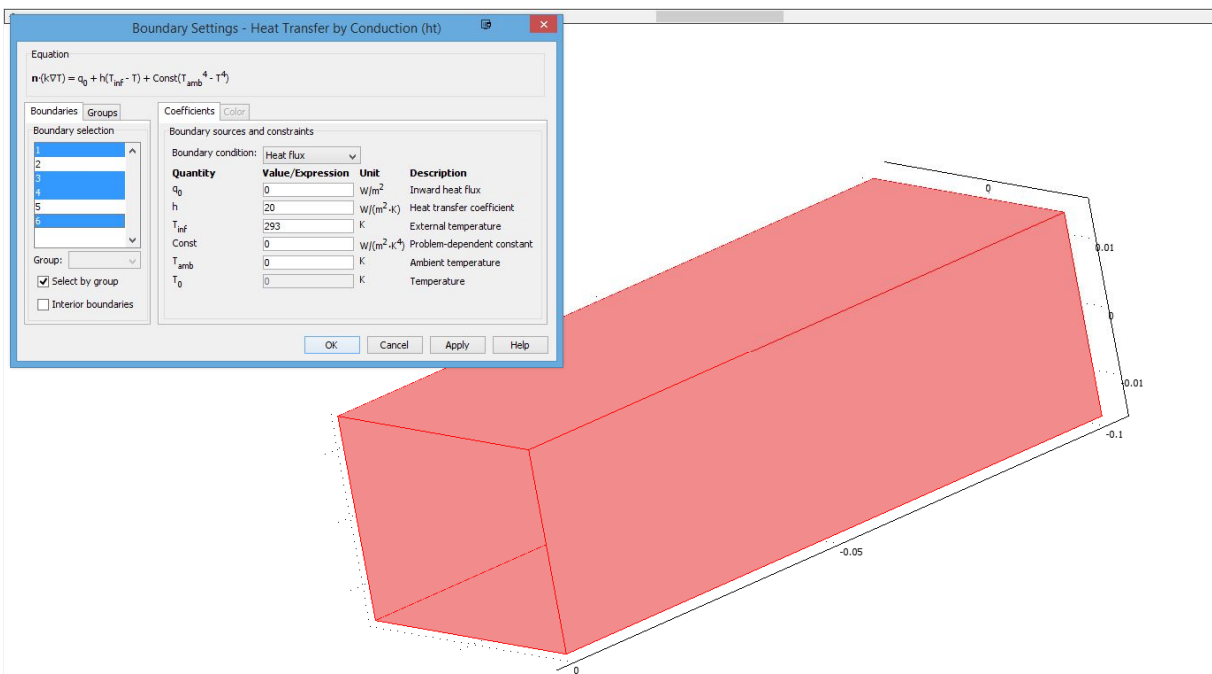


Rys. 6 - ścianki osadzone w powietrzu

Analogicznie do prętu zostały ustawione warunki w profilu zamkniętym.



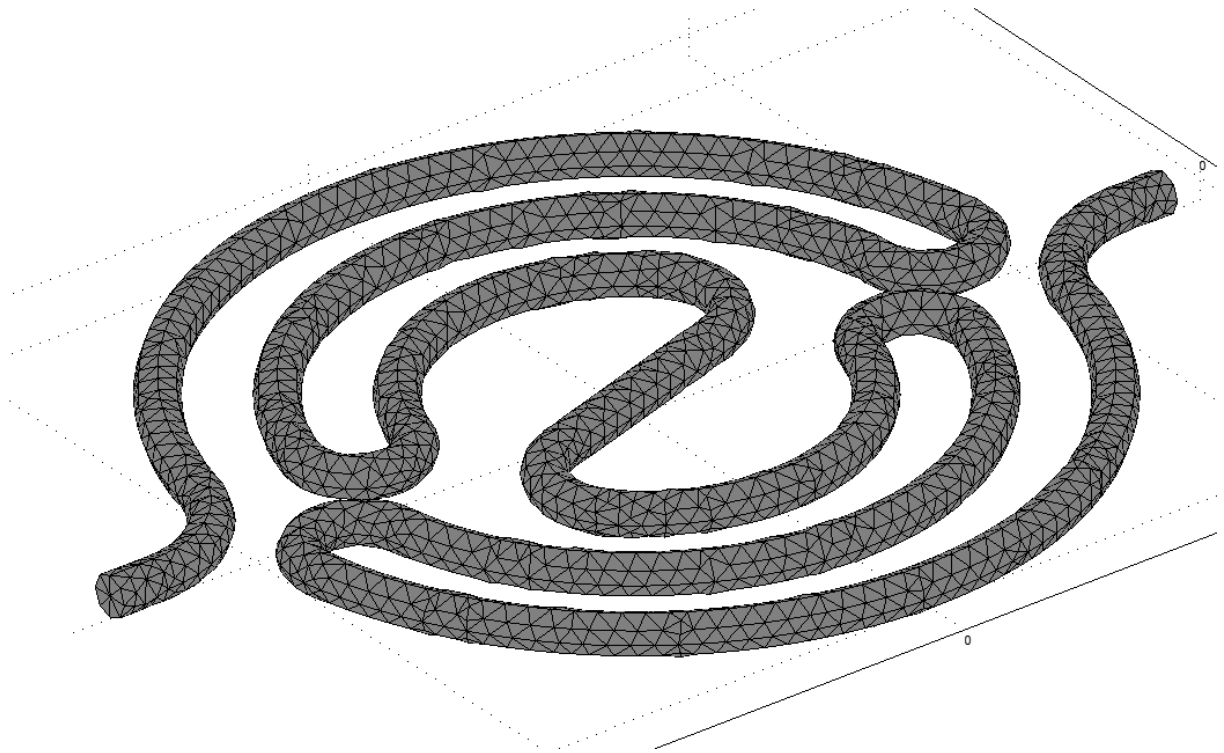
Rys. 7 -temperatura końcowych ścianek 900K



Rys. 8 - ścianki osadzone w powietrzu

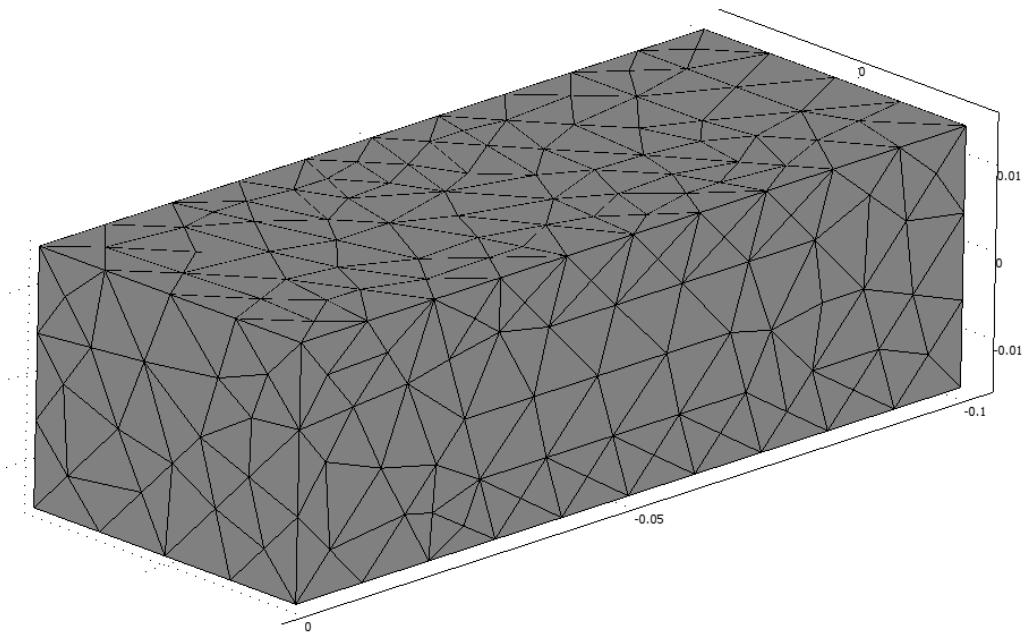
**Podział na elementy skończone:**

Element został podzielony na elementy skończone a ich liczba wyniosła 9024.



*Rys. 9 - podział na elementy skończone*

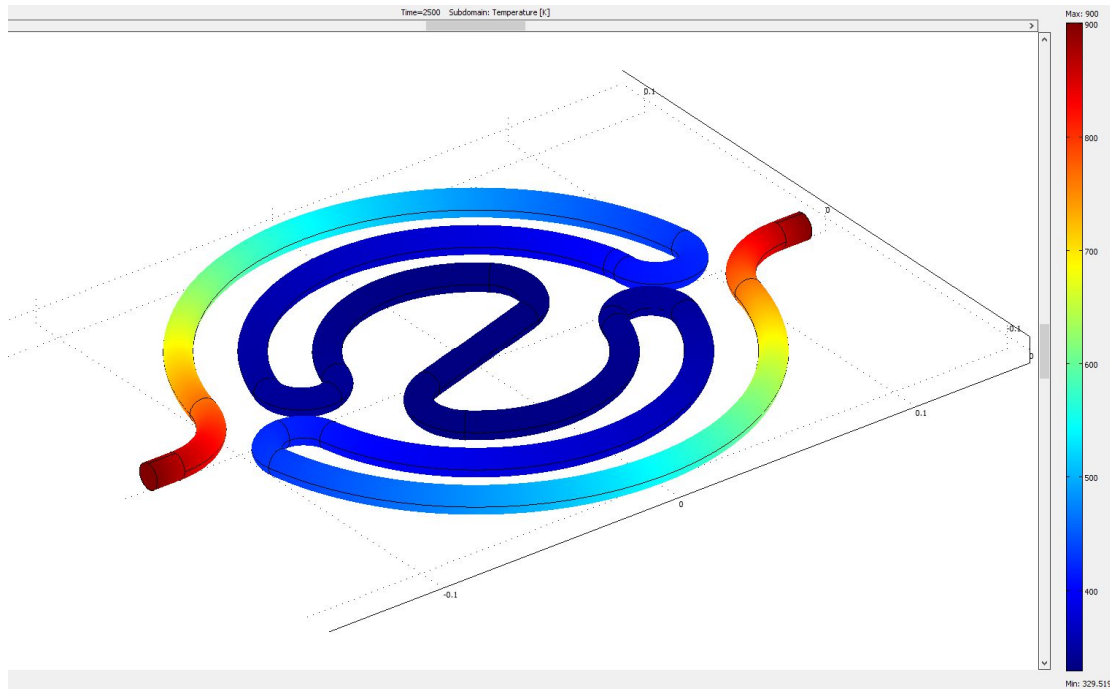
W przypadku profilu pełnego otrzymaliśmy 2071 elementów skończonych



*Rys. 10 - podział na elementy skończone*

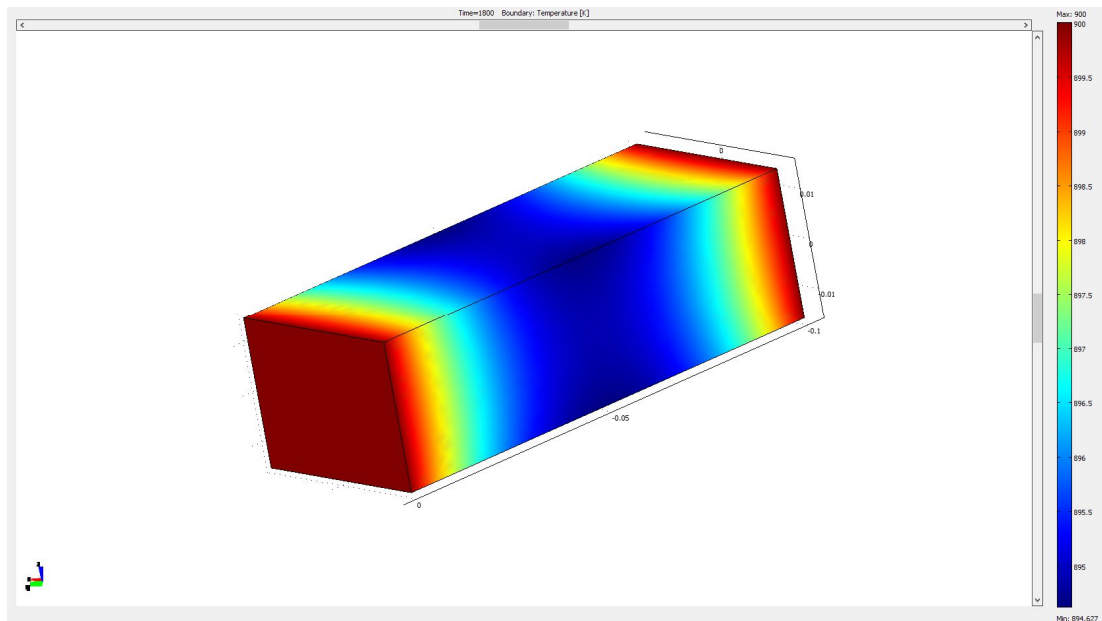
**Wyniki:**

Podczas analizy pręta wykazano że najniższa temperatura do jakiej w stanie nagrząć element oscyluje w granicach 329K , taką temperaturę udało się uzyskać po 1800s. Jesteśmy



Rys. 11 -wyniki analizy pręta,  $T_{max} = 900K$ ,  $T_{min} = 329,52K$ ,  $t = 1800s$

Podczas nagrzewania profilu o tej samej objętości wykazano że najniższa temperatura do jakiej jesteśmy w stanie nagrząć element o 894K. W porównaniu do badanego pręta temperatura jest większa o 2,72x.



Rys. 12 -wyniki analizy profilu,  $T_{max} = 900K$ ,  $T_{min} = 894,63K$ ,  $t = 1800s$

### **2.3. Wnioski:**

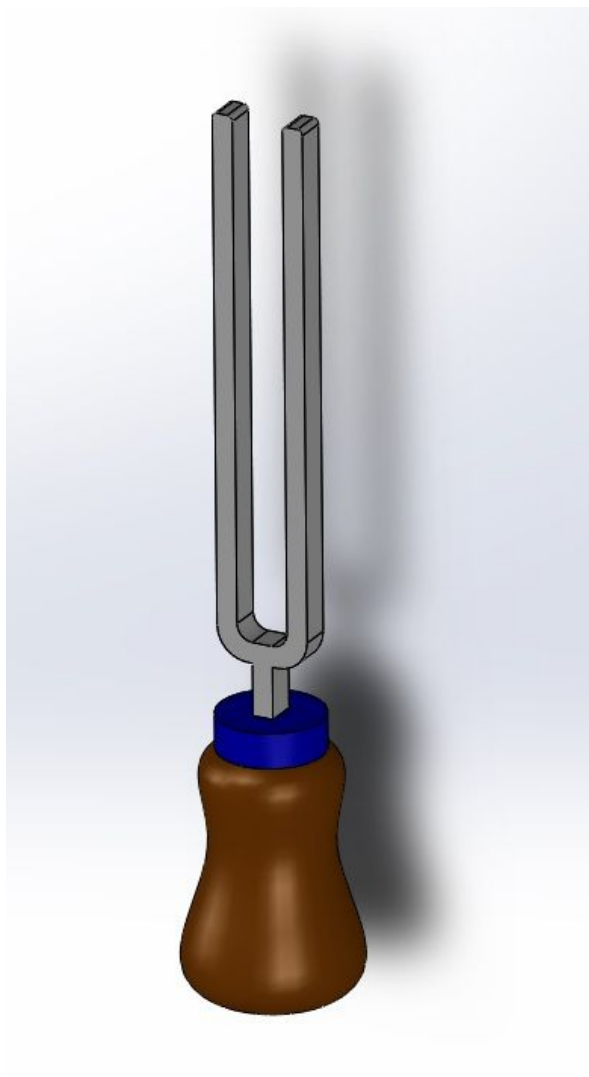
Analiza przedmiotów wykazała, że dwa elementy o jednakowych objętościach wykonanych z identycznych materiałów potrafią się inaczej nagrzewać w przypadku odmiennego ukształtowania.

Badany pręt uzyskał niższą temperaturę ponieważ powierzchnia która oddawała ciepło do otoczenia była znacznie większa niż w badanym profilu zamkniętym. Wykazano także, że w przypadku przykładania temperatury 900K na końcach nie przekroczymy granicy 400K w środku elementu. Profil zamknięty nagrzał się prawie do temperatury źródła ponieważ powietrze nie zdążyło odebrać od niego wystarczającej ilości ciepła.

### 3. Analiza częstotliwości drgań własnych modelu CAD kamertonu widelkowego za pomocą Metody Elementów Skończonych.

#### 3.1. Wstęp.

Przeprowadzana symulacja ma na celu wyznaczenie wartości częstotliwości drgań własnych kamertonu. Kamerton jest to urządzenie służące między innymi do strojenia instrumentów muzycznych. Najczęściej w postaci jednotonowego instrumentu, nastrojonego na stałe na dźwięk  $a^1$  w stroju wiedeńskim = 440Hz. W przypadku naszego modelu, jego podstawowa częstotliwość strojenia jest dwa razy niższa i wynosi 220Hz. Widelki kamertonu wykonane ze stali niehartowanej wprawia się w drgania uderzając w nie specjalnie do tego przeznaczonym młoteczkami.



*Rys. 1 - model kamertonu poddany badaniu*

**Teoria:**

W przypadku wyznaczania częstotliwości drgań własnych stosowane jest równanie rozwiązywane niezależnie od czasu, które opiera się na **równaniu falowym**:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{u}$$

Po przekształceniach uzyskujemy:

$$-\rho\omega^2 \mathbf{u} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} .$$

gdzie:  $\rho, \mu, \lambda$  - stałe materiałowe  
 $\omega$  - prędkość kątowa  
 $\mathbf{u}$  - funkcja falowa

Dla częstotliwości własnych równanie redukuje się do postaci macierzowej reprezentowanej przez równanie:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = 0$$

gdzie:  $[M]$  - macierz masy  
 $[K]$  - macierz sztywności.

Dzięki tym zabiegom problem zostaje rozwiązany metodą dyskretną (numeryczną).



### 3.2. Konfiguracja elementu, przeprowadzenie analizy.

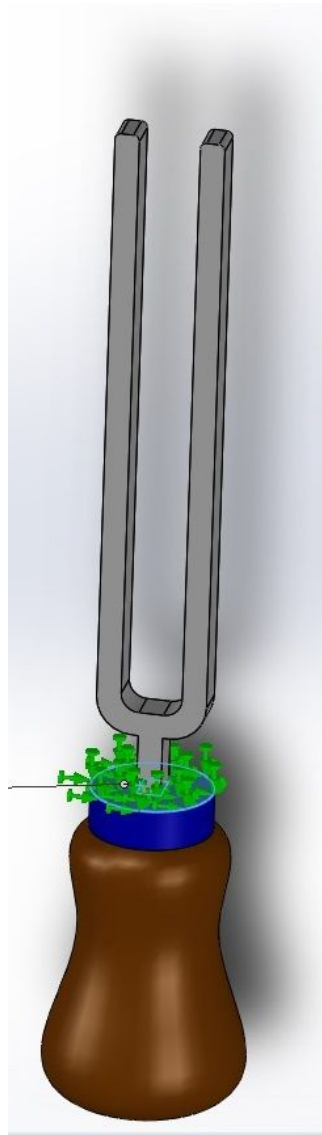
Pierwszym etapem do realizacji w przeprowadzanym procesie analizy jest nadanie materiału na część, którą chcemy zbadać. Widelki kamertonu, które emitują drgania w postaci fali słyszalnej wykonywane są ze stali niehartowanej, jednak dokładnego stopu wykorzystywanej stali nie znamy, dobrym przybliżeniem będzie nadanie jako materiału na modelu stali stopowej, której specyfikacja przedstawiona jest na widoku poniżej:

Property	Value	Units
Elastic Modulus	2.1e+011	N/m <sup>2</sup>
Poissons Ratio	0.28	N/A
Shear Modulus	7.9e+010	N/m <sup>2</sup>
Density	7700	kg/m <sup>3</sup>
Tensile Strength	723825600	N/m <sup>2</sup>
Compressive Strength in X		N/m <sup>2</sup>
Yield Strength	620422000	N/m <sup>2</sup>
Thermal Expansion Coefficient	1.3e-005	/K
Thermal Conductivity	50	W/(m·K)
Specific Heat	460	J/(kg·K)

Rys. 3 - okno wyboru i nadania materiału wraz z własnościami

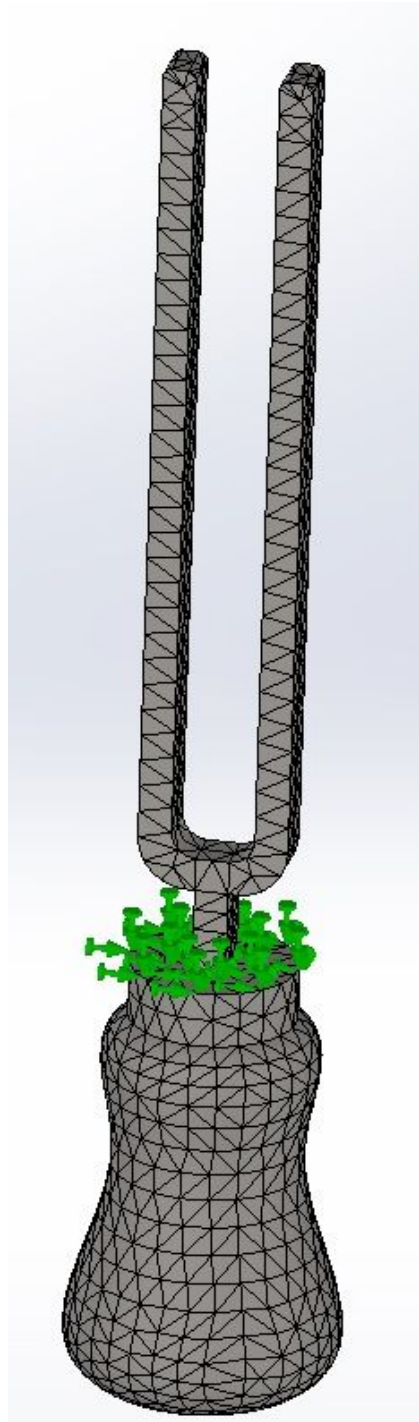
Wartości takie jak moduł Young'a, współczynnik Poisson'a, gęstość, itp. przypisane są do materiału.

**Kolejnym krokiem jest nadanie warunków brzegowych w postaci unieruchomienia geometrii, która w czasie symulacji ma być pozbawiona przemieszczenia. W przypadku kamertonu jest to podstawa widełek znajdująca się w uchwycie. Płaszczyzna unieruchomiona oznaczona jest zielonymi strzałkami na obraz poniżej:**



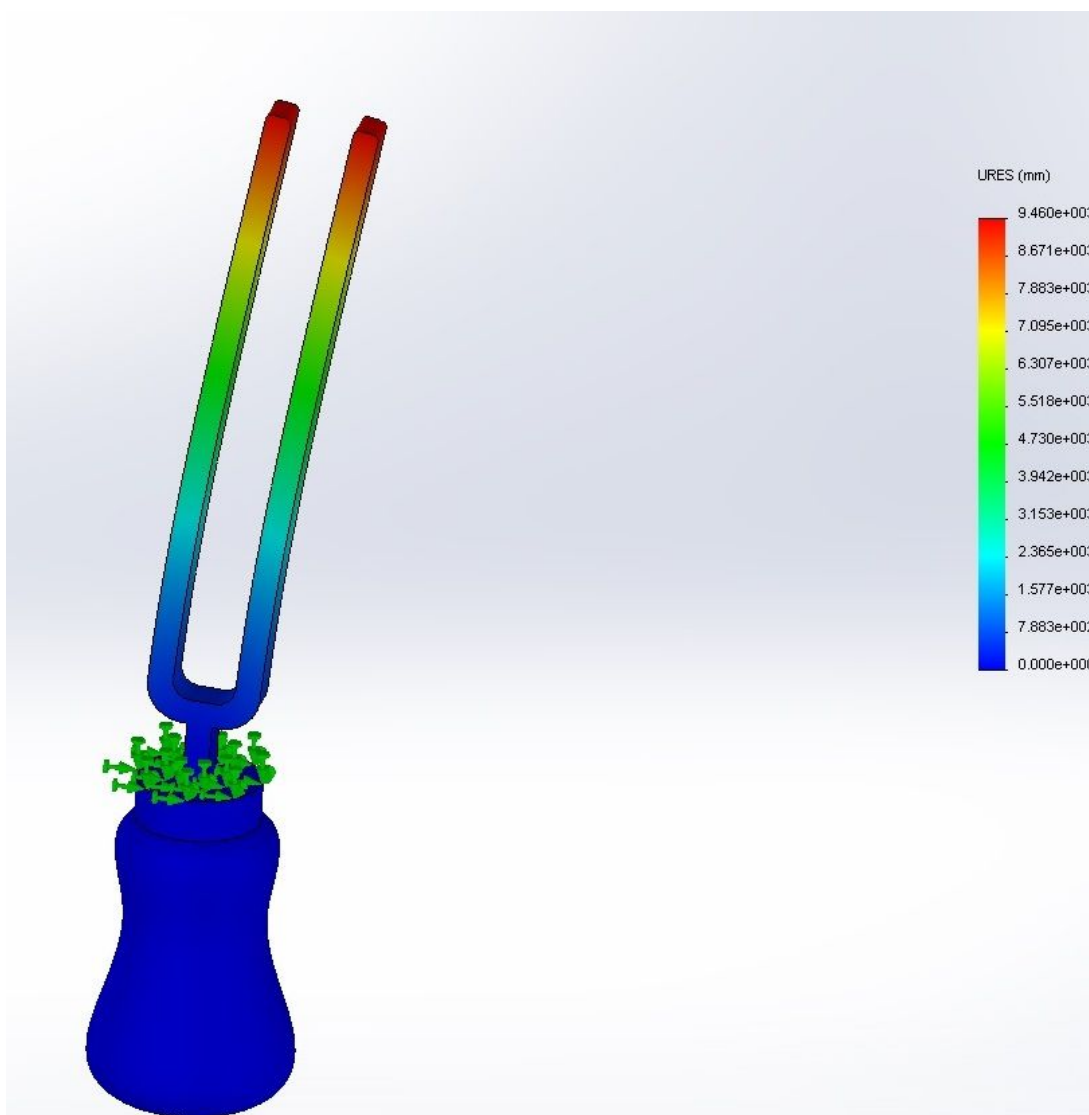
*Rys. 4 - nadanie wiązań, warunków brzegowych części*

**W metodzie elementów skończonych badany element trójwymiarowy dzieli się na skończoną ilość czworościanów, a obliczenia wykonywane są numerycznie dla każdego z węzłów w wygenerowanej siatce. Siatka w zależności od geometrii elementu różni się gęstością i przybliżeniem stworzonych czworościanów do idealnych czworościanów foremnych. Jej gęstością można także sterować w interfejsie programu.**



*Rys. 5 - wygenerowana siatka elementów skończonych*

Ostatnim krokiem jest przeprowadzenie obliczeń, po których następuje wyznaczenie żądanych wielkości, w naszym przypadku były to wartości częstotliwości drgań własnych:



Rys. 6 - wyniki dla  $f_1$

Uzyskane wyniki częstotliwości:

$$f_1 = 220,27 [Hz]$$

$$f_2 = 307,04 [Hz]$$

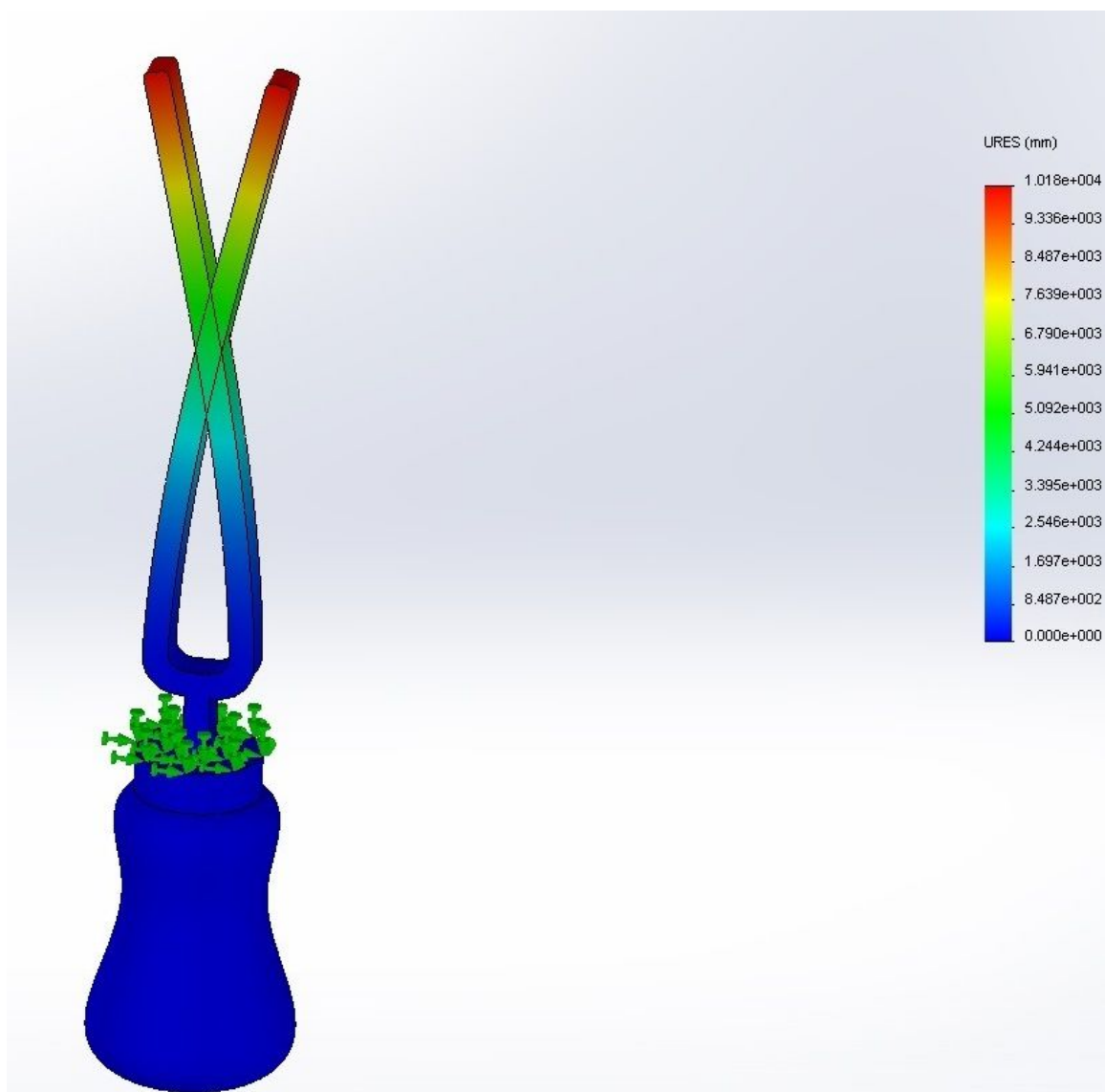
$$f_3 = 318,52 [Hz]$$

$$f_4 = 419,61 [Hz]$$

$$f_5 = 1438,3 [Hz]$$

Na ekranie ukazuje się także model, na którym mapowana jest za pomocą kolorów wartość maksymalnego odkształcenia elementu w trakcie drgań o określonej częstotliwości (skala widoczna obok).

Dla porównania - odkształcenia dla drugiej wyznaczonej częstotliwości prezentują się następująco:



Rys. 7 - wyniki dla  $f_2$

Oczywiście realne odkształcenia są znacznie mniejsze niż te widoczne na modelu ze względu na ich skalowanie (w rzeczywistości widelki nie przeniknęłyby się, a nawet nie zbliżyłyby się do siebie na widoczną gołym okiem odległość). Skalowanie stosowane jest, aby w sposób jednoznaczny i czytelny ukazać odkształcenia.

### 3.3. Wnioski.

Wartością, jaką spodziewaliśmy się uzyskać w wyniku kalkulacji metodą elementów skończonych było 220Hz, uzyskany wynik to 220,27Hz.

**Błąd bezwzględny:**

$$\Delta f = f_0 - f_1 = 220,27\text{Hz} - 220,00\text{Hz} = 0,27\text{Hz}$$

**Błąd względny:**

$$\delta f = \frac{\Delta f}{f_0} \cdot 100\% = \frac{0,27\text{Hz}}{220\text{Hz}} \cdot 100\% = 0,12\%$$

Jak wykazano powyżej błędy analizy w porównaniu do wyników oczekiwanych i zgodnych z założeniami konstrukcyjnymi kamertonu są bardzo małe i właściwie nieznaczące. Błędy te wynikają z przybliżeń jakie stosuje się w metodzie elementów skończonych polegających między innymi na obliczaniu wielkości badanych jedynie w węzłach siatki czworościanów, a także z przybliżenia jakim niewątpliwie było nadanie materiału różniącego się, choć w niewielkim stopniu od rzeczywistej stali stosowanej w elemencie.

**Podsumowując** - metoda elementów skończonych dla wyznaczania częstotliwości drgań własnych konstrukcji jest dobrym narzędziem stosowanym w szybkiej analizie konstrukcji, co pozwala na świadome konstruowanie, szczególnie części narażonych na drgania w trakcie eksploatacji, które mogą spowodować rezonans drgań i prowadzić do poważnych awarii.