

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ
WYDZIAŁ BUDOWY MASZYN I ZARZĄDZANIA
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

PRACA INŻYNIERSKA DYPLOMOWA
**MODELOWANIE I SYMULACJA WŁAŚCIWOŚCI
MECHANICZNYCH BIOMATERIAŁÓW**

Mikołaj OLEJNICZAK

Promotor:

dr hab. inż. Tomasz Stręk, prof. nadzw.

Poznań. 2013

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP	3
2. ANALIZA LITERATURY	4
2.1. Biomateriały	4
2.1.1. Biomateriały – bioceramika	5
2.1.2. Biomateriały – tworzywa sztuczne	8
2.1.3. Biomateriały – tworzywa kompozytowe	10
2.1.4. Biomateriały – metale i ich stopy	11
2.2. Właściwości mechaniczne	14
2.3. Metoda Elementów Skończonych (MES)	24
2.4. Program COMSOL Multiphysics	25
3. OPIS PROBLEMU	27
3.1. Wstęp	27
3.3. Wyniki przeprowadzonych symulacji	29
3.3.1. Analiza przemieszczeń i naprężeń – obciążona warstwa DLC, wariant 1	29
3.3.2. Analiza przemieszczeń i naprężeń – obciążona warstwa DLC, wariant 2	33
3.3.3. Analiza przemieszczeń i naprężeń – obciążona warstwa UHMWPE	36
3.3.4. Analiza przemieszczeń i naprężeń – ściskanie	38
3.3.5. Analiza naprężeń i przemieszczeń – częstotliwości rezonansowe.	41
4. WNIOSKI	49
5. ABSTRACT OF THESIS, STRESZCZENIE	51
LITERATURA	53

1. WSTĘP

Przedmiotem pracy jest analiza wybranych właściwości mechanicznych modelu, który dostosowany jest do pełnienia roli biomateriału. Symulacje zostały wykonane w programie inżynierskim COMSOL Multiphysics, wykorzystującym Metody Elementów Skończonych. Modelem w pracy jest próbka powłoki kompozytowej do zastosowania na elementach, składającej się z trzech różnych od siebie, pod względem charakterystyk fizycznych i wytrzymałościowych, materiałów.

Celem pracy jest przedstawienie wpływu obciążenia modelu na przemieszczenia, naprężenia (badania statyczne) oraz częstotliwości rezonansowe (badania dynamiczne) występujące w zamodelowanej próbce biomateriału, która charakteryzuje się wymiarami rzędu mikrometrów.

Praca składa się z trzech rozdziałów. Pierwszy z nich przedstawia zagadnienia literaturowe nawiązujące do przeprowadzonych symulacji – w pierwszej kolejności przedstawiony jest ogólny podział biomateriałów oraz przedstawienie ich głównych przedstawicieli, zaś w dalszej części działu opisane są podstawowe zagadnienia z dziedziny wytrzymałości materiałów oraz fizyki. Na końcu opracowania teoretycznego zawarte jest wyjaśnienie stosowanej metody MES oraz opis środowiska pracy COMSOL.

Następny podpunkt pracy to symulacje, czyli kluczowy element opracowania. Wykonano pięć różnych badań, zaś w każdym z nich wyznaczono różne charakterystyki. Przy każdym z nich występuje stosowny opis przedstawiający założenia oraz wnioski, oparty wynikami symulacji MES oraz wykresami.

Ostatni dział jest podsumowaniem całości pracy oraz zebraniem wniosków w jedną, integralną całość.

2. ANALIZA LITERATURY

2.1. Biomateriały

Biomateriały, jako specyficzna grupa materiałowa, charakteryzuje się zdolnością akceptacji przez organizm ludzki. Element, który został wykonany z niektórych biomateriałów, jest w stanie trwale połączyć się z żywą tkanką[1].

W celu zdefiniowania tego pojęcia w sposób bardziej zaawansowany, można przytoczyć definicję użytą przez European Society for Biomaterials, która brzmi następująco:

„Biomateriał to każda substancja inna niż lek albo kombinacja substancji naturalnych lub syntetycznych, która może być użyta w dowolnym okresie, a której zadaniem jest uzupełnienie lub zastąpienie tkanek narządu, albo jego części lub spełnienie ich funkcji”[2].

Ważne jest zaznaczenie, że niezbędną cechą biomateriałów jest ich biozgodność. Uwarunkowane jest to bezpośrednim kontaktem elementu z organizmem człowieka, zaś bliżej precyzując – z tkanką żywą. Ujednolicając, jest to wypełnianie roli biologicznych przez materiał zarówno w określonym zastosowaniu, jak i w sposób, który jest zgodny z jego przeznaczeniem [1].

Warto zacytować oficjalną definicję słowa „biozgodność”, która powstała wg Biomaterials Science An Introduction to Materials in Medicine – ELSEVIER 2004 Academic Press:

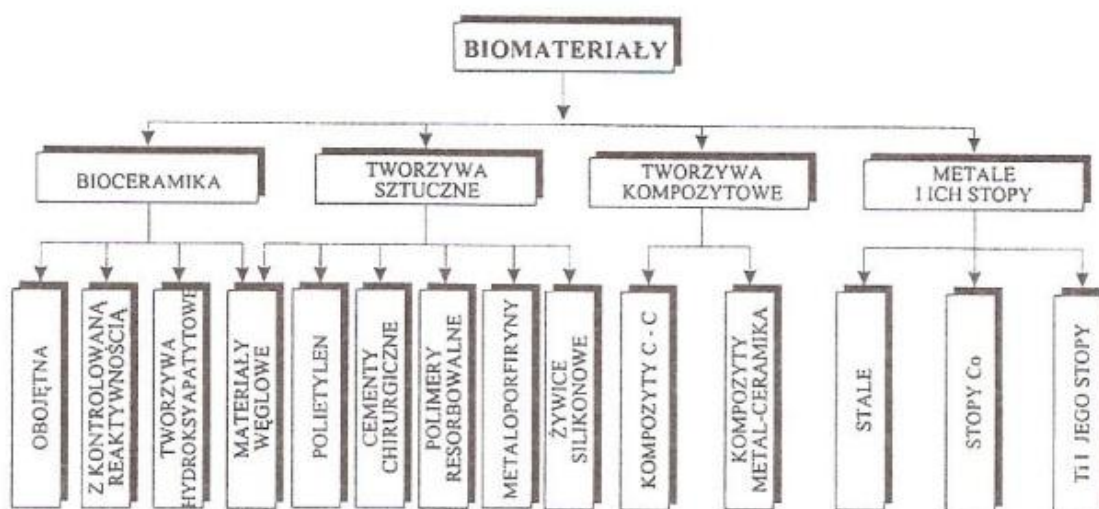
„Biozgodność jest to zdolność prawidłowego zachowania materiału w kontakcie z tkanką w określonym zastosowaniu.”

Zastosowanie biomateriałów możemy przedstawić za pomocą grafiki, która jest oznaczona jako Rys.1.



Rys.1. Jedne z najważniejszych obszarów zastosowania biomateriałów [3].

Ogólny podział biomateriałów można pokazać na podstawie wykresu w postaci drzewa, który jest pokazany na poniższym rysunku.



Rys.2. Podział biomateriałów, które obecnie są stosowane w medycynie [3].

2.1.1. Biomateriały – bioceramika

Pierwszymi próbami uzyskania materiału, który obecnie jest znany jako bioceramika, były przeprowadzane w XIX wieku badania dążące do regeneracji kości. Próbowano wykorzystać wtedy fosforan sodu – próby nie były jednak w pełni udane.

Następnym krokiem było zastosowanie porowatego Al_2O_3 wraz z żywicą epoksydową. Te próby były pomyślne. Równolegle zaczęto analizować zależność wielkości porów od wrastania kości do bioceramiki oraz wpływ na ich własności mechaniczne. Wyniki badań wykazały obojętność Al_2O_3 względem środowiska tkankowego [4].

W ostatnich latach intensywnie prowadzone są badania z zakresu powstałego wcześniej Al_2O_3 oraz materiałów kompozytowych, jak np. $CaO-Al_2O_3$, $CaO-ZrO_2$, $CaO-TiO_2$ oraz powłok kompozytowych, które są stworzone na bazie ceramiki i szkła zawierającej np. $Na_2O-CaO-P_2O_3-SiO_2$ lub $Na_2O-CoF-P_2O_5$ [5].

Bioceramika charakteryzuje się zarówno sporą ilością zalet i wad. Rozważając pierwszą cechę, która zarazem jest charakterystyczna tylko dla tego rodzaju biomateriałów, należy zauważyć, że materiały ceramiczne można przedstawić jako [3]:

- wysoce odporne na korozję, również w środowisku tkankowym,
- wytrzymałe w dużym stopniu na ściskanie,
- odporne na ścieranie,
- wysoce bioinertne w środowisku tkanek żywych,
- możliwe do sterylizacji bez zmian właściwości materiału,
- porowate, które zarazem umożliwiają wrastanie tkanek oraz trwale zabezpieczają połączenia implantu bioceramicznego z tkanką żywą.

Wadami materiałów bioceramicznych są [3]:

- kruchość,
- niska wytrzymałość na zginanie,
- są nieodporne na obciążenia dynamiczne,
- są nieodkształcalne.

Biomateriały ceramiczne, mimo tego, iż porównując do kości ludzkiej, mają wyższe współczynniki wytrzymałości na ściskanie R_c oraz wytrzymałości na zginanie, to i tak te wyniki nie są zadowalające, ze względu na występujące w tym rodzaju materiału zjawiska opóźnionego zniszczenia, które jest związane ze wzrostem pęknięć podkrytycznych. To zjawisko powoduje, iż nie można mieć stuprocentowej gwarancji, że podczas eksploatacji przy występowaniu obciążeń znacznie mniejszych od wartości krytycznych nie nastąpi gwałtowne, katastrofalne zniszczenie [4].

Porównanie materiałów, w tym ceramiki, znajduje się w *tabeli 1*.

Własności fizyczne	Kość ludzka	Stal CrNiMo 316L	Stop Co-Cr-Mo Protasul-2	Stop Ti-6Al-4V	Ceramika Al ₂ O ₃	Polietylen UHMWPE
Skład chemiczny	Ca ₅ (PO ₄) ₃ OH CaHPO ₄ ·2H ₂ O Ca ₈ H ₃ (PO ₄) ₆ 2H ₂ O CaCO ₃	Cr-17–19% Ni-13–15% Mo-2,5–3,5% Mn-2,0% Si-1,0%	Cr-26,5–30% Mo-4,5–7% Ni-2,5% Mn Fe, Si 1,0% Co reszta	Al-5,5–6,7% V-3,5–4,5% Ti reszta	H ₂ O ₃ -99,5% SiO ₂ -0,1%	–
Gęstość [g/cm ³]	–	7,9	8,3	4,5	3,9	0,96
porowatość	80	–	–	–	–	–
Wielkość kryształów ziarna [μm]	60–300	≤ 5	≤ 5	≤ 5	≤ 5	≤ ?
Wielkość porów [μm]	50–600	–	–	–	–	–
Wytrzymałość na rozciąganie R _m [MPa]	130	590–1100	665	850–1120	–	30
Wytrzymałość na ściskanie R _c [MPa]	200	–	–	–	4000	20
Wytrzymałość na zginanie R _g [MPa]	120	–	–	–	400	20–30
Wytrzymałość zmęczeniowa na zginanie R _{zg} [MPa]	–	240	250	500	–	–
Granica plastyczności R _{0,2} [MPa]	–	190–690	450	895–1080	–	–
Wydłużenie A ₅ [%]	0,02	40–12	8	10–15	–	–
Moduł sprężystości E [MPa]	1,8–1,9 × 10 ⁴	2,0 × 10 ⁵	2,0 × 10 ⁵	2,2 × 10 ⁵	3,8 × 10 ⁵	–

Tabela 1. Właściwości materiałów stosowanych na implanty w chirurgii kostnej[4].

Zastosowanie bioceramiki[6,18]:

- rekonstrukcje kości w obrębie twarzoczaszki,
- wypełnianie ubytków kości,
- uzupełnienia kości czaszki,
- stabilizatory złamanych kości,
- sztuczne korzenie zębowe,
- wzmocnienie stropu panewki stawu biodrowego,
- implanty trzonów kręgow kręgosłupa.



Rys.3. Porowate implanty korundowe o różnorodnych kształtach i wymiarach[18].

2.1.2. Biomateriały – tworzywa sztuczne

Ten rodzaj materiału znalazł szerokie zastosowanie w medycynie, ze względu na odmienne właściwości mechaniczne oraz fizykochemiczne w porównaniu do bioceramiki oraz biomateriałów metalicznych. Biopolimery, które odnajdują swoje zastosowanie w dziedzinie medycyny, poddawane są takim samym badaniom laboratoryjnym jak każde inne tworzywa sztuczne, zaś następnie także badaniom przedklinicznym (na zwierzętach laboratoryjnych) i klinicznym. Wstępne badania fizyczne i chemiczne są determinantą do przystosowania tworzywa sztucznego w środowisku biologicznym, więc niezbędne jest zbadanie biozgodności materiału. Pod lupę badających brane są takie zależności jak: własności mechaniczne, odporność na zmęczenie oraz oddziaływanie środowiska biologicznego na próbkę z testowanego tworzywa sztucznego [4].

Określenie „tworzywo sztuczne” nazywa się materiały, których podstawowym budulcem są sztuczne, naturalne lub modyfikowane polimery, które są uzupełnione dodatkami, takimi jak np. stabilizatory, plastyfikatory oraz różnych rodzajów modyfikatory [7].

Rozważając aspekt medyczny, polimery można podzielić na dwie najbardziej podstawowe kategorie: naturalne i sztuczne.

Do poszczególnych kategorii zaliczyć możemy [4,5]:

- naturalne: białka (kolagen, fibrynogen, jedwab), wielocukry (celuloza, chityna),
- sztuczne: politetrafluoroetylen, silikon, poliuretany, polietylen, polipropylen, politereftalan etylu, polimetakrylan metylu, poliamidy.

Rodzaj polimeru	Własności				
	wytrzymałość na rozciąganie Rm [MPa]	wydłużenie A [%]	twardość wg. skali Shorea	gęstość [g/cm ³]	absorpcja wody [%]
silikony	2,4÷7	100÷700	A15 + 65	1,0÷1,15	0,1
politetrafluoroetylen	13÷34	200÷400	D50 + D65	2,2	0,0
poliuretany	1÷69	10÷1000	A10 + D90	1,05÷1,15	0,6÷0,7
polietylen	4÷38	20÷1000	D41 + D70	0,91÷0,97	0,01
polipropylen	31÷210	60÷1000	D74 + D90	0,91	0,05
polimetakrylan metylu	55÷85	2÷7	M60 + M100	1,2	0,1÷0,4
polimetakrylan etylu	17÷280	50÷120	–	2,2	0,8
poliamid	63÷126	250÷550	–	1,14	2,5÷7,5

Tabela 2. Wybrane własności fizykochemiczne polimerów syntetycznych stosowanych na implanty [4].

Przykłady zastosowania biomateriałów polimerowych naturalnych [5]:

- kolagen – skóra zastępcza, korekta tkanek miękkich, w plastyce rogówki oraz moczowodu,
- fibryna – jako klej do narządów mięsnych, do zespolenia przelyku, nerwów oraz żołądka, do sklejanego wszczepów skóry z podłożem,
- chityna (i pochodne) – do uszczelniania syntetycznych protez naczyniowych,
- celuloza modyfikowana chemicznie – nici do zespalania tkanek.

Przykłady zastosowania biomateriałów polimerowych sztucznych [5]:

- silikon – protezy, np. sutka, małych stawów,
- politetrafluoroetylen – protezy naczyniowe i nici chirurgiczne; w połączeniu z włóknami węglowymi jako kompozyt stosowany także do rekonstrukcji kości czaszki oraz szkieletu twarzy,

- poliuretany – części sztucznego serca, protezy naczyń krwionośnych o małym przekroju,
- polietylen – do protezowania ubytków chrząstki i kości w rekonstrukcji twarzy, cewniki, protezy stawów oraz siatki stosowane w dużych przepuklinach,
- politereftalan etylenu – protezy naczyniowe, protezy ścięgien oraz powięzi, nici chirurgiczne,
- poliamidy i polipropylen – nici chirurgiczne, siatki,
- polimetakrylan etylu – części protez dużych stawów, soczewki wewnątrzgałkowe oka.

2.1.3. Biomateriały – tworzywa kompozytowe

Tworzywa kompozytowe, według Rys.2, zostały podzielone na dwie podkategorie: kompozyty C.C. oraz kompozyty metal – ceramika.

Pierwsze z nich są złożone z włókien węglowych oraz osnowy na bazie paku, żywic bądź także węgla pirolitycznego.

Węgiel jest pierwiastkiem, który ma wiele odmian alotropowych. Naturalne formy alotropowe węgla to grafit oraz dużo bardziej cenny, a zarazem rzadszy diament. Ostatnio przedmiotem badań stała się odmiana C_{60} , która znana jest pod nazwą fulleren, oraz tzw. nanorurki, czyli nanostruktury węgla. Dzięki właściwościom fizycznym i chemicznym węgla, ten pierwiastek jest bardzo użyteczny w inżynierii medycznej. Przykładem może być węgiel aktywny, który dzięki bardzo rozbudowanej sieci porów o złożonej architekturze, posiada właściwości sorpcyjne, co przekłada się na wykorzystanie tej cechy do detoksykacji organizmu.

Grupa materiałowa kompozytów węgiel – węgiel posiadają podwyższoną wytrzymałość oraz odporność na pękanie. Proces wytwórczy opiera się poprzez obróbkę cieplną, uformowanych wcześniej kompozytów włókno węglowe – osnowa organiczna. Dzięki temu zabiegowi następuje zamiana osnowy organicznej w węglową, zaś otrzymany produkt poddawany jest zagęszczaniu przy użyciu pirowęgla [4].

Poniżej tabela przedstawia kompozyty węglowe oraz ceramiczne i metaliczne, wraz z właściwościami mechanicznymi materiałów.

Materiał	Gęstość ρ [g/cm ³]	Wytrzymałość na rozciąganie R_m [MPa]	Moduł Yanga E [GPa]	K_{IC} [MPa/m ^{1/2}]
węgiel-węgiel 1D	1,85	1500	200	10+20
węgiel-węgiel 3D	1,5	250	20	10+20
węgiel-żywica epoksydowa 1D	1,56	1400	130	–
węgiel-PEEK	–	208	1,13	–
Al ₂ O ₃ spiekany	3,9	–	380	–
stal austenityczna 316L	7,8	1100	210	60
stop tytanu Ti6Al4V	4,43	950	105	80

Tabela 3. Porównanie wybranych właściwości mechanicznych kompozytów węglowych dla medycyny z biomateriałami metalicznymi i ceramicznymi [4].

Zastosowanie kompozytów C.C. [4]:

- wypełnianie ubytków kostnych oraz chrzęstnych,
- rekonstrukcja więzadła kruczo – obojczykowego,
- leczenie przerwania ścięgna Achillesa,
- nici chirurgiczne,
- rekonstrukcja ubytków ścianek tchawicy.

Kompozyty metal – ceramika tworzone są z myślą o wypełnieniu częścią metaliczną wad samej bioceramiki, opisanych w podpunkcie 2.1.1. Przykładem takiego połączenia może być cermetal, który jest węglikiem spiekany wraz z twardymi cząsteczkami, opartymi na np. tytanie bądź kobaltie.

2.1.4. Biomateriały – metale i ich stopy

Pierwsze potwierdzone w literaturze wykorzystanie implantu metalowego w chirurgii kostnej datuje się na rok 1565, gdy Patronus w swojej pracy opisał fakt przykrycia wady podniebienia złotą płytką. Z kolei wiek XVII – Fabritius wykorzystuje do zszycia ran drut ze złota, brązu i żelaza. W następnym wieku korzystanie ze złotych drutów jako szwów do ran zostało opisane. W roku 1877 srebrne trzpienie zostały użyte przez Listersa do zespolenia kości. 16 lat później po raz pierwszy zauważono wchłanianie metalu przez tkankę, co spowodowało rozwój infekcji. Dopiero w roku 1920 nastąpiła znacząca poprawa biotolerancji implantów, gdyż popularyzowane zostało użytkowanie

stali kwasoodpornych niklowo–chromowych. Od tej pory nastąpiło uważne badanie biozgodności biomateriałów, szczególnie metalicznych [4].

Obecnie biomateriały z metalów i ich stopów można podzielić na cztery zasadnicze grupy: stopy żelaza, stopy z pamięcią kształtu, stopy kobaltowe oraz tytan i jego stopy. Szczegółowy podział jest przedstawiony na Rys.4.



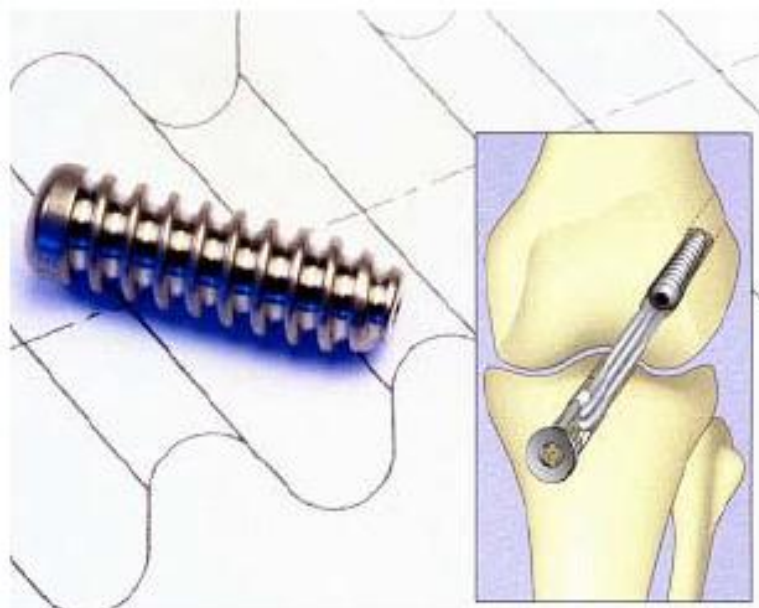
Rys.4. Podział obecnie stosowanych biomateriałów metalicznych [4].

Dobry biomateriał metaliczny powinien charakteryzować się [5]:

- nietoksycznością,
- dobrą odpornością korozyjną,
- odpowiednimi właściwościami mechanicznymi oraz elektrycznymi,
- niewywoływaniem czynników alergicznych,
- odpornością na zużycie cierne,
- możliwym do zaakceptowania kosztem produkcji.



Rys.5. Tytanowa proteza stawu biodrowego wraz z dodatkami ceramicznymi oraz z polietylenu [19].



Rys.6. Wkręt kostny wykonany z tytanu [4].

Materiał	Właściwości mechaniczne			
	wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	wydłużenie A5 [%]	wytrzymałość na zmęczenie [MPa]	moduł sprężystości E [GPa]
Stal nierdzewna odkształcona na zimno	100	9	290	205
Stop odlewniczy Co-Cr-Mo	700	10	250	210
Zmodyfikowany stop odlewniczy Co-Cr-Mo	1000	25	400	210
Spiek z proszków Co-Cr-Mo	1275	14	765	200
Stop Co-Cr-W-Ni do przeróbki plastycznej	1100	15	400	210
Stop Co-Cr-Ni-Mo do przeróbki plastycznej	1000	15	550	210
Stop Co-Cr-Ni-Mo-Fe do przeróbki plastycznej	1200	25	515	210
Stop Co-Ni-Cr-Mo-W-Fe do przeróbki plastycznej	1300	12	–	210
Czysty tytan	380–480	4–28	400	108
Stop Ti-6Al-4V	950	13	500	108
Stop Ti-5Al-2,5Fe	900	12	500	108
Czysty	300–1000	2–40	200–700	190
Czysty	200–500	1–40	150–350	105
Stop Ti-6Al-2Nb-1Ta-0,8Mo	850–960	9,2–12,8	150–1000	120

Tabela 4. Właściwości najważniejszych metalicznych materiałów implantacyjnych [4].

Zastosowanie biomateriałów metalicznych [4,5]:

- stabilizatory zewnętrzne,
- endoprotezy stawu biodrowego, kolanowego, łokciowego,
- stenty,
- klamry z pamięcią kształtu,
- elementy kształtowe do zespołań,
- wkręty stomatologiczne, kostne,
- mechaniczne zastawki serca.

2.2. Właściwości mechaniczne

W pracy zostały zamodelowane oraz zasymulowane wybrane właściwości mechaniczne z zakresu wytrzymałości biomateriałów. Definicje zawarte w tym rozdziale zostały opracowane na podstawie literatury[8,9,10,11,12,13,14,15,20,21,22]:

Statyka – jest to część mechaniki, która zajmuje się badaniem równowagi ciał materialnych.

Kinematyka – jest to część mechaniki, która zajmuje się badaniem geometrii ruchu w czasie, bez uwzględniania czynników wywołujących ten ruch.

Dynamika – jest to część mechaniki, która zajmuje się badaniem zależności między ruchem a przyczynami (siłami) wywołującymi ten ruch.

Sprężystość – polega ona na tym, że ciało po zadziałaniu na nie siłą odkształca się nietrwale. Gdy siła przestaje działać ciało wraca do swojego poprzedniego kształtu.

Odształcenie – jest to zmiana wzajemnych odległości pomiędzy punktami ciała, powstająca w wyniku naprężeń spowodowanych przez rozciąganie, ściskanie, zginanie lub skręcanie ciał. Wyróżnia się: odkształcenie sprężyste, gdy odkształcenie zanika po ustaniu naprężenia oraz odkształcenie plastyczne, gdy zmiany są nieodwracalne.

Ciało, na które działa obciążenie, można podzielić na wiele małych elementów, które doznają małych wartości przemieszczeń, względem dowolnie przyjętego układu odniesienia. Przyjmując założenie, że każdy mały element wcześniej przedstawiony jest kształtu prostopadłościennego, którego krawędzie oznaczymy jako dx , dy , dz , wartość

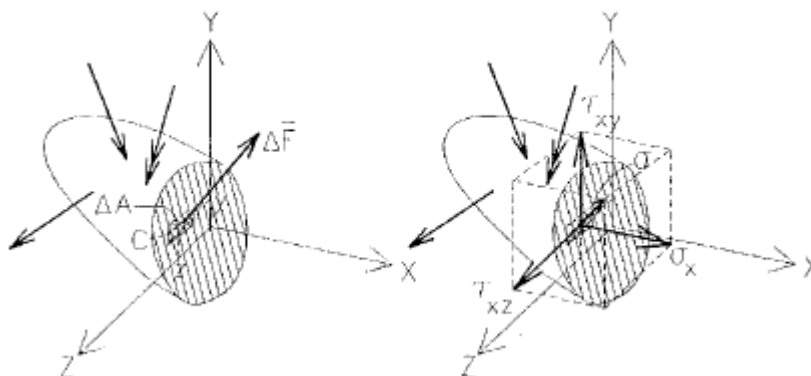
długości każdej krawędzi podczas procesu odkształcenia wynosi odpowiednio $(1+\varepsilon_x)dx$, $(1+\varepsilon_y)dy$, $(1+\varepsilon_z)dz$.

Dzięki określeniu składowych stanu odkształcenia, możemy ustalić tensor odkształcenia ε :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Naprężenie – naprężeniem w punkcie C , który jest przedstawiony na Rys.7., nazywamy wektor, który jest zdefiniowany zależnością podaną we wzorze nr 3,



Rys.7. Definicja naprężenia[13].

$$\bar{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA} \quad (3)$$

gdzie: ΔN - elementarna siła wewnętrzna,
 ΔA - elementarna powierzchnia.

Gdyby myślowo wykonać przekrój elementu opisanego w podpunkcie *odkształcenia* płaszczyznami, które są równoległe do osi układu, to otrzymamy składowe normalne: σ_x , σ_y , σ_z oraz składowe styczne: τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} . Są to składowe tensora naprężenia σ . Opisać to można za pomocą macierzy przedstawionych poniżej.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \frac{\tau_{xy}}{2} & \frac{\tau_{xz}}{2} \\ \frac{\tau_{yx}}{2} & \sigma_y & \frac{\tau_{yz}}{2} \\ \frac{\tau_{zx}}{2} & \frac{\tau_{zy}}{2} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (5)$$

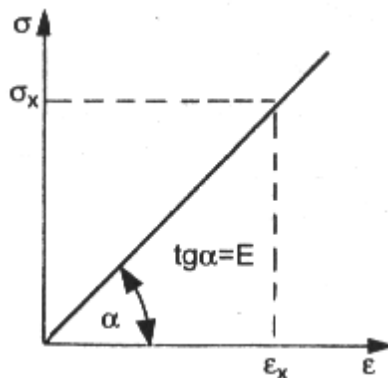
Kryterium maksymalnego naprężenia zredukowanego wg Misesa (von Misesa–Hencky'ego) – znane jest również jako teoria energii ścinania lub teoria maksymalnego zniekształcenia. Na podstawie naprężeń głównych σ_{xx} , σ_{yy} oraz σ_{zz} naprężenie zredukowane wg Misesa jest wyrażane jako:

$$\sigma_{vonMises} = \left(\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2}{2} \right)^{1/2} \quad (6)$$

Teoria stwierdza, że materiał plastyczny zaczyna ustępować w miejscu, gdzie naprężenie zredukowane wg Misesa staje się równe granicy naprężenia.

Płynięcie materiału – jest to proces ciągłego przyrostu odkształcenia materiału przy naprężeniu równym lub przekraczającym granicę plastyczności; nasila się ze wzrostem temperatury i obciążenia.

Prawo Hooke'a – jest to prawo mechaniki, które głosi, że odkształcenie ciała pod wpływem działającej na nie siły jest wprost proporcjonalne do tej siły. Liniowa zależność pomiędzy naprężeniem a odkształceniem – przedstawia Rys.8.



Rys.8. Zależność liniowa pomiędzy naprężeniem i odkształceniem, o którym mówi Prawo Hooke'a. Kąt α będzie jednakowy na całej długości działania prawa Hooke'a. Wyrażenie $\text{tg}\alpha$ jest modulem Younga [17].

Rysunek 8 można zinterpretować za pomocą wzoru:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (7)$$

gdzie: σ – naprężenie normalne w poprzecznym przekroju pręta [MPa],
 E – moduł Younga – współczynnik sprężystości wzdłużnej,
 ε – odkształcenie względne [m].

Współczynnik Poissona – jest to iloraz odkształceń liniowych w kierunku poprzecznym przez odkształcenia liniowe w kierunku równoległym do osi próbki:

$$\nu = \frac{|\varepsilon_{pop}|}{\varepsilon_{rów}} \quad (8)$$

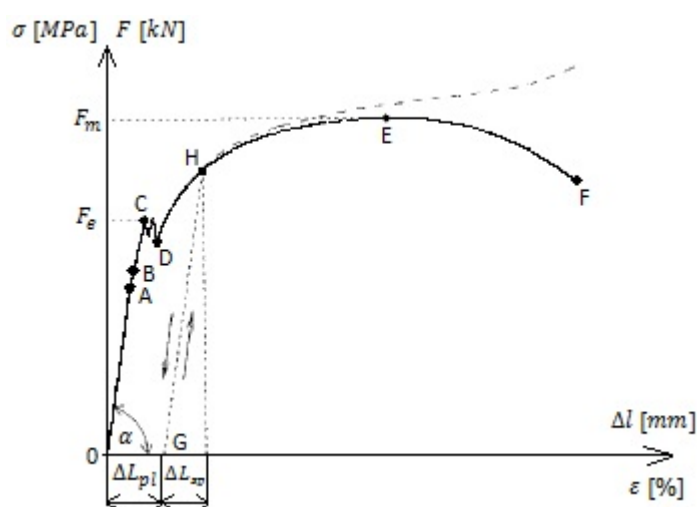
gdzie: ν – współczynnik Poissona,
 ε_{pop} – odkształcenia liniowe w kierunku poprzecznym do próbki,
 $\varepsilon_{rów}$ – odkształcenia liniowe w kierunku równoległym do próbki.

Paskal (jednostka) – jednostka ciśnienia (także naprężenia) w układzie SI (jednostka pochodna układu SI), oznaczana jako Pa. Wyraża się ją jako:

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2} = \frac{1 \text{ kg}}{1 \text{ m} \times \text{s}^2} \quad (9)$$

Moduł Younga (inaczej moduł odkształcalności liniowej albo moduł (współczynnik) sprężystości podłużnej (w układzie jednostek SI)) – wielkość określająca sprężystość materiału. Wyraża ona, charakterystyczną dla danego materiału, zależność względnego odkształcenia liniowego ε materiału od naprężenia σ , jakie w nim występuje w zakresie odkształceń sprężystych.

Stacyczna próba rozciągania – polega ona na rozciąganiu znormalizowanej próbki z określoną, niewielką prędkością oraz obserwowaniu i zarejestrowaniu siły rozciągającej oraz wydłużenia próbki. Przykładowy wykres statycznej próby rozciągania przedstawiono na Rys.8.



Rys.9. Wykres statycznej próby rozciągania [13].

Na rysunku nr 9 przedstawiono wykres przedstawiający zależności naprężenia od odkształcenia w statycznej próbie rozciągania próbki ze stali węglowej. W początkowym stadium rozciągania widać liniową zależność pomiędzy obciążeniem a odkształceniem. Wydłużenia próbki są bardzo małe, zaś po odciążeniu materiał badany wraca do swojej początkowej długości. Dopóki występuje taka zależność, to jest to zakres odkształceń sprężystych. Dla tej części rozciągania obowiązuje prawo Hooke'a.

Litera A oznacza zakres ważności działania prawa Hooke'a. Po dalszym wzroście obciążenia można zauważyć niewielkie zakrzywienie wykresu – do punktu B, które oznacza koniec odkształceń sprężystych – w tym momencie zachodzą nieodwracalne odkształcenia plastyczne.

Punkt *C* przedstawia miejsce, w którym mimo malejącej wartości siły rozciągającej, rośnie odkształcenie próbki, czyli przyrost wydłużenia. Takowe zjawisko określane jest jako płynięcie materiału.

Przy dalszym wzroście obciążenia następuje charakterystyczne umocnienie materiału, któremu towarzyszą wydłużenia o charakterze plastycznym. Przy osiągnięciu maksymalnego obciążenia towarzyszy pojawienie się tzw. szyjki, czyli wyraźnego przewężenia w próbce. Pojawienie się szyjki wyraźnie zmniejsza pole powierzchni przekroju próbki, więc następuje zmniejszenie siły rozciągającej oraz zerwanie próbki. Jednocześnie zmniejszenie siły rozciągającej jest tylko pozorne, ponieważ jest ono wolniejsze od przewężania się próbki - stąd rzeczywiste naprężenia w szyjce wzrastają.

Do momentu pojawienia się odkształceń plastycznych w próbce występuje jednorodny jednoosiowy rozkład naprężeń – gdy przekroczymy granicę plastyczności, to rozkład naprężeń jest bardziej złożony. Linia przerywana pokazuje rzeczywiste naprężenia w próbce.

Przerywanie wzrostu obciążenia i powolne odciążanie próbki (np. w punkcie *H*) jest przedstawione na wykresie za pomocą linii *HG*, równoległej do linii *OA*. Na osi poziomej można zauważyć trwały przyrost długości próbki ΔL_{pl} , natomiast ΔL_{sp} zanika. W punkcie *H* wydłużenie próbki jest sumą odkształcenia sprężystego i plastycznego.

Granica sprężystości - jest to wartość naprężenia, po przekroczeniu której w badanej próbce następują odwracalne zmiany kształtu, czyli odkształcenia sprężyste. Oznaczono to jako punkt *B* na *Rys.9.*

Granica plastyczności – jest to wartość naprężenia, po przekroczeniu której w badanej próbce następują nieodwracalne zmiany kształtu, czyli odkształcenia plastyczne. Oznaczono to jako punkt F_e na *Rys.9.*

Wytrzymałość na rozciąganie – maksymalne naprężenie obciążające próbkę, które występuje w punkcie *E* na *Rys.9.* oraz jest oznaczone jako F_m .

Wytrzymałość na ściskanie – maksymalne naprężenie, jakie materiał może wytrzymać w warunkach działania obciążenia zgniatającego.

Współczynnik sprężystości – stała określająca wielkość odkształcenia w odpowiedzi na siły działające na ciała sprężyste.

Rezonans – zjawisko występujące dla drgań wymuszonych, które objawiają się wzrostem amplitudy drgań układu przy określonych częstotliwościach drgań wymuszających. Jest to uwarunkowane wystąpieniem siły zewnętrznej okresowo zmiennej, której charakterystyka jest sinusoidą. Tą siłą nazywamy siłą wymuszającą.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z małymi wartościami naprężeń oraz z zależnością liniowości opisaną wykresem z Rys.8., otrzymujemy następujące równania ruchu:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}. \quad (10)$$

Gdyby pod uwagę wziąć trójosiowy stan naprężenia, to równania ruchu przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= F_x. \\ \rho_s \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= F_y. \\ \rho_s \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= F_z. \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie wartości u_1, u_2, u_3 to przemieszczenia w trzech kierunkach.

Materiały izotropowe mogą zostać opisane parametrami μ oraz λ , czyli tak zwanymi stałymi Lamégo. Zostało to wprowadzone w celu uproszczenia zapisu prawa Hooke'a. Zależności pomiędzy stałymi Lamégo:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (12)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Zatem równanie można uprościć do poniższej postaci:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

gdzie: \mathbf{I} – macierz jednostkowa,
 $\boldsymbol{\varepsilon}$ – tensor przemieszczenia.

Równanie Naviera – całkowitą energię potencjalną układu, po uprzednim wyrażeniu potencjalnej energii odkształcenia przemieszczenia, można zapisać w następujący sposób:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F} \quad (14)$$

Macierz sztywności – jest to macierz wyróżniająca siły przemieszczenia. Można opisać ją za pomocą wzoru (15):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

gdzie: $\boldsymbol{\sigma}$ – tensor naprężeń,
 \mathbf{D} – macierz sprężystości,
 $\boldsymbol{\varepsilon}$ – tensor małych odkształceń.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (16)$$

W programie COMSOL opisane wcześniej równanie Naviera pozwala wyznaczyć przemieszczenia w modelowym materiale. Wykorzystywana jest macierz sprężystości \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Macierz \mathbf{D} jest związkiem pomiędzy odkształceniem a naprężeniem. Macierz \mathbf{D}^{-1} , czyli macierz elastyczności, jest związkiem pomiędzy naprężeniem a odkształceniem.

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Macierz \mathbf{D} oraz \mathbf{D}^{-1} służą do określania stałych materiałowych. Dla poszczególnych materiałów wynoszą odpowiednio:

- materiał izotropowy – 2 stałe materiałowe,
- materiał ortotropowy – 9 stałych materiałowych,
- materiał anizotropowy – 21 stałych materiałowych.

Korzystając z wcześniej wyprowadzonych wzorów nr (2), (5), (15) oraz (13), (17) możemy wyprowadzić ostateczne równanie ruchu, które jest w postaci:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\mathbf{c} \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (19)$$

gdzie: \mathbf{c} – flux matrix.

Macierz \mathbf{c} jest wyrażona za pomocą wzoru (20):

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{14} & D_{16} \\ D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{16} & D_{44} & D_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{14} & D_{12} & D_{15} \\ D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{46} & D_{26} & D_{56} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{16} & D_{15} & D_{13} \\ D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{60} & D_{56} & D_{36} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{12} & D_{24} & D_{26} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{24} & D_{22} & D_{25} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{26} & D_{25} & D_{23} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_{16} & D_{46} & D_{66} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \\ D_{13} & D_{34} & D_{36} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{46} & D_{26} & D_{56} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \\ D_{34} & D_{23} & D_{35} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{66} & D_{56} & D_{36} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \\ D_{36} & D_{35} & D_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Po wymnożeniu \mathbf{c} przez tensor $\nabla \mathbf{u}$ otrzymujemy:

$$c\nabla u = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{14} & D_{16} \\ D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{16} & D_{44} & D_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{14} & D_{12} & D_{15} \\ D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{46} & D_{26} & D_{56} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{16} & D_{15} & D_{13} \\ D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{60} & D_{56} & D_{36} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{12} & D_{24} & D_{26} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{24} & D_{22} & D_{25} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{26} & D_{25} & D_{23} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_{16} & D_{46} & D_{66} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \\ D_{13} & D_{34} & D_{36} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{46} & D_{26} & D_{56} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \\ D_{34} & D_{23} & D_{35} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{66} & D_{56} & D_{36} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \\ D_{36} & D_{35} & D_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \\ \nabla u_3 \end{bmatrix} =$$

(21)

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{14} & D_{16} \\ D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{16} & D_{44} & D_{66} \end{bmatrix} \nabla u_1 + \begin{bmatrix} D_{14} & D_{12} & D_{15} \\ D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{46} & D_{26} & D_{56} \end{bmatrix} \nabla u_2 + \begin{bmatrix} D_{16} & D_{15} & D_{13} \\ D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{60} & D_{56} & D_{36} \end{bmatrix} \nabla u_3 \\ \begin{bmatrix} D_{14} & D_{44} & D_{46} \\ D_{12} & D_{24} & D_{26} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \end{bmatrix} \nabla u_1 + \begin{bmatrix} D_{44} & D_{24} & D_{45} \\ D_{24} & D_{22} & D_{25} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \end{bmatrix} \nabla u_2 + \begin{bmatrix} D_{46} & D_{45} & D_{34} \\ D_{26} & D_{25} & D_{23} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \end{bmatrix} \nabla u_3 \\ \begin{bmatrix} D_{16} & D_{46} & D_{66} \\ D_{15} & D_{45} & D_{56} \\ D_{13} & D_{34} & D_{36} \end{bmatrix} \nabla u_1 + \begin{bmatrix} D_{46} & D_{26} & D_{56} \\ D_{45} & D_{25} & D_{55} \\ D_{34} & D_{23} & D_{35} \end{bmatrix} \nabla u_2 + \begin{bmatrix} D_{66} & D_{56} & D_{36} \\ D_{56} & D_{55} & D_{35} \\ D_{36} & D_{35} & D_{33} \end{bmatrix} \nabla u_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \alpha$$

gdzie składową α_{11} należy wyliczyć w następujący sposób:

$$\alpha_{11} = D_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + D_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + D_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + D_{14} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + D_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + D_{15} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + D_{16} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + D_{15} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + D_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

(22)

Resztę składowych α obliczamy w podobny sposób.

Gdy wymnożymy macierz α przez ∇ (operator nabra), to otrzymamy wzór (23):

$$\alpha \cdot \nabla = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \\ \nabla \cdot \\ \nabla \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (23)$$

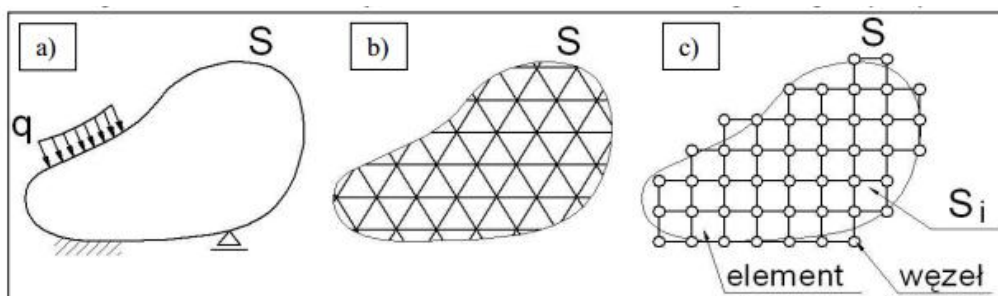
2.3. Metoda Elementów Skończonych (MES)

Metoda Elementów Skończonych (MES), na dzień dzisiejszy, jest jedną z głównych i zarazem podstawowych metod obsługi komputerowo wspomaganých obliczeń inżynierskich [20].

Szacuje się, że początki istnienia tej metody obliczeniowej datuje się na lata pięćdziesiąte XX wieku, choć już w XIX wieku (1868 r.) praca Kirscha sugeruje rozłożenie trójwymiarowego ustroju zbiorem prostopadłościennych elementów, zaś następnie zastąpienie każdego z tych elementów przestrzenną kratownicą. Jednakże dopiero rozwój cyfryzacji pozwolił na rozkwit MES.

Obecnie, w większości przedsiębiorstw, nie ma możliwości rozpoczęcia produkcji bez wcześniejszej analizy MES. Pomaga ona zoptymalizować wymiary, wagę oraz dobrać najkorzystniejszy materiał oraz spełnić ściśle określone wymagania konstruktorskie, które dopuszczają badany element do użytkowania [13,16,23].

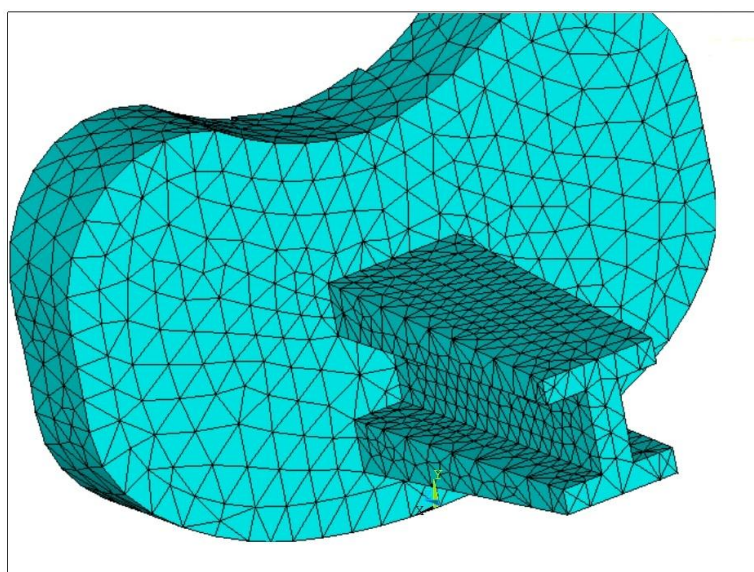
Metoda elementów skończonych polega na dyskretyzacji układów geometrycznych ciągłych. Znaczy to, że badany element metodą MES zostaje podzielony na skończoną liczbę podobszarów.



Rys.10. Dyskretyzacja układu ciągłego, czyli transformacja obiektu w siatkę (zbiór) złożoną z elementów skończonych. a) model geometryczny ciągły, b) model dyskretny idealny, c) model dyskretny obliczeniowy [23].

Praktycznie rzecz ujmując, współczesne aplikacje inżynierskie wykorzystujące MES opierają się na trzech modułach [16,23]:

- a) preprocessor: – służy do importu bądź przygotowania geometrii, doboru rodzaju elementów skończonych, dyskretyzacji układu oraz założenia warunków brzegowych,
- b) solver – moduł, którego przeznaczeniem jest budowa oraz rozwiązywanie układu równań, na podstawie których uzyskuje się szukane przez nas wartości wielkości fizycznych,
- c) postprocessor – jest to moduł, który służy do prezentacji oraz wspomagania interpretacji wyników uzyskanych we wcześniejszym module.



Rys.11. Model MES – część piszczelowa endoprotezy stawu kolanowego [24].

2.4. Program COMSOL Multiphysics

Pakiet symulacyjny COMSOL Multiphysics służy do rozwiązywania układów nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, przy wykorzystaniu MES w dowolnie wybranym przez siebie wymiarze (1D, 2D, 3D).

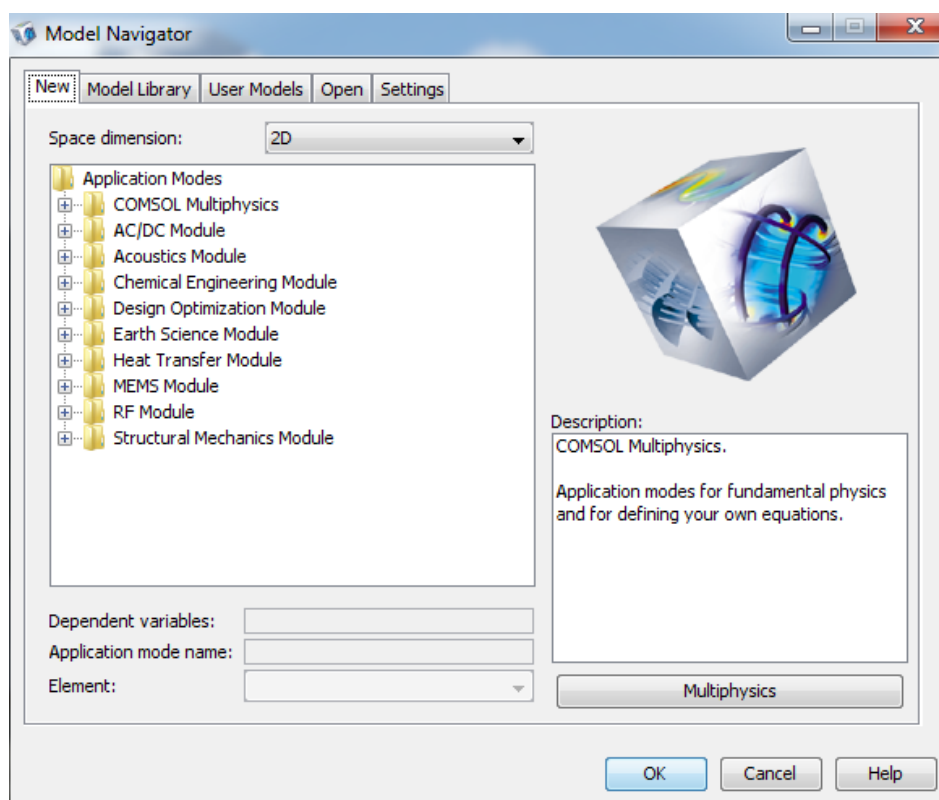
Zaletą tego programu jest elastyczność oraz posiadanie cech, które pozwolą użytkownikowi zarówno zaawansowanemu jak i początkującemu obsłużyć tego programu, bez konieczności znajomości innych programów inżynierskich.

Można powiedzieć, że ten program jest w miarę intuicyjny, gdyż graficzny interfejs użytkownika pozwala na szybkie i sprawne tworzenie modeli oraz wizualizację wyników.

Modelowanie i symulacja właściwości mechanicznych biomateriałów

COMSOL Multiphysics pozwala na symulację i analizowanie bardzo złożonych zjawisk zachodzących w modelowanym układzie. Jest stosowany w różnych branżach, takich jak np. mechanika, elektrotechnika, informatyka, sterowanie, geofizyka, inżynieria chemiczna.

Przy otwieraniu programu wyświetla się okno, które pozwala nam wybrać wymiar, w którym będzie przeprowadzana analiza, oraz jeden z dziewięciu podstawowych modułów, na której opiera się ta praca[22].

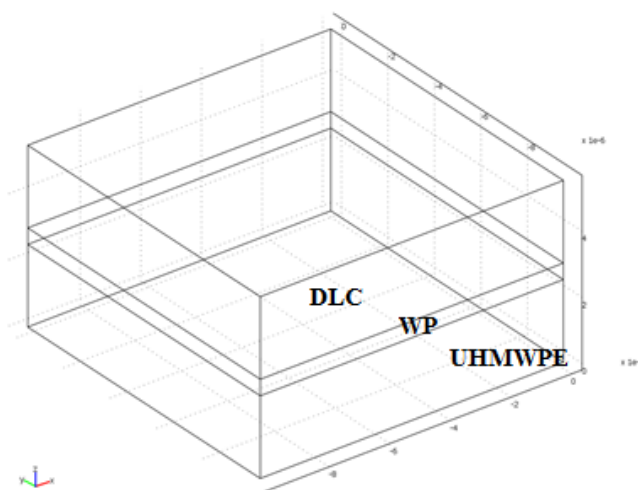


Rys.12. Główne okno COMSOL Multiphysics.

3. OPIS PROBLEMU

3.1. Wstęp

Przedmiotem badań opisanych w tej pracy jest model próbki materiału kompozytowego, będącego powłoką ochronną, który można użyć jako wzmocnienie powierzchni par ciernych endoprotezy stawu biodrowego, czyli panewki oraz głowy elementu. Całość modelu komputerowego składa się z trzech połączonych ze sobą prostopadłościanów, które stanowią osobną warstwę materiałową, tworząc razem kompozyt.



Rys.13. Model geometryczny próbki używanej do badań.

Przyjęto, że początkowe wymiary próbki są w skali mikro, ze względu na odzwierciedlenie wymiarów powłoki na rzeczywistym elemencie.

Wymiary próbki zostały opisane w Tabeli 5.

Warstwa	Materiał	Długość [μm]	Szerokość [μm]	Wysokość [μm]
Warstwa dolna	UHMWPE	10	10	2,5
Warstwa środkowa	WP	10	10	0,5
Warstwa górna	DLC	10	10	2,5

Tabela 5. Przedstawienie wymiarów geometrycznych badanej próbki.

Materiały użyte w pracy to:

- UHMWPE: rozwinięcie skrótu: *Ultra-high molecular weight PE*, czyli polietylen bardzo wysokomolekularny,
- WP: warstwa pośrednia,
- DLC: rozwinięcie skrótu: *Diamentic Like Carbon*, czyli diamentopodobna powłoka węglowa.

Symulacje opierają się na badaniu mechanicznych właściwości działających na zamodelowaną próbkę. W ramach badań statycznych zbadane zostaną naprężenia i odkształcenia panujące w modelu oraz wartości drgań rezonansowych w badaniu dynamicznym.

3.2. Opis przeprowadzonych badań oraz warunki brzegowe

Każda z trzech warstw modelu wykonana jest z innego materiału. Dane materiałowe zostały przedstawione w *Tabeli 6*.

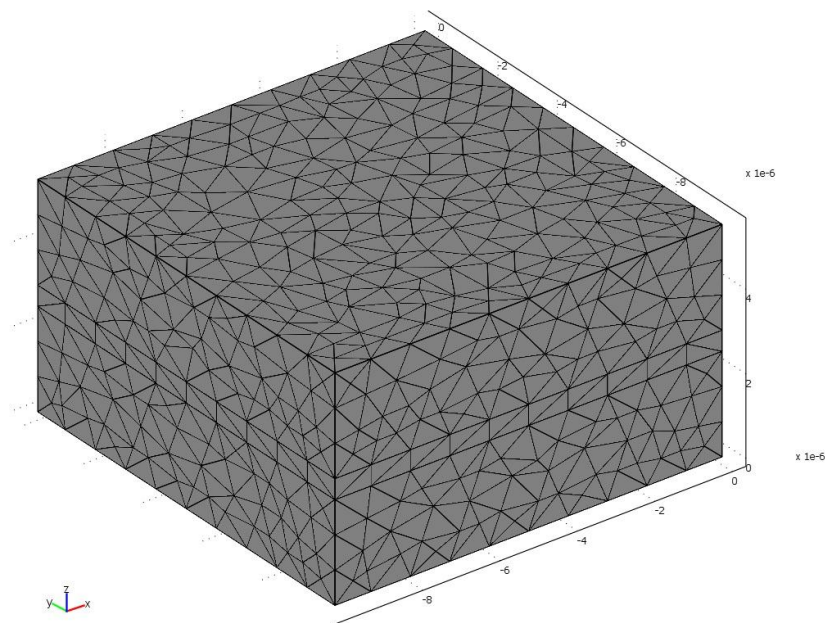
Materiał	E [GPa]	ν	P [kg/m ³]
DLC	210	0,15	3500
WP	90	0,35	4500
UHMWPE	1,24	0,40	920

Tabela 6. Charakterystyki materiałowe [17].

W pierwszej kolejności zostały ustawione warunki brzegowe. Przedstawienie parametrów znajduje się na początku każdego badania.

Kolejnym krokiem jest wykonanie dyskretyzacji modelu, czyli utworzenie siatki MES. W naszym przypadku siatka składa się z 10139 elementów. Zastosowana funkcja kształtu elementów skończonych to czworościan w postaci ostrosłupa.

Rysunek numer 14 prezentuje model po dyskretyzacji.



Rys.14. Zastosowana siatka.

3.3. Wyniki przeprowadzonych symulacji

3.3.1. Analiza przemieszczeń i naprężeń – obciążona warstwa DLC, wariant 1

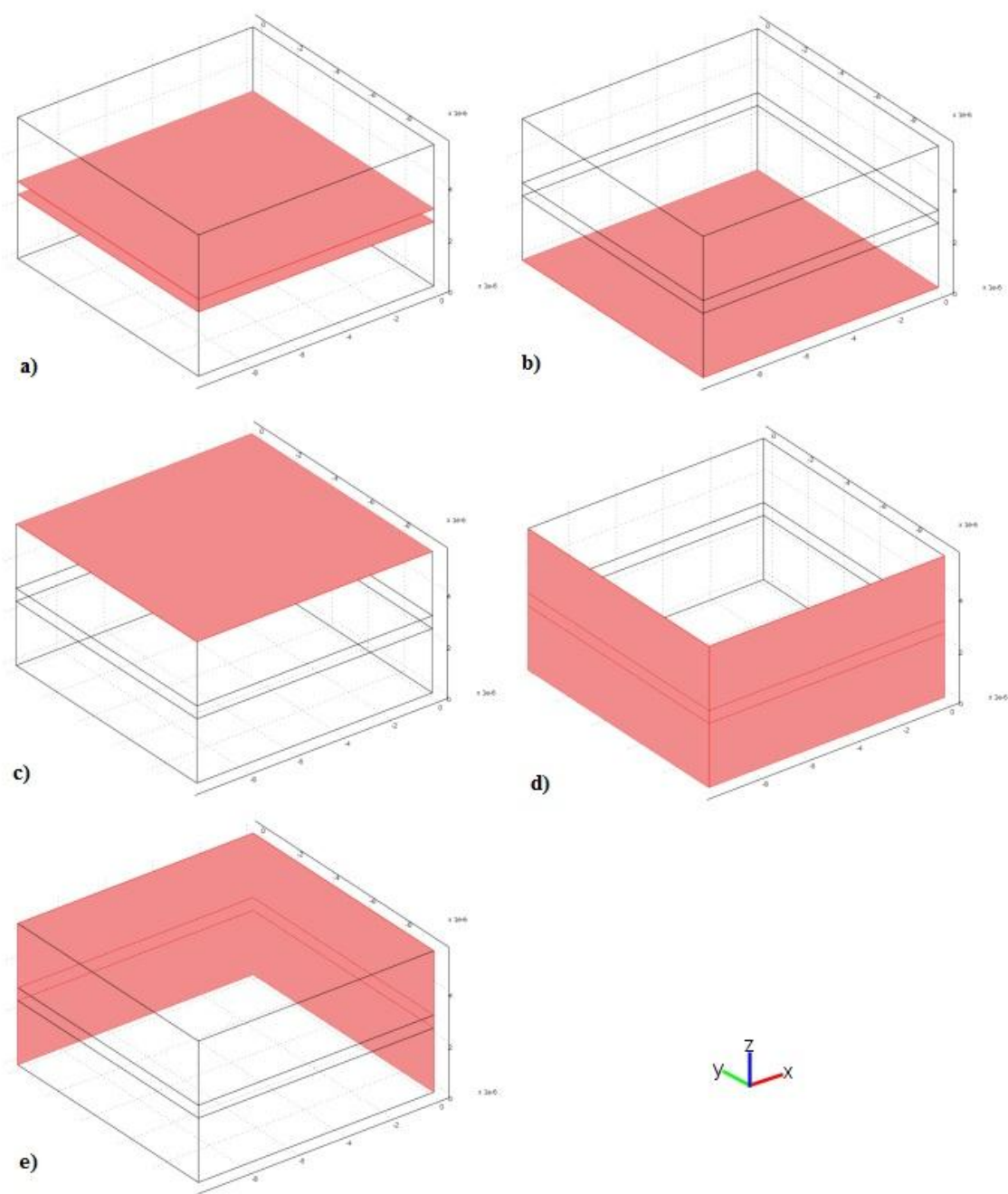
Pierwszą przeprowadzoną symulacją było statyczne obciążenie próbki, w celu zamodelowania przemieszczeń oraz naprężeń zredukowanych von Misesa. W tym wariantcie zastosowano obciążenie górnej ściany z Rys.15c) siłą $F_z = -10e6$ [N/m²].

Rysunek 15 przedstawia zastosowane warunki brzegowe dla tego modelu. Opis poszczególnych grup znajduje się pod podpisem Rys.15.

Po wykonaniu symulacji przemieszczenie maksymalne wyniosło 6,479 [nm]. W stosunku do wymiaru poprzecznego $a = 10$ [μm], skala przemieszczenia maksymalnego to $\Delta l_{\max} = 0,06479$ %.

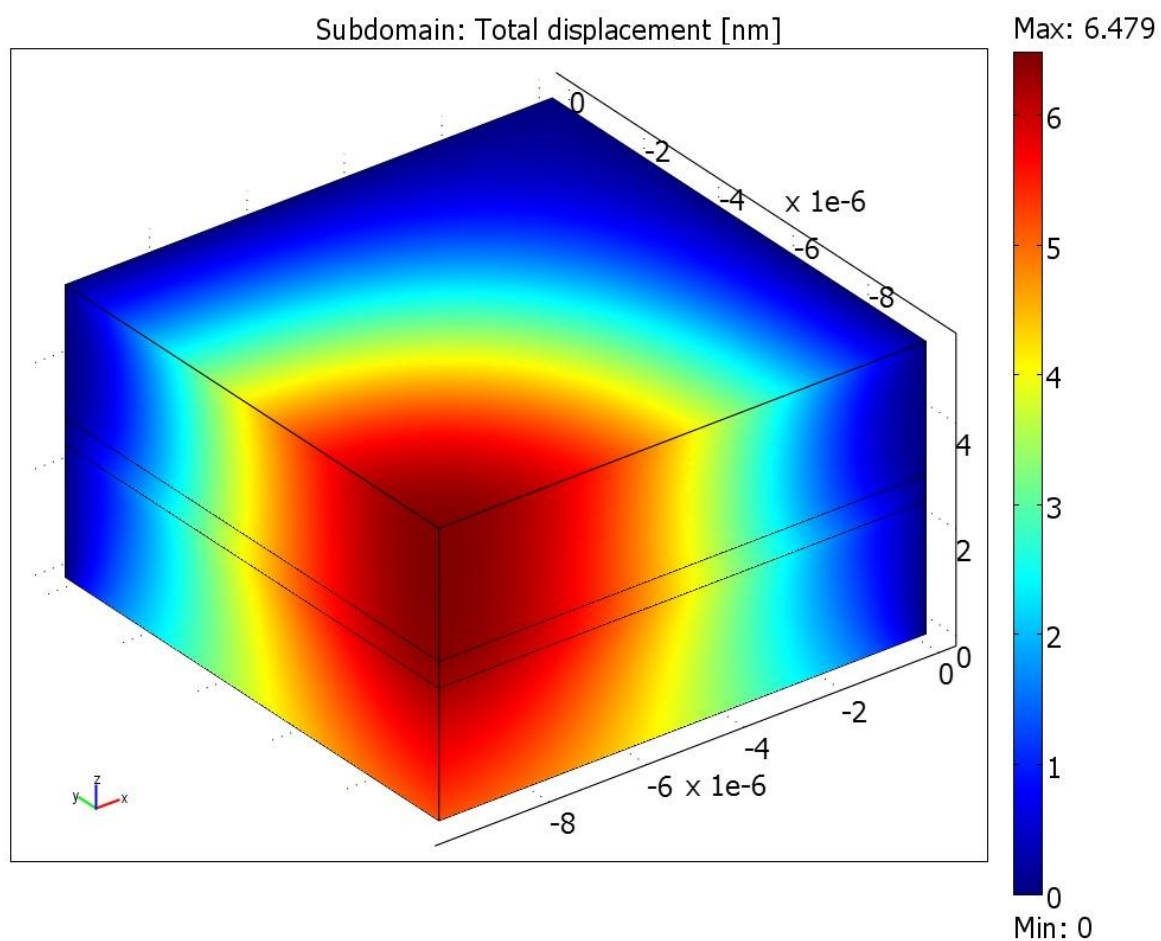
Największe wartości przemieszczeń występują na przeciwległym krańcu styku dwóch utwierdzonych płaszczyzn. Od odległości około 4 [μm] do 10 [μm] od krawędzi utwierdzonej zależność jest zbliżona do liniowej, co przedstawia wykres na Rys.18.

W celu przedstawienia zależności przemieszczenia względem odległości punktu badanego od początku ściany utwierdzonej, wykres opiera się na wartościach przemieszczeń wyliczonych dla krawędzi zaznaczonej na Rys.17.

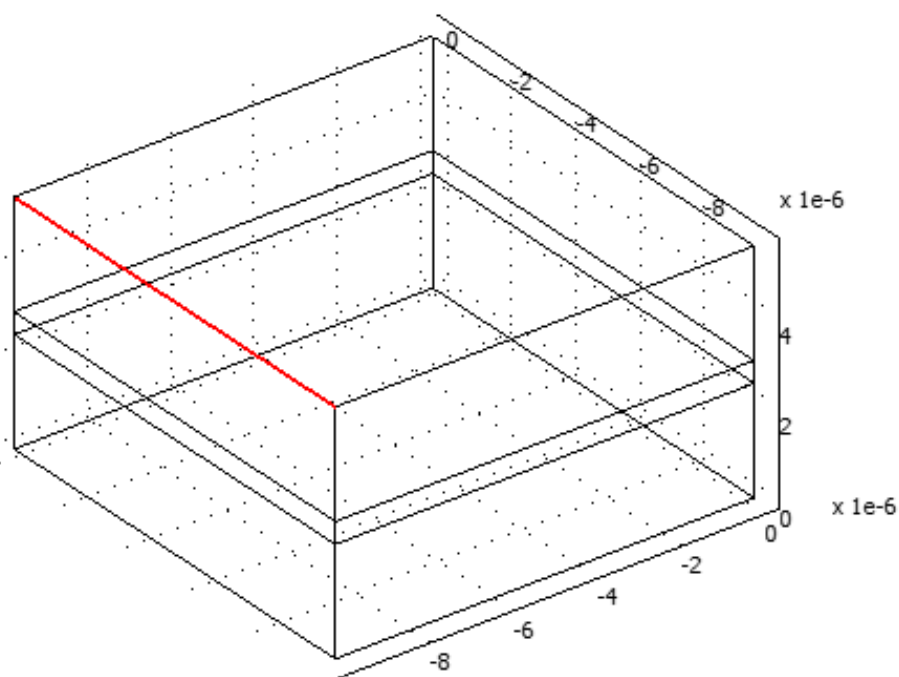


Rys.15. Pogrupowane ściany na określone warunki brzegowe.

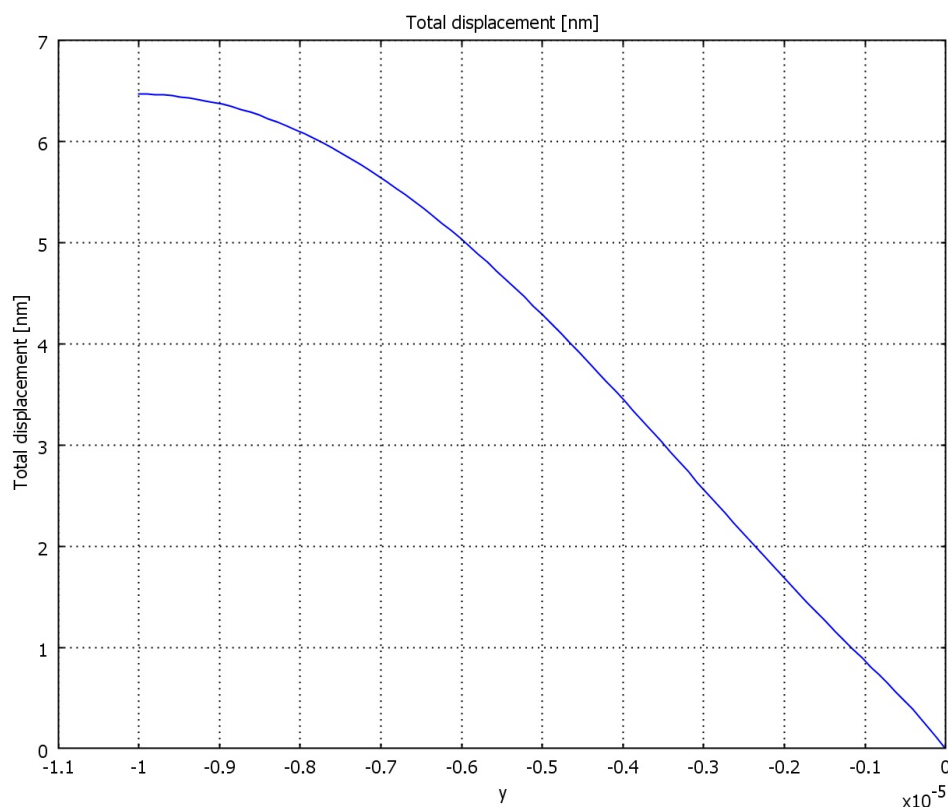
- Grupa „a)” zawiera ściany nie biorące udziału w ustalaniu warunków brzegowych.
- Podpunkt „b)” to ściana dolna (UHMWPE), która została ustawiona jako „wolna” w opcji „warunki ograniczające”.
- Rys. 15c) przedstawia taką samą sytuację, tyle że dla ściany górnej (DLC).
- Grupa „d)” to ściany, na które działają siły ukierunkowane symetrycznie względem płaszczyzny symetrii.
- Podpunkt „e)” to ściany, które zostały utwierdzone.



Rys. 16. Przemieszczenia w modelu. Wartość maksymalna: 6,479 [nm]

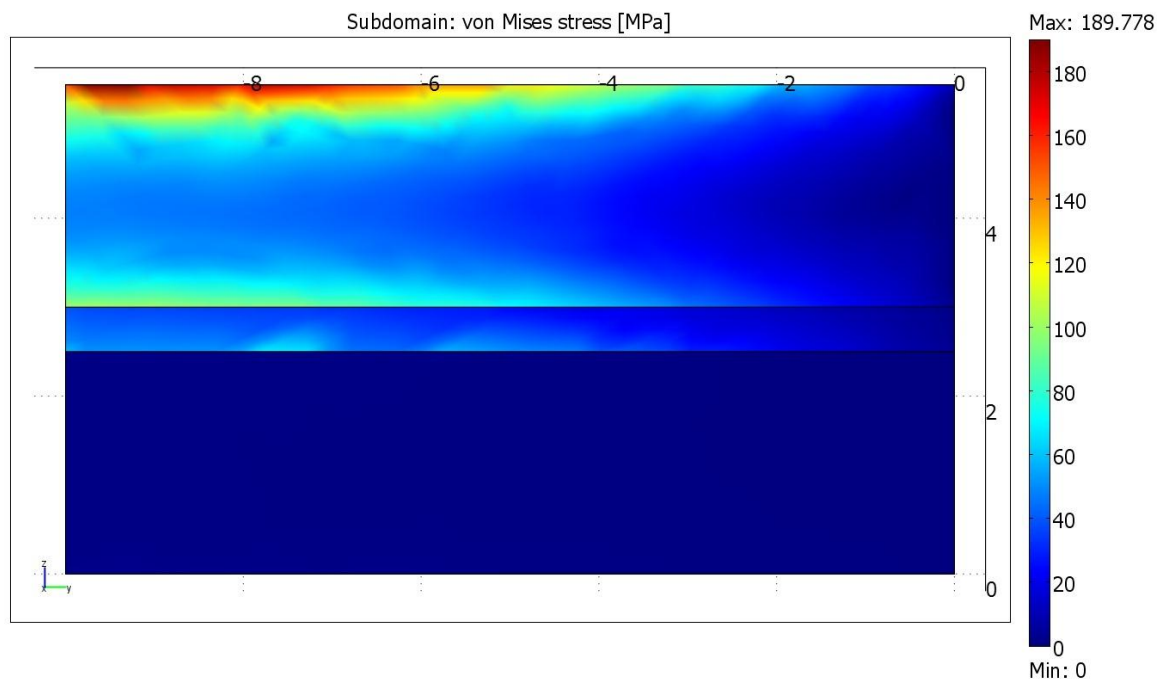


Rys. 17. Krawędź badana.

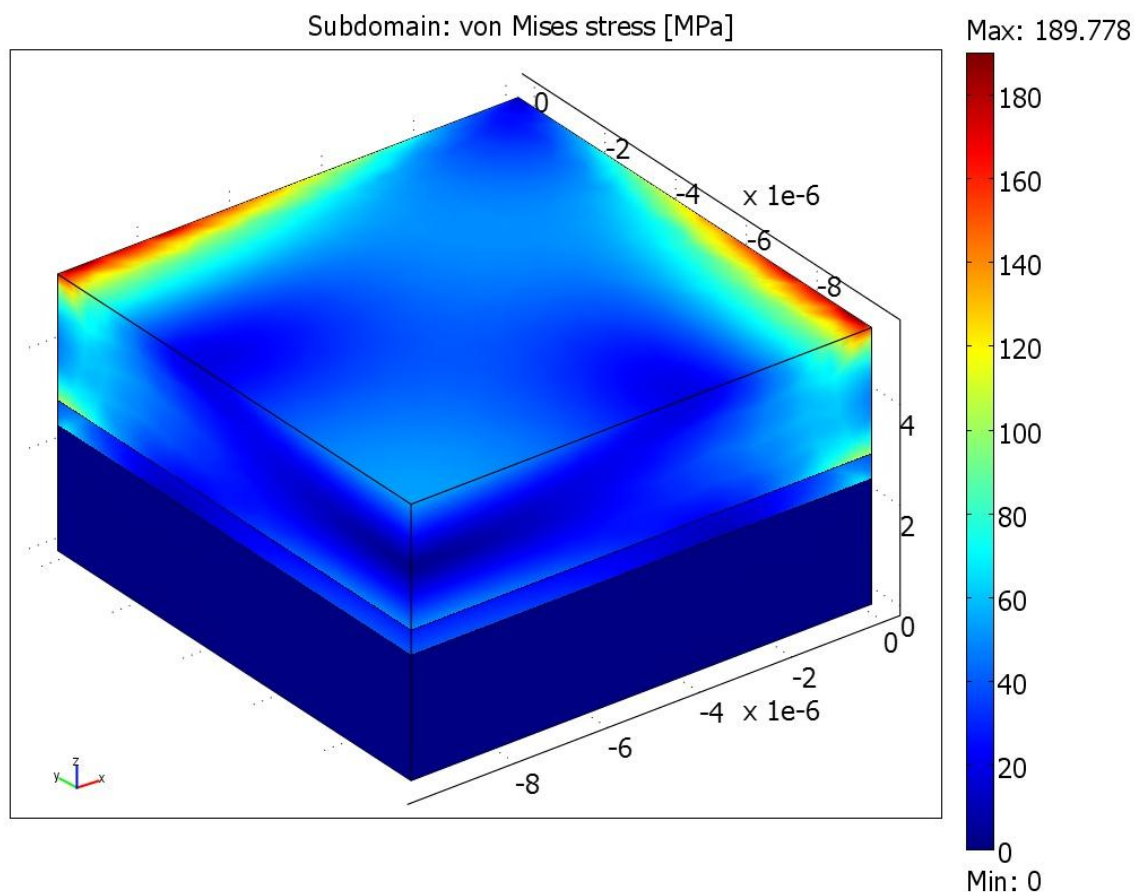


Rys.18. Zależność przemieszczenia [nm] od długości łuku prostokątnianu. $\Delta l_{max} = 6,479$ [nm].

Kolejnym badaniem było wyznaczenie miejsc maksymalnych naprężeń występujących w naszym modelu oraz ich wartości.



Rys.19. Naprężenia zredukowane von Mises, płaszczyzna YZ.



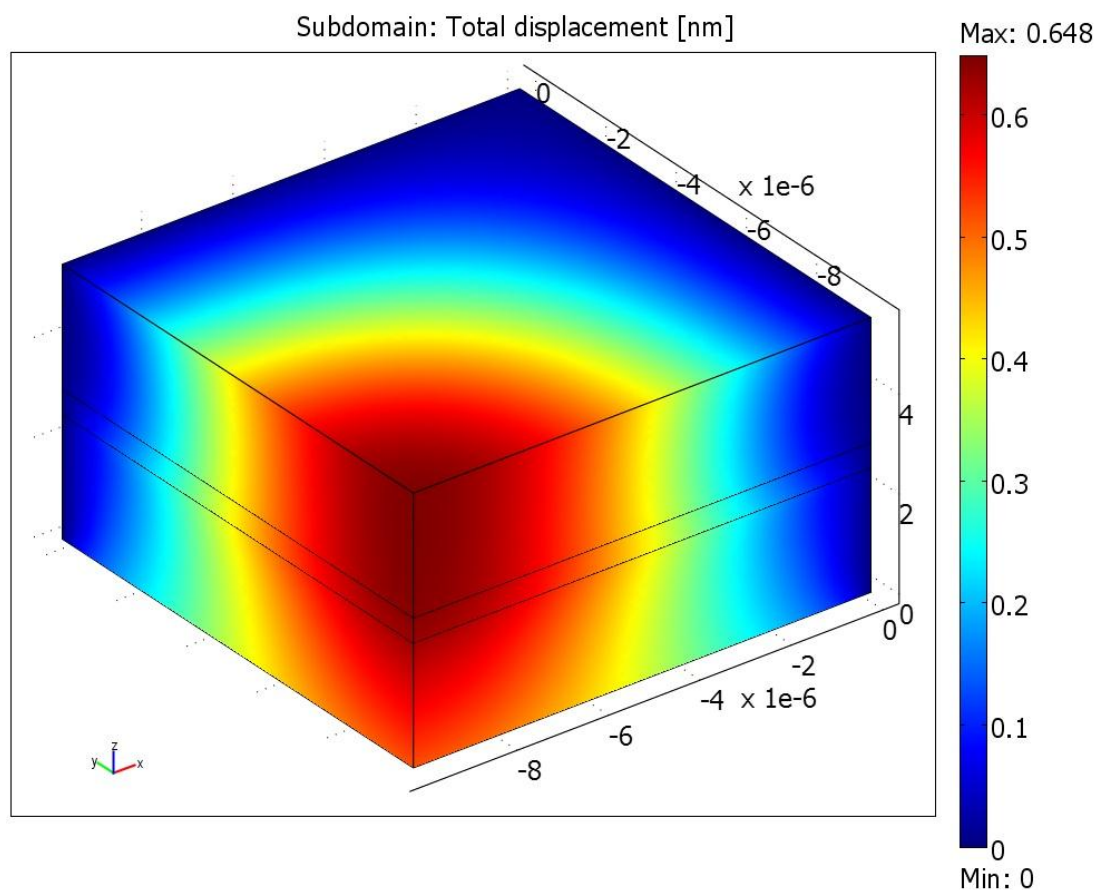
Rys.20. Naprężenia zredukowane von Mises. Wartość maksymalna: 189,778 [MPa].

Zauważalny jest fakt, że w miejscach, gdzie występują najwyższe wartości naprężeń, wartości przemieszczeń, w porównaniu do wartości maksymalnych, są znikome i oscylują wokół zerowej wartości.

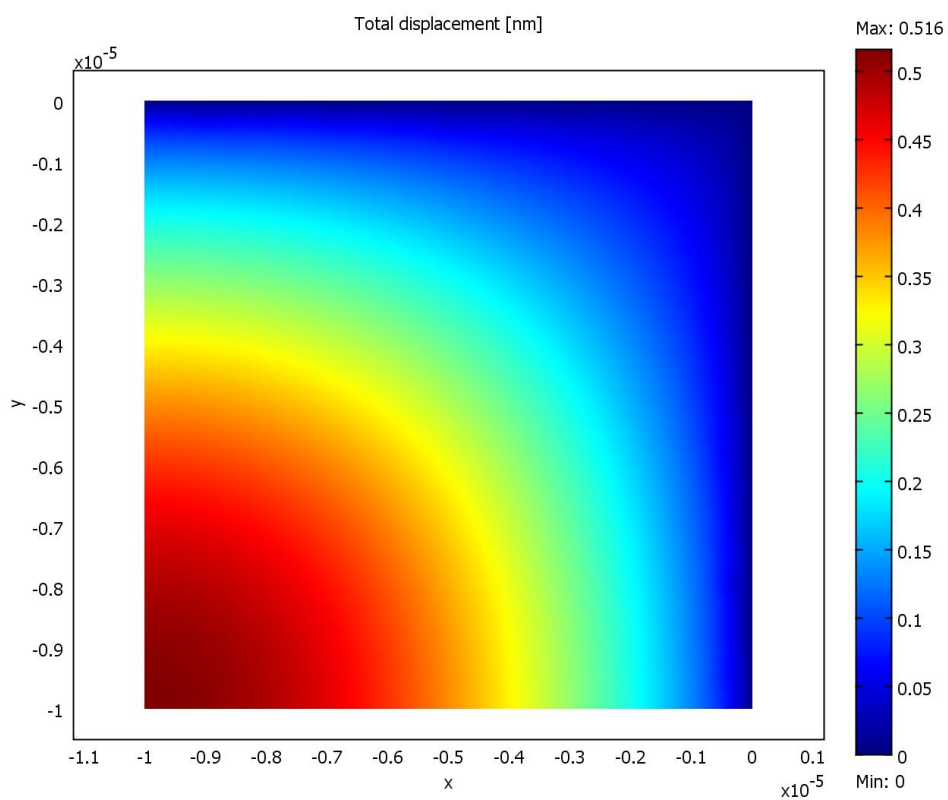
3.3.2. Analiza przemieszczeń i naprężeń – obciążona warstwa DLC, wariant 2

W drugim przypadku zamieniona została wartość siły F_z . Siłę zmniejszamy 10-krotnie, do wartości $F_z = -10e5$ [N/m²].

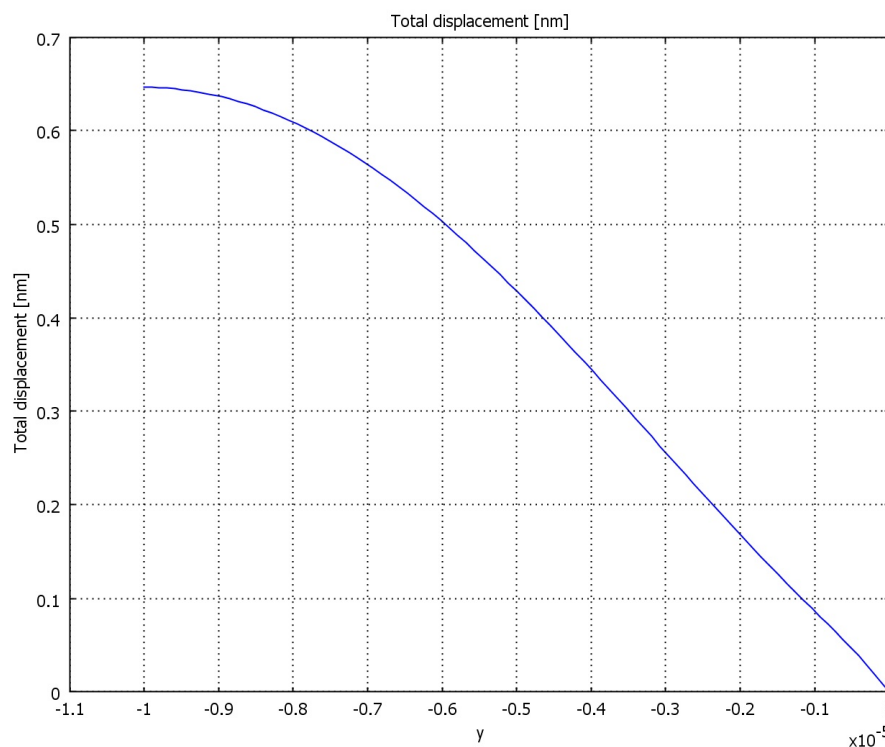
W wyniku zmniejszenia obciążenia pionowego działającego na górną ścianę modelu zmniejszyły się również wartości maksymalnego przemieszczenia oraz naprężenia. Jednakże wszystkie te wartości zmniejszyły się proporcjonalnie względem siebie o taką samą krotność, o jaką zmieniliśmy parametr F_z . Wynika to z faktu działania prawa Hooke'a, które głosi, iż odkształcenie ciała pod wpływem działającej na nie siły jest wprost proporcjonalne do tej siły.



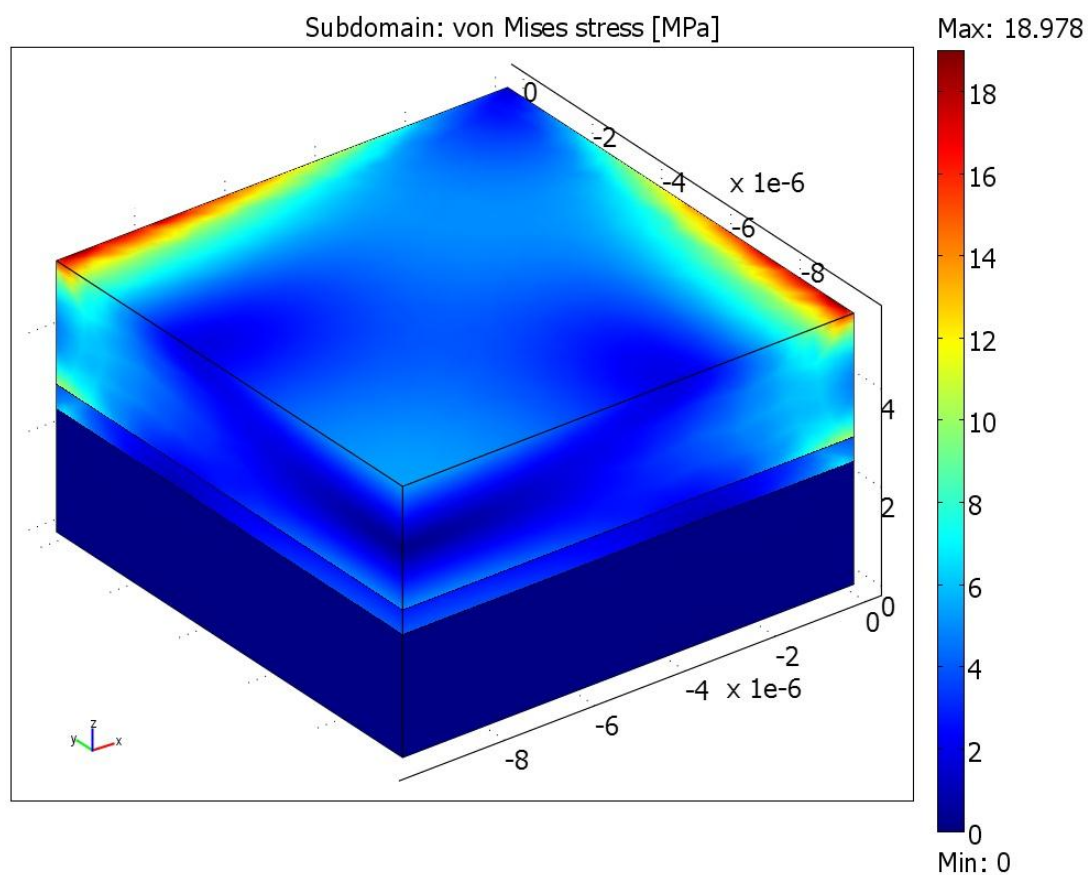
Rys.21. Przemieszczenia w modelu. Wartość maksymalna: 0,6478 [nm]



Rys.22. Rozkład przemieszczeń na ścianie dolnej. Płaszczyzna XY



Rys.23. Zależność przemieszczenia [nm] od długości łuku prostokądnianu. Krawędź badana identyczna jak w wariancie 1. $\Delta l_{max} = 0,6478$ [nm].



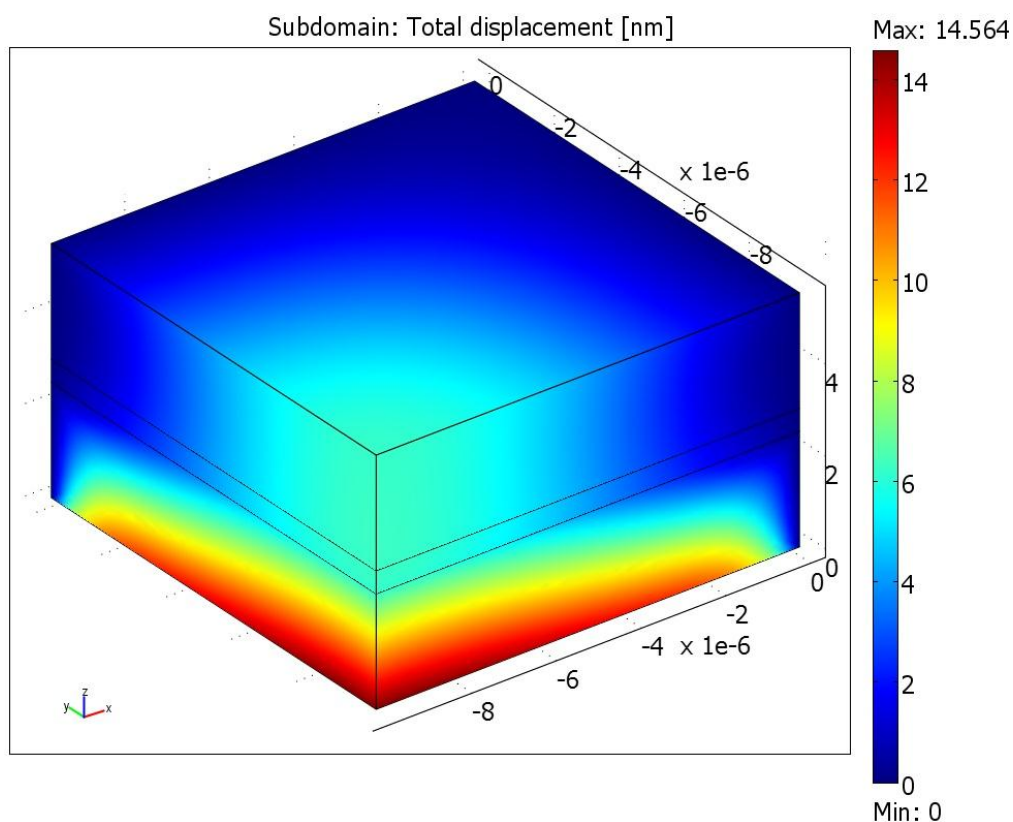
Rys.24. Naprężenia zredukowane von Mises. Wartość maksymalna: 18,978 [MPa].

3.3.3. Analiza przemieszczeń i naprężeń – obciążona warstwa UHMWPE

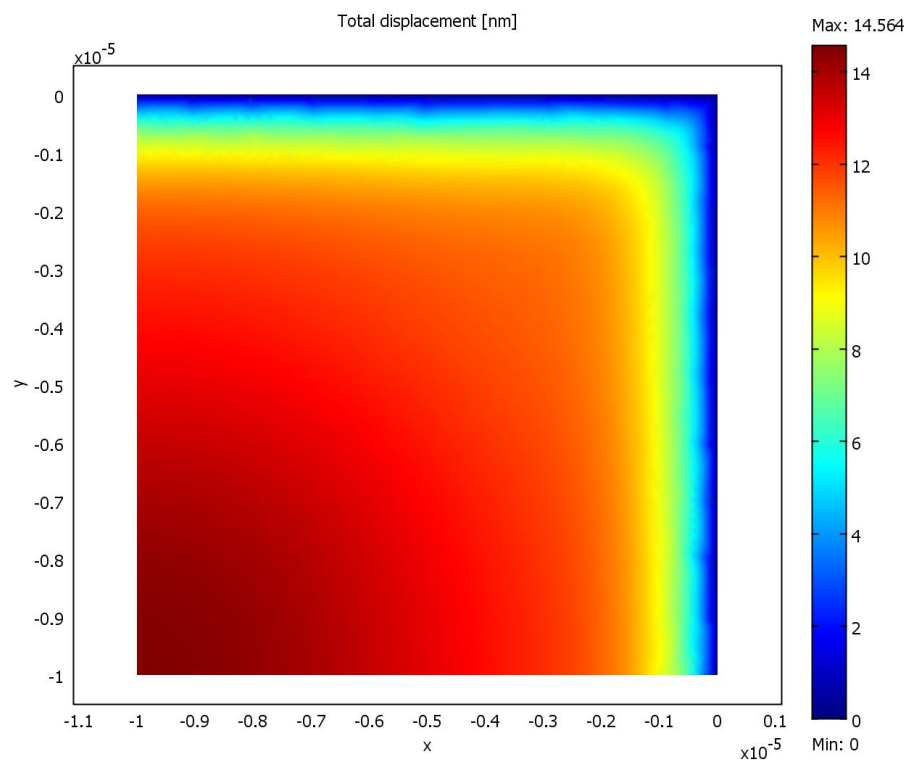
W tym podpunkcie przedstawiona jest sytuacja polegająca na zginaniu modelu, gdy obciążeniu pionowemu została poddana ściana dolna układu, przedstawiona na *Rys.15b*). Siła działająca na układ wynosi $F_z = 10e6$ [N/m²]. Poprzedni parametr F_z dla ściany górnej został zlikwidowany.

Miejsce wystąpienia najwyższej wartości przemieszczenia jest charakterystyczne oraz podobne względem poprzednich wariantów – w przeciwległym boku łączenia powierzchni utwierdzonych warunkami brzegowymi. Jednakże, mimo zastosowania takiej samej siły jak w wariacie 1, to wartość jest różna i wynosi $F_z = 14,564$ [nm] Wynika to z odmiennych wartości modułu Younga, która dla dolnej warstwy jest prawie 170-krotnie mniejsza niż dla górnej.

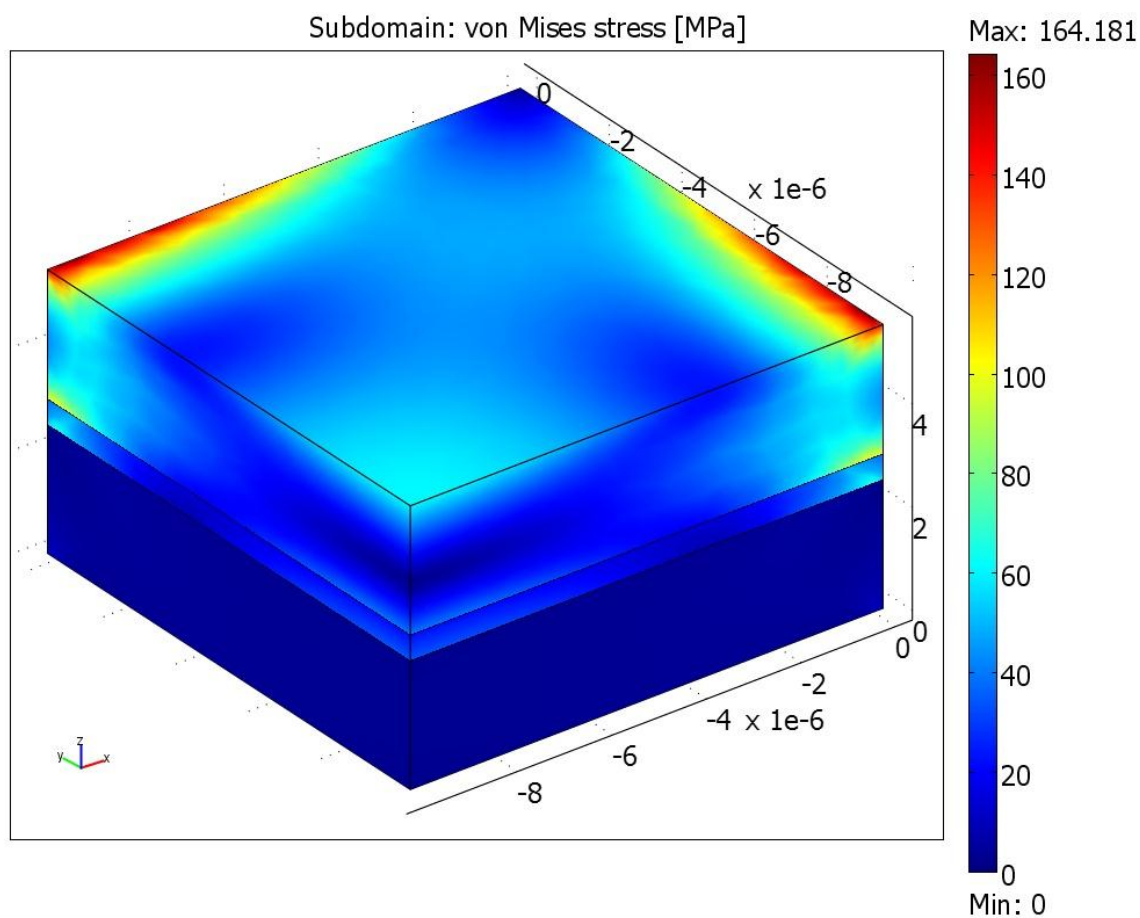
Analiza naprężeń również przyniosła oczekiwany efekt – miejsca wystąpienia największych wartości jest charakterystycznie podobne do poprzednich symulacji. Występuje ono w przeciwległym boku styku dwóch utwierdzonych ścian (dla analizy przemieszczeń) oraz w miejscu styku krawędzi utwierdzonych oraz nieutwierdzonych (dla analizy naprężeniowej).



Rys.25. Przemieszczenia w modelu. Wartość maksymalna: 14,564 [nm]



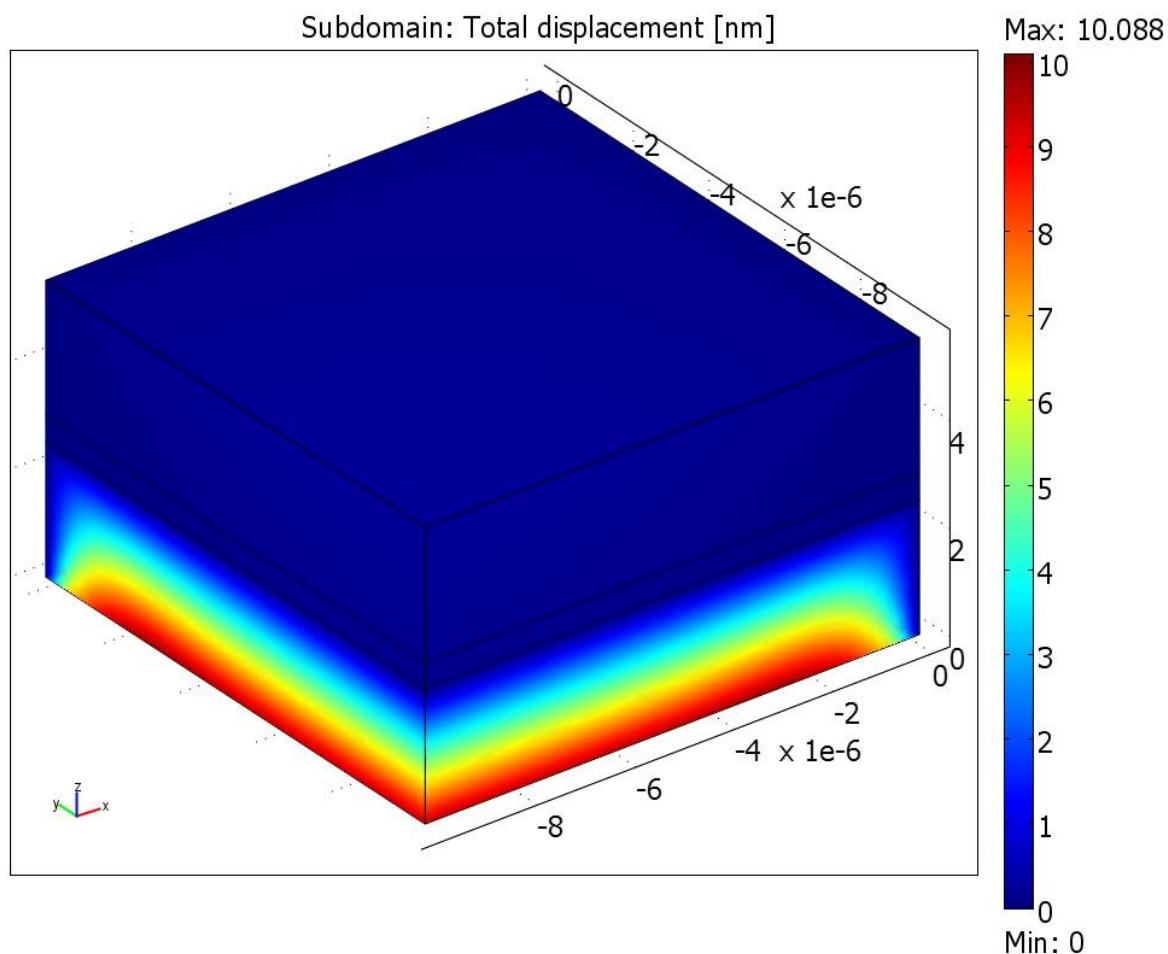
Rys.26. Przemieszczenia w modelu, płaszczyzna XY. Wartość maksymalna: 14,564 [nm]



Rys.27. Naprężenia zredukowane von Mises. Wartość maksymalna: 164,181 [MPa].

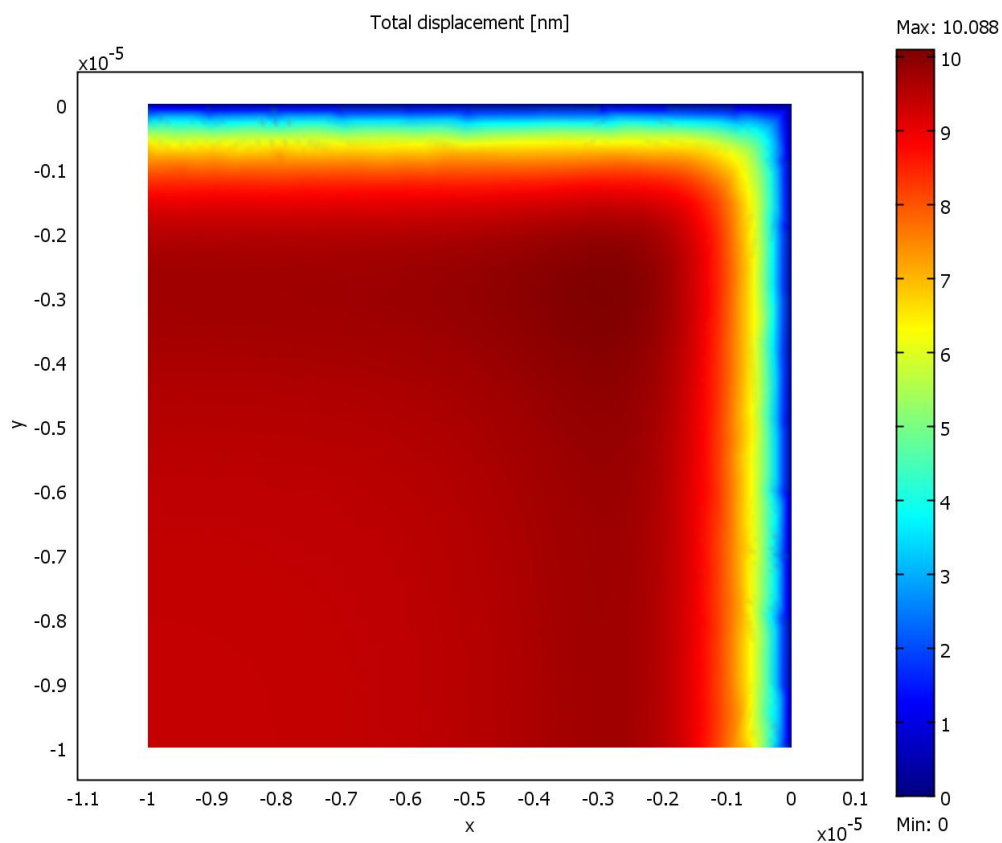
3.3.4. Analiza przemieszczeń i naprężeń – ściskanie

W tym przypadku zastosowano obciążenie pionowe dla dwóch ścian modelu, które są oznaczone na *Rys.15b*) oraz *Rys.15c*). Dla górnego elementu $F_z = -10e6$ [N/m²], zaś dla dolnego $F_z = 10e6$ [N/m²]. Badanie przedstawi wpływ ściskania na odkształcenia oraz naprężenia występujące w modelu.

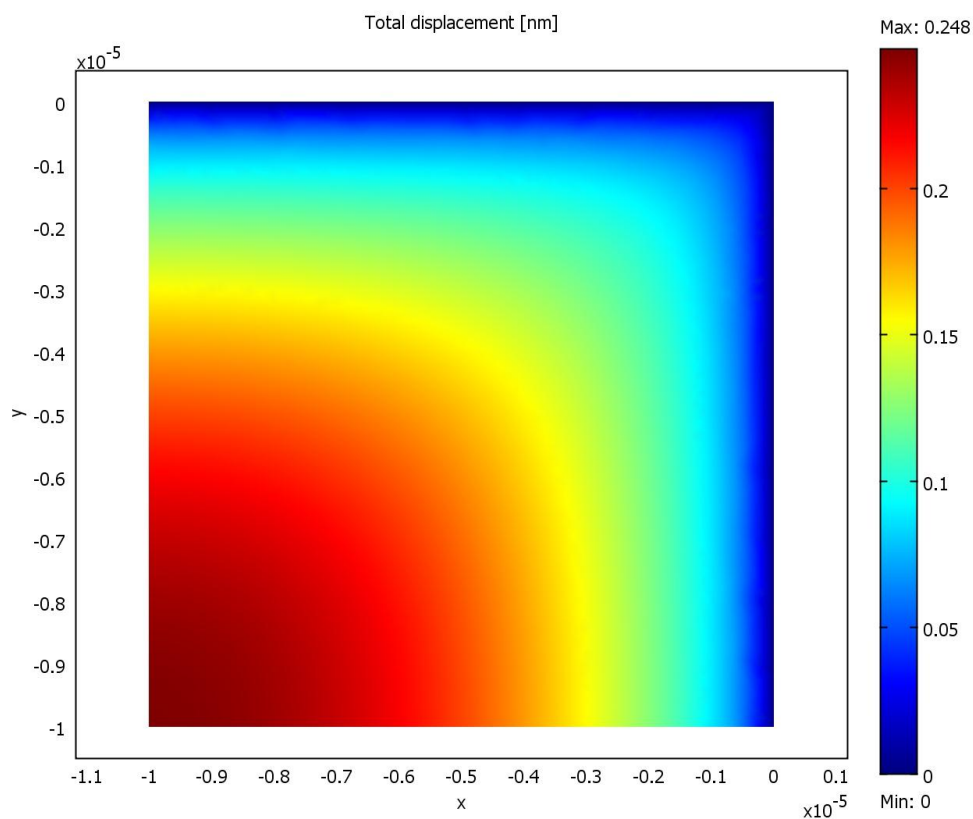


Rys.28. Przemieszczenia w modelu. Wartość maksymalna: 10,088 [nm]

Wynik symulacji wykazał, że pomimo zastosowania jednakowych wartości obciążeń na dwóch przeciwległych względem siebie ścian (różnica tylko w kierunku działania sił, oznaczona odpowiednio wartością minus lub plus), tylko w dolnej części kompozytu wystąpiły przemieszczenia. Wynika to z mniejszej wytrzymałości materiału dolnej części UHMWPE. Tak jak w podpunkcie 3.3.3. napisano, moduł Younga dla DLC jest około 170-krotnie większy od materiału dolnej części.

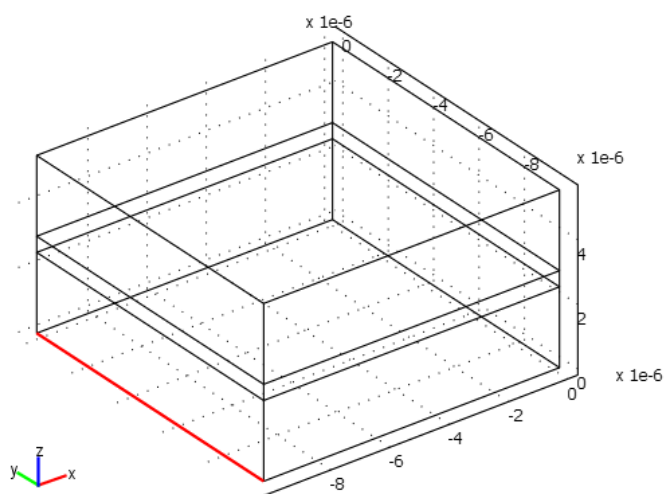


Rys.29. Przemieszczenia w modelu, płaszczyzna XY, ściana dolna. Wartość maksymalna: 10,088 [nm]

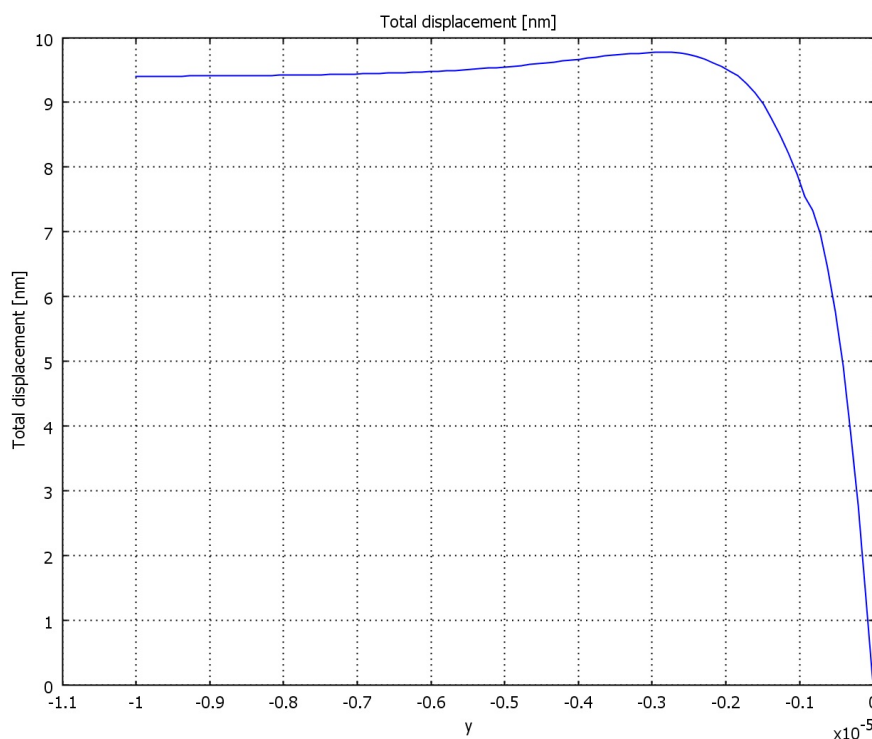


Rys.30. Przemieszczenia w modelu, płaszczyzna XY, ściana górna. Wartość maksymalna: 0,248 [nm].

Zdjęcia nr 29 oraz 30 pokazują różnicę opisaną wcześniej. Różnica, pomimo użycia jednakowych wartości sił, jest znacząca, gdyż jest ona 40-krotna.

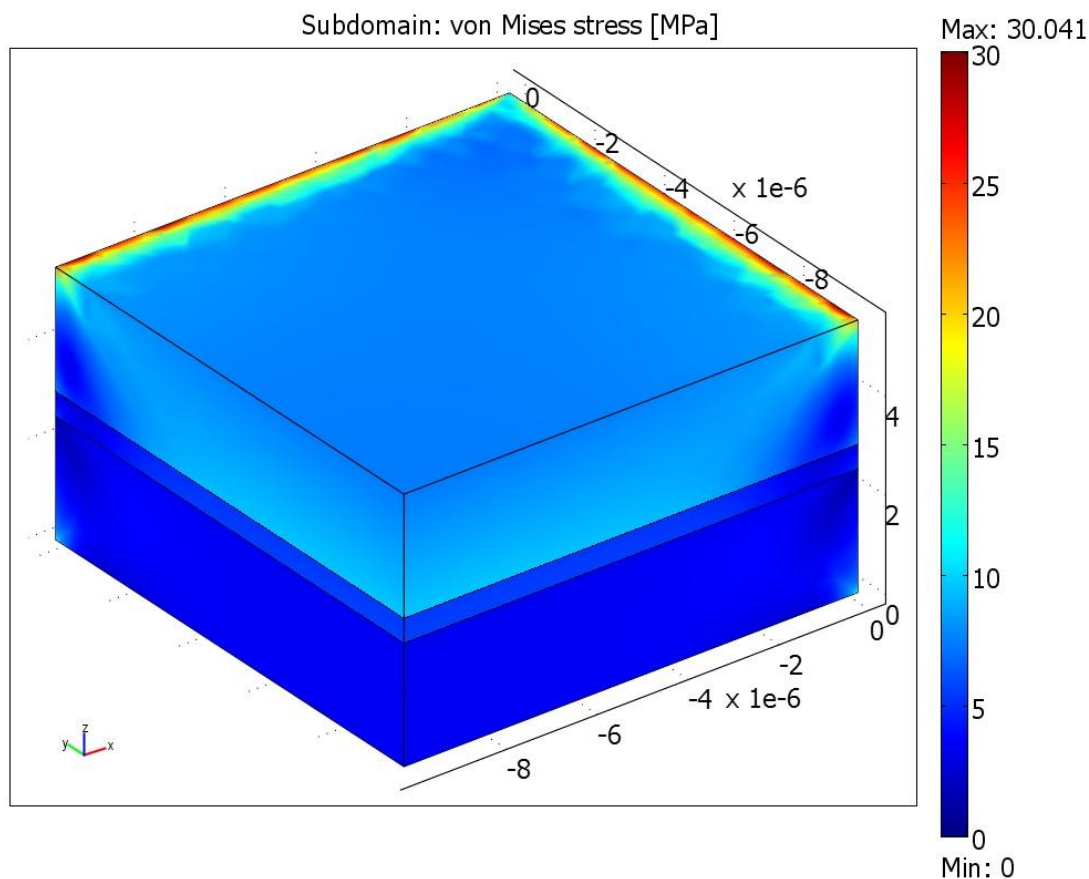


Rys.31. Krawędź (oznaczona na czerwono), której dotyczy wykres z Rys.32.



Rys.32. Wykres odkształcenia na krawędzi z Rys31. względem odległości od początku układu odniesienia.

Na wykresie przedstawionym na Rys.32. widać, że wartość odkształcenia jest prawie stała na ok 80% długości krawędzi i oscyluje wokół wartości 9,5 [nm]. Jednakże najwyższa wartość nie została odnotowana na krawędzi modelu, lecz w polu ściany dolnej.



Rys.33. Naprężenia zredukowane von Mises. Maksymalna wartość: 30,041 [MPa].

3.3.5. Analiza naprężeń i przemieszczeń – częstotliwości rezonansowe.

Ostatnim badaniem w pracy jest analiza dynamiczna pod kątem wyznaczenia wartości częstotliwości rezonansowych dla naszego modelu. Dzięki operacji „Eigenfrequency” możemy uzyskać wartości, przy których wzrasta amplituda drgań układu drgającego, nawet przy niewielkim udziale sił działających na układ.

Dla modelu o niezmiennych dotychczas parametrów wykazano 10 pierwszych wartości drgań rezonansowych. Parametr F_z identyczny jak w podpunkcie 3.3.1.

Lp. (i)	ω_i [Hz]
1	6,739766e7
2	8,96857e7
3	9,687762e7
4	9,86398e7
5	1,090936e8

6	1,164891e8
7	1,21507e8
8	1,274345e8
9	1,317865e8
10	1,32377e8

Tabela 7. Dziesięć pierwszych, wskazanych przez program, wartości drgań rezonansowych.

Wyniki drgań rezonansowych osiągnęły wartości rzędu dziesiątek i setek megaherców, co związane jest z małymi wymiarami badanego modelu oraz faktem, że wykazane wartości ω są efektem dążenia do zrównania się wartości drgań swobodnych oraz drgań wymuszonych. W tej sytuacji amplituda drgań rośnie nieograniczenie[8].

Wraz ze wzrostem masy badanego elementu wartość „eigenfrequency” również maleje, co uwarunkowane jest to wzorem (24).

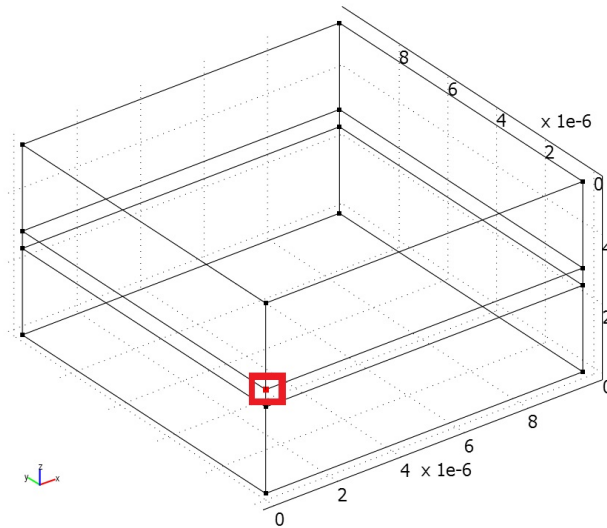
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (24)$$

gdzie: ω – częstotliwość kątowna drgań swobodnych,
 k – współczynnik proporcjonalności,
 m – masa układu.

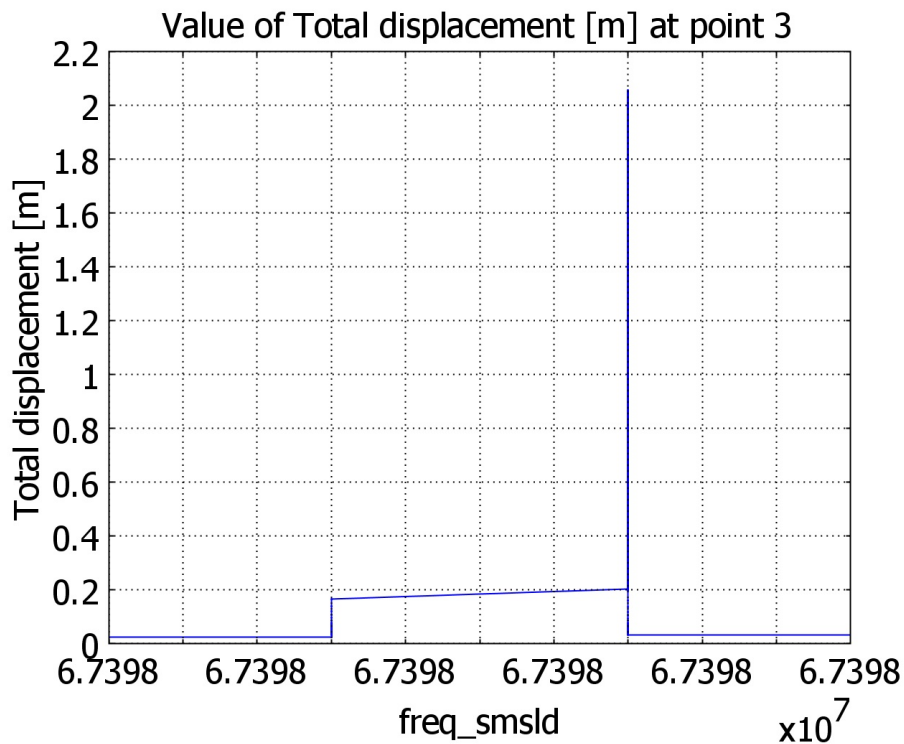
Z racji bardzo wysokich wyników ω [Hz], symulacja komputerowa dla przedziału granicznego określonej częstotliwości drgań rezonansowych, w celu znalezienia miejsca nagłego wzrostu amplitudy, trwa bardzo długo (dla przykładu z Rys.35 trwało to 1975,376 [s]). Dlatego w pracy zamieszczone zostały dane przedstawiające wynik symulacji „Frequency response” tylko dla pierwszej wartości: $\omega = 6,739766e7$ [Hz].

Badanie objęło wprowadzenie zakresu częstotliwości, dla którego zostało podjęte badanie, oraz rozdzielczość badania. W tym przypadku została wprowadzona zależność 6,739765e7:0.25:6,739767e7, co oznacza że dla wartości pomiędzy skrajnymi liczbami wykonywane są oddzielne badania drgań rezonansowych, z krokiem co liczba środkowa (w tym przypadku 0,25 [Hz]). Wnioskując, wykonano symulację „frequency response” dla 80 różnych wariantów, uzyskując wykres wzrostu amplitudy dla jednego wyniku symulacji „eigenfrequency”.

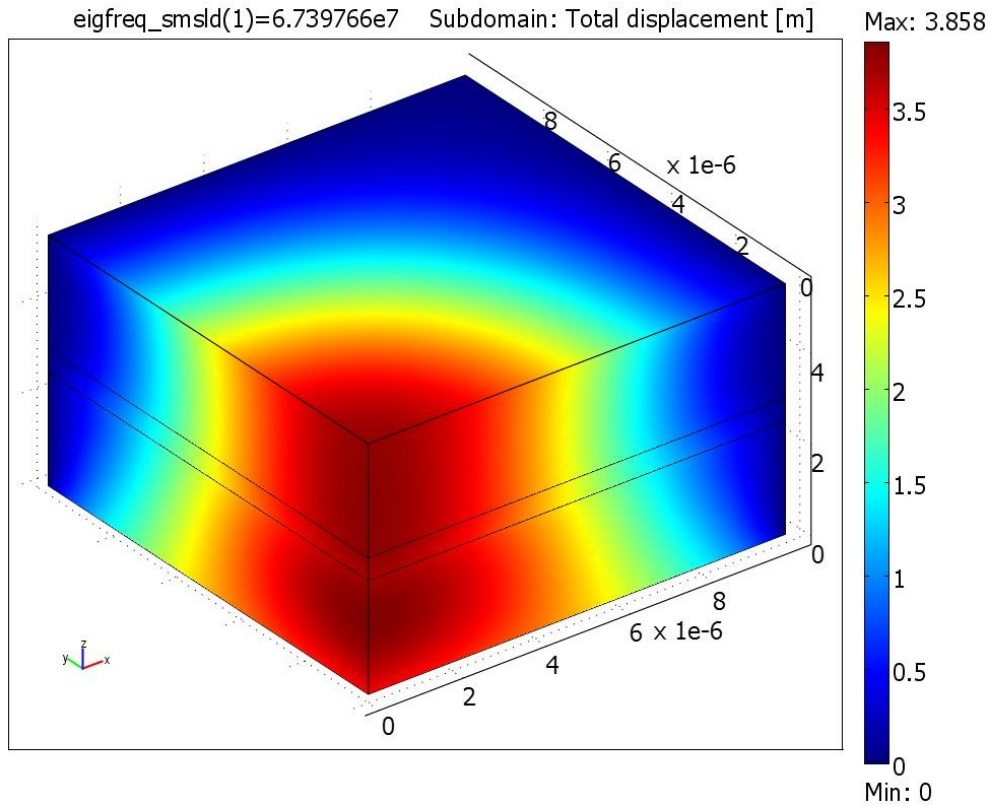
Badanie pokazało, że w momencie osiągnięcia wartości $\omega = 6,739766e7$ [Hz], wartość maksymalnych przemieszczeń w modelu wynosi aż 3,858 [m], zaś maksymalne naprężenia mają wartość dokładnie $8,489e16$ [Pa]. Są to wartości krytyczne i teoretycznie nieosiągalne dla rzeczywistych pomiarów. Ich występowanie jest w określonym punkcie przedziału drgań rezonansowych.



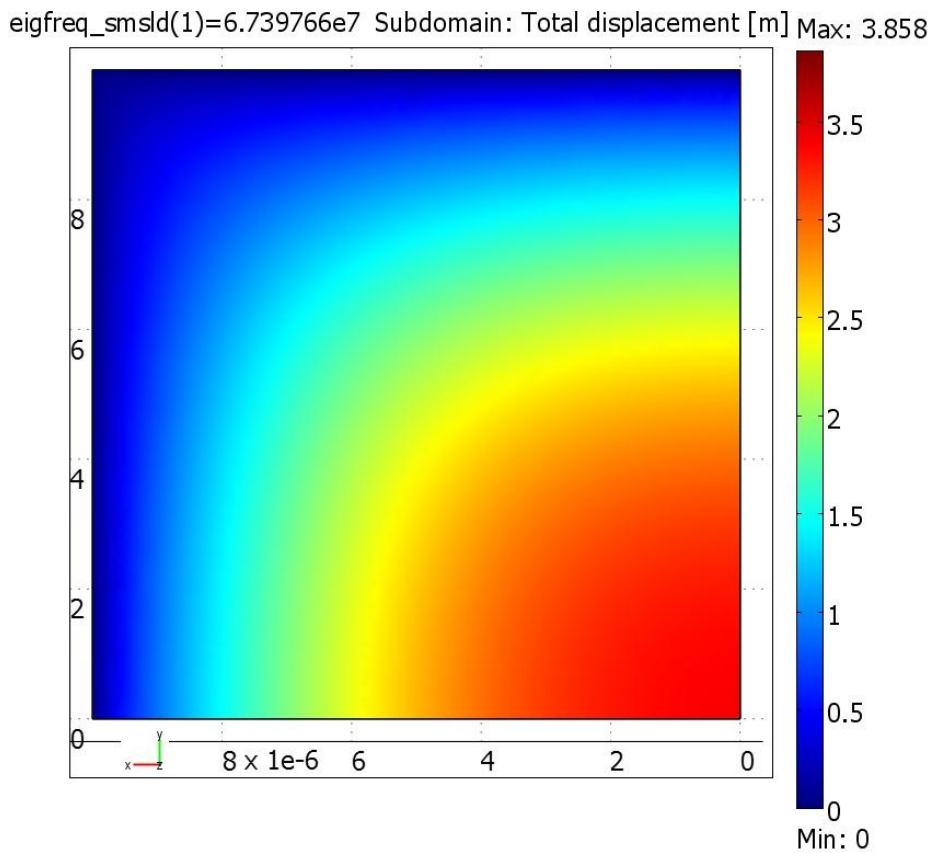
Rys.34. Punkt, którego się dotyczy wykres z Rys.35.



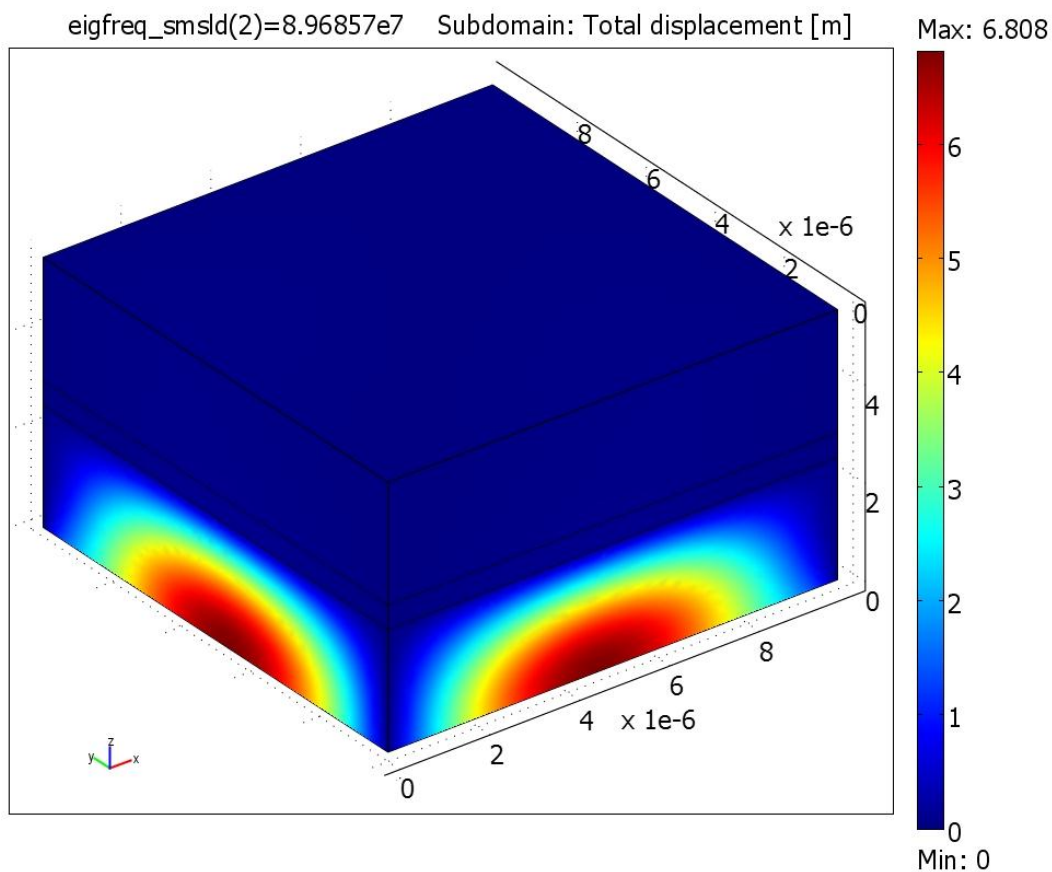
Rys.35. Przedstawienie rozkładu wartości drgań rezonansowych w punkcie z Rys.34. dla wartości ω_1 i zbliżonych.



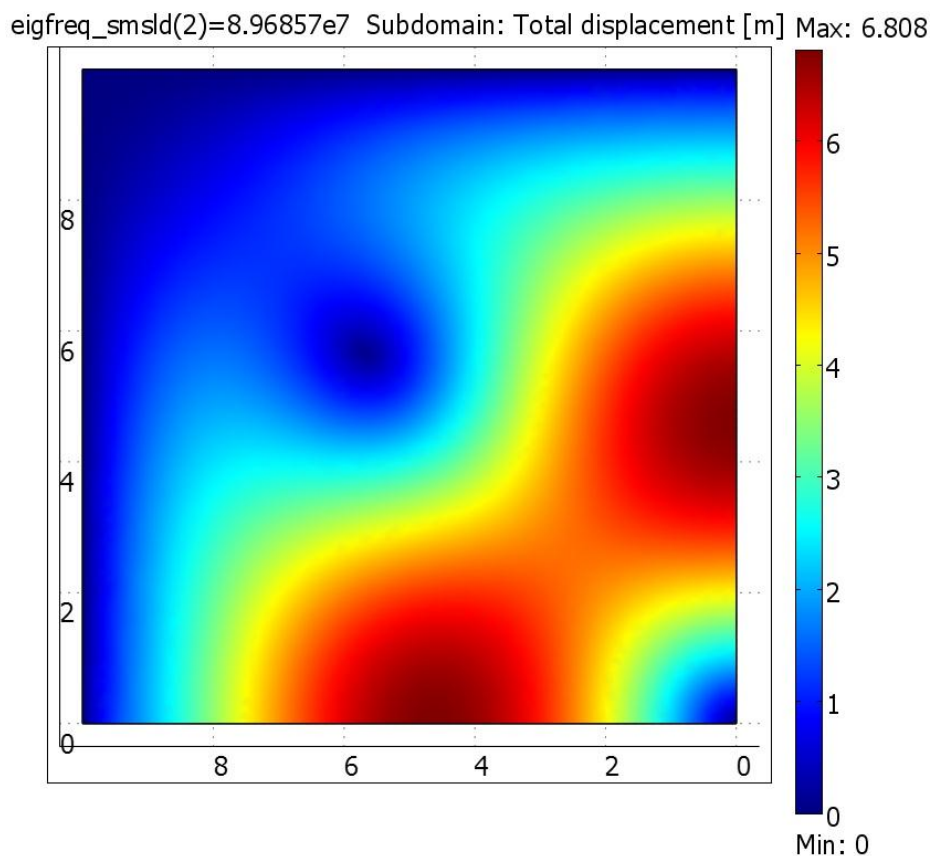
Rys.36. Przemieszczenia w modelu, dla wyniku ω_1 parametru „eigenfrequency”.



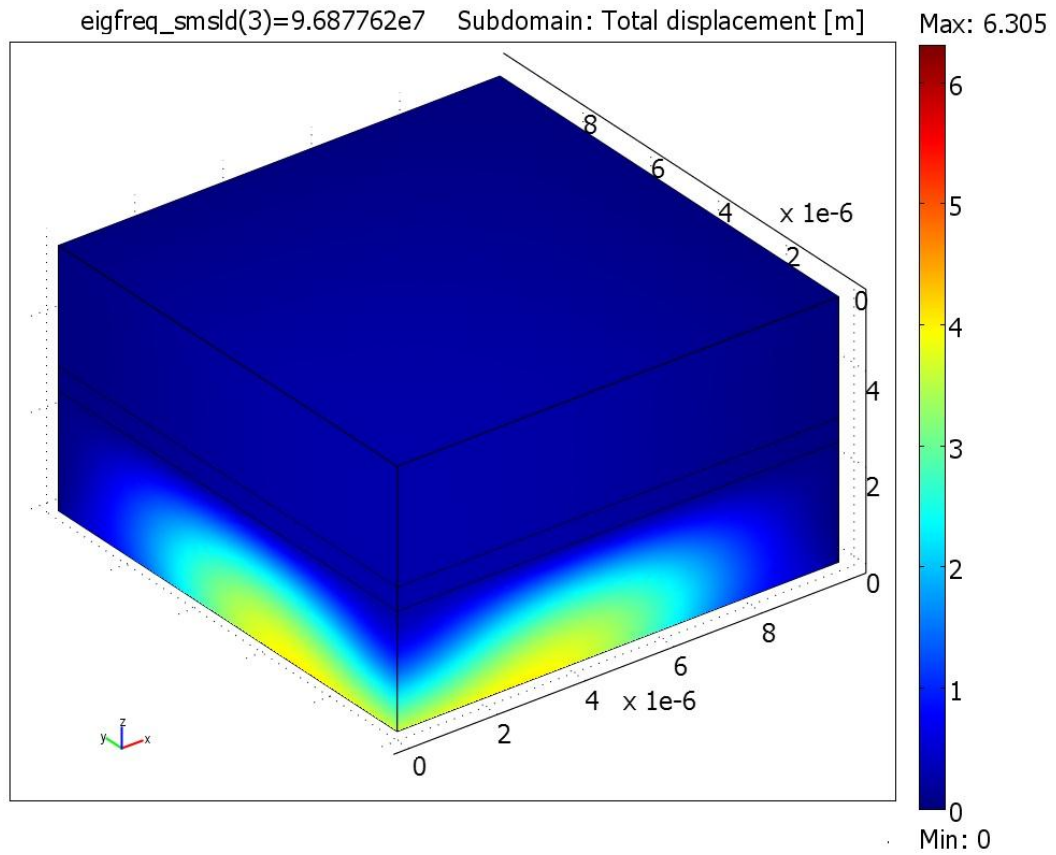
Rys.37. Przemieszczenia (ściana dolna) dla wyniku ω_1 parametru „eigenfrequency”.



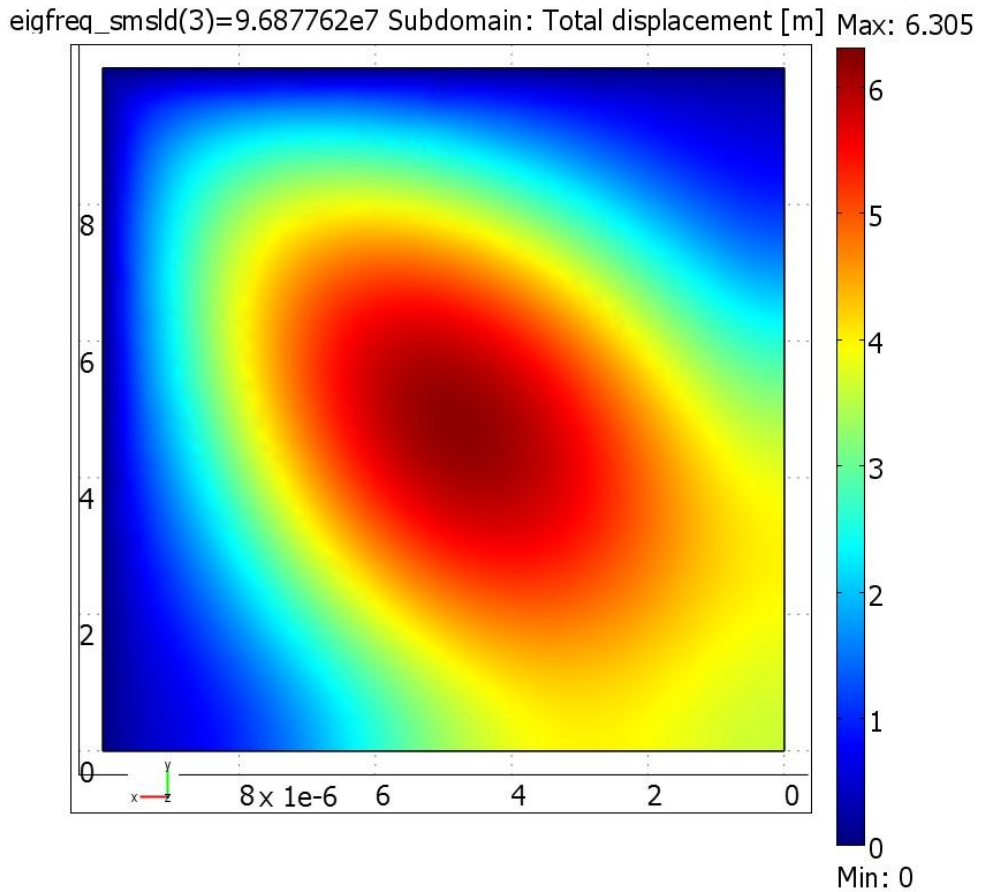
Rys.38. Przemieszczenia w modelu, dla wyniku ω_2 parametru „eigenfrequency”.



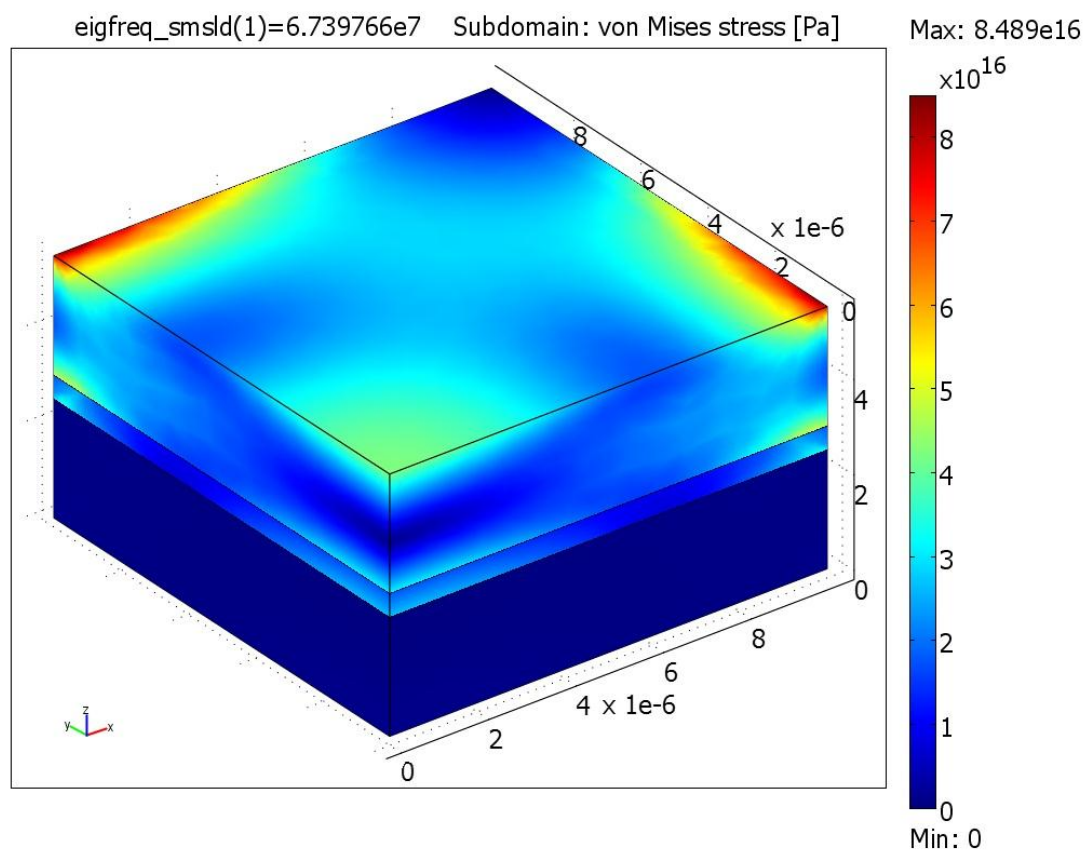
Rys.39. Przemieszczenia (ściana dolna) dla wyniku ω_2 parametru „eigenfrequency”.



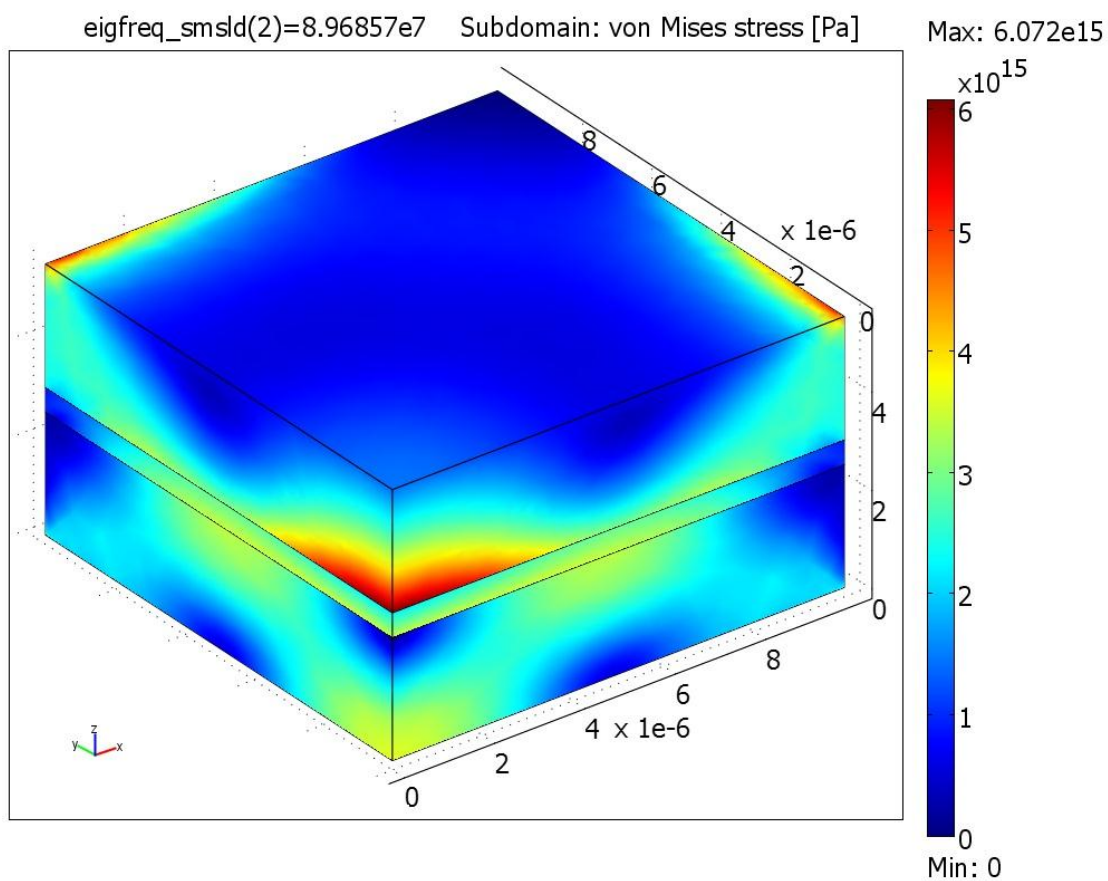
Rys.40. Przemieszczenia modelu dla wyniku ω_3 parametru „eigenfrequency”.



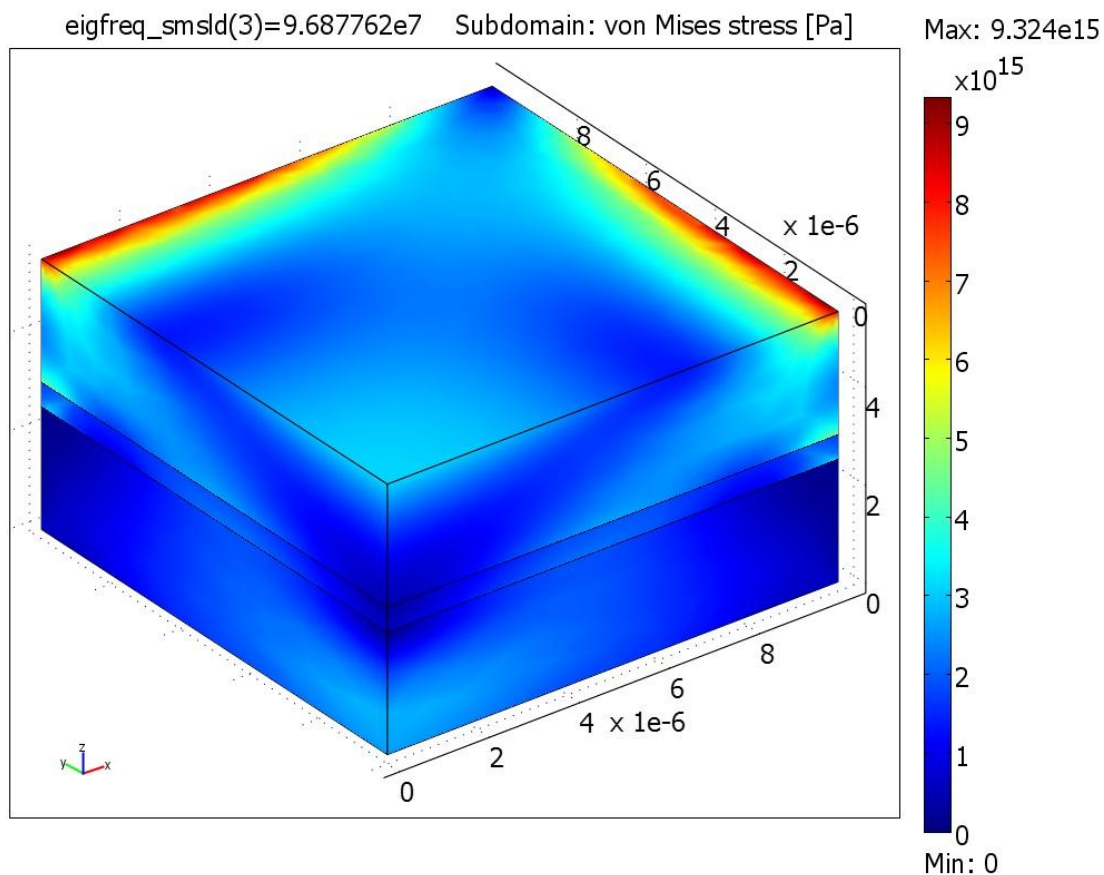
Rys.41. Przemieszczenia (ściana dolna) dla wyniku ω_3 parametru „eigenfrequency”.



Rys.42. Naprężenia zredukowane dla wyniku ω_1 parametru „eigenfrequency”.



Rys.43. Naprężenia zredukowane dla wyniku ω_2 parametru „eigenfrequency”.



Rys.43. Naprężenia zredukowane dla wyniku ω_3 parametru „eigenfrequency”.

Wykonano symulacje przemieszczeń i naprężeń modelu dla trzech pierwszych wartości częstotliwości rezonansowych.

Zauważyć można, że wartości maksymalne przemieszczeń są poza fizycznymi możliwościami, gdyż operują w skali metrów, zaś wymiary próbki są rzędu mikrometrów. Nie ma zależności wzrostu maksymalnych pomiarów naprężeń oraz przemieszczeń względem przyrostu ω .

4. WNIOSKI

W pracy przedstawiono analizę oraz symulację właściwości mechanicznych wybranej próbki biomateriału kompozytowego.

Pierwszym badaniem było statyczne ugięcie modelu biomateriału, który jest kompozytem składającym się z trzech różnych materiałów. Warunki brzegowe do tego zadania zostały ustalone i przedstawione na początku podpunktu dotyczącego tej symulacji, tak jak w pozostałych przypadkach. W wyniku obciążenia ściany górnej oraz utwierdzenia dwóch z czterech ścian modelu, analiza pokazała nam rozkład i wartości maksymalnych przemieszczeń oraz naprężeń zredukowanych von Mises.

Drugie badanie różniło się od pierwszego jedną cechą – obciążenie F_z ściany górnej zmalało dziesięciokrotnie. Wynik symulacji maksymalnych naprężeń oraz przemieszczeń przedstawił zależność proporcjonalności liniowej, omówioną poprzez działanie prawa Hooke'a, gdyż wartości maksymalne badań również zmalały 10-krotnie.

Kolejna symulacja obejmowała zmianę powierzchni obciążonej – zastosowano taką samą wartość F_z jak w pierwszym działaniu, lecz powierzchnia poddana działaniu sile F_z to ściana dolna, której moduł Younga jest blisko 170-krotnie mniejszy niż warstwy górnej. Efektem jest wykazana ponad 2-krotnie wyższa wartość maksymalnego przemieszczenia, jednak maksymalne naprężenie zredukowane jest niższe od symulacji obciążającej warstwę górną.

Czwartym badaniem było zastosowanie parametru F_z o takiej samej wartości dla obydwu stron kompozytu, dzięki temu można było przeanalizować wpływ ściskania na model. Wynikiem było wykazanie znaczenia modułu Younga i zarazem wytrzymałości na ściskanie, gdyż materiał DLC, będący budulcem warstwy górnej, doznał ponad 40-krotnie mniejszych wartości maksymalnych przemieszczeń od tych, panujących na ścianie dolnej warstwy dolnej.

Piątą, i zarazem ostatnią, analizą były badania dynamiczne pod względem znalezienia wartości drgań rezonansowych dla badanego modelu. Dzięki funkcji „eigenfrequency” wyznaczono dziesięć pierwszych wartości, dla których amplituda drgań gwałtownie wzrasta, dążąc nieograniczenie do wartości przekraczających wszelkie krytyczne możliwości wytrzymałościowe. Z racji faktu, że dla modelu o wymiarach

Modelowanie i symulacja właściwości mechanicznych biomateriałów

w skali mikro, wykazanie wykresu odkształceń od częstotliwości dla całego zakresu drgań rezonansowych byłoby czasowo nieopłacalne, więc w pracy zamieszczono fakt wystąpienia tego zjawiska tylko dla pierwszej wykazanej częstotliwości rezonansowej.

5. ABSTRACT OF THESIS

This thesis presents mechanical properties of biomaterials, supported by FEM computer simulation examples based on biocompatible material sample, which is a composite of three different materials.

The application of given material in work may find its place in medicine as top layer of hip's friction surface, considering its high tolerance to abrasion and high biocompatibility.

The potential of COMSOL Multiphysics program gives opportunity to present simulations of transferences and stresses in both static and dynamic studies. The results have been divided into subsections and each simulation consisted of conclusion judging the reasonableness of its application. What is more, the first section of thesis consists of theoretical preparation from biomaterials and description of certain phenomena from physics and strength of materials subjects and in addition a proper explanation of Finite Elements Method (FEM), used in simulations with short description of software used during the studies.

STRESZCZENIE

Praca przedstawia właściwości mechaniczne biomateriałów, poparte przykładami symulacji komputerowych metodą MES na zamodelowanej próbce materiału biozgodnego, będącego kompozytem złożonym z trzech różnych materiałów.

Zastosowanie materiału użytego w pracy znalazłoby miejsce w medycynie jako warstwa wierzchnia powierzchni ciernych endoprotezy stawu biodrowego, ze względu na wysoką odporność na ścieranie oraz wysoką biozgodność.

Dzięki możliwościom programu COMSOL Multiphysics można było przedstawić symulacje przemieszczeń oraz naprężeń zarówno w badaniach statycznych, jak i dynamicznych. Wyniki zostały podzielone na podpunkty, zaś do każdej z symulacji zostały przedstawione wnioski opiniujące sensowność ich zastosowania. Dodatkowo, w pierwszej części pracy zamieszczono przygotowanie teoretyczne

Modelowanie i symulacja właściwości mechanicznych biomateriałów

z zakresu biomateriałów, jak i opis zjawisk z dziedziny fizyki oraz wytrzymałości materiałów, ponadto stosowne wyjaśnienie Metody Elementów Skończonych MES użytej w symulacjach oraz krótki opis software wykorzystywanego w pracy.

LITERATURA

- [1] Błażewicz S., Stoch L. Tom 4 Biomateriały, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2003
- [2] Świczko-Żurek B., Instrukcje Politechniki Gdańskiej do ćwiczenia z Biomateriałów pt: Materiały biomedyczne, <http://www.pg.gda.pl/~kkrzysz/biomat2.pdf> (dostępność dnia 13/02/2013)
- [3] Świczko-Żurek B., Zieliński A., Ossowska A., Sobieszczyk S., Skrypt Politechniki Gdańskiej do przedmiotu Biomateriały, <http://www.mech.pg.gda.pl/katedra/imis/wp-content/blogs.dir/49/files/2012/05/biomateriały.pdf> (dostępność dnia 13/02/2013)
- [4] Świczko-Żurek B. Biomateriały, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2009
- [5] Jurczyk M., Jakubowicz J., Bionanomateriały, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008
- [6] Zima A., Wpływ dodatków modyfikujących na właściwości hydroksypatytowych wielofunkcyjnych tworzyw implantacyjnych przeznaczonych na nośniki leków. Rozprawa doktorska, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków, 2007
- [7] Hyla I., Tworzywa sztuczne. Własności – przetwórstwo – zastosowanie. Wydanie II, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2000
- [8] Siuta W, Mechanika Techniczna, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1954
- [9] Encyklopedia Popularna PWN, Wydanie 19, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1982
- [10] Ostwald M., Podstawy wytrzymałości materiałów wydanie drugie poprawione i uzupełnione, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2003
- [11] Wolny S., Siemieniec A., Wytrzymałość materiałów część I, Wydawnictwo AGH, Kraków 2002
- [12] Bureau International des Poids et Mesures, The International System of Units (SI), 8th edition, 2006
- [13] Gabryszewski Z., Teoria sprężystości i plastyczności, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2001

- [14] Zielnica J., Wytrzymałość materiałów, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 2001
- [15] Bodnar A: Wytrzymałość Materiałów, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2004
- [16] Joniak S. (red.), Badania eksperymentalne w wytrzymałości materiałów, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 2006
- [17] Przegląd Mechaniczny, zeszyt 7-8/2012, str.25-30

Strony internetowe:

- [18] http://www.teberia.pl/index_txt.php?id=2086&kom=dodaj
(dostępność dnia 13/02/2013)
- [19] <http://portal.abczdrowie.pl/proteza-stawu-biodrowego#>
(dostępność dnia 13/02/2013)
- [20] <http://encyklopedia.pwn.pl/> (dostępność dnia 13/02/2013)
- [21] http://help.solidworks.com/2011/Polish/solidworks/cworks/legacyhelp/simulation/Checking_stresses/prot_vonm.html (dostępność dnia 13/02/2013)
- [22] <http://www.comsol.com/> (dostępność dnia 13/02/2013)
- [23] <http://www.knse.pl/publikacje/65.pdf> (dostępność dnia 13/02/2013)
- [24] <http://techtutor.pl/model-mes/> (dostępność dnia 13/02/2013)